

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii: PREPRINTY nr 82/2000



Algorytmy identyfikacji systemów nieliniowych za pomocą falek

(Rozprawa doktorska)

Przemysław Śliwiński

PROMOTOR:

dr hab. inż. Zygmunt Hasiewicz, prof. PWr

Słowa kluczowe:

- algorytmy identyfikacji
- systemy nieliniowe
- szeregi ortogonalne
- faleki
- szybkie algorytmy obliczeniowe

WROCŁAW
czerwiec 2000

Spis rzeczy

Lista najwazniejszych oznaczeń	4
Wprowadzenie	7
Cele pracy	9
1 Falkowa analiza wielorozdzielcza	10
1.1 Rodzina funkcji falkowych Daubechies	11
1.2 Aproksymacja falkowa	13
1.3 Szybka transformata falkowa FWT	15
2 Nieliniowe systemy o strukturze blokowej	17
2.1 Zastosowania praktyczne	17
2.2 System zastępczy. Warunki identyfikacji	18
2.3 Przykłady systemów o strukturze blokowej	19
2.3.1 System statyczny	20
2.3.2 System Hammersteina	20
2.3.3 System równoległy	21
2.3.4 System szeregowo-równoległy	23
2.3.5 System o wielu wejściach (MISO)	24
Podsumowanie	25
3 Falkowe algorytmy identyfikacji	26
A. Znana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu	27
3.1 Algorytm ilorazowy	27
3.1.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$	28
A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$	29
B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$	36
3.1.2 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$	41
A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$	41
B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$	43
C. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_G(x; K; p)$	45
3.2 Algorytm bezpośredni	46

3.2.1	Analiza w=asności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$	48
A.	Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$	52
B.	Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$	56
C.	Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_R(x; K; p)$	60
B.	Nieznana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu	61
3.3	Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu	61
3.3.1	Analiza w=asności modeli empirycznych $\hat{f}(x; K; p)$	63
3.3.2	Analiza w=asności modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$	64
A.	Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$	66
	Podsumowanie	66
4	Falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji	69
4.1	Podstawa teoretyczna	70
4.1.1	Aproksymacja falek	70
4.1.2	W=asności aproksymacji funkcji falkowych	70
4.1.3	Falkowe modele obliczeniowe	71
4.2	Empiryczne modele obliczeniowe. Algorytmy obliczeniowe identyfikacji	73
4.3	Przykładowa analiza falkowego algorytmu obliczeniowego identyfikacji (algorytm ilorazowy)	75
4.3.1	Analiza w=asności empirycznych modeli obliczeniowych $\mathbb{G}(x; K; H; p)$	75
A.	Analiza zbieżności punktowej modeli obliczeniowych $\mathbb{G}(x; K; H; p)$	76
B.	Analiza zbieżności całkowej modeli obliczeniowych $\mathbb{G}(x; K; H; p)$	79
4.3.2	Analiza w=asności empirycznych modeli obliczeniowych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$	81
A.	Dobór skali H w aproksymacjach funkcji falkowych $\hat{1}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$	82
4.4	Szybkie algorytmy wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych	83
4.4.1	Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy	84
	Podsumowanie	87
5	Badania numeryczne falkowych algorytmów identyfikacji	88
5.1	Warunki eksperymentów	89
5.2	Wybrane wyniki badań numerycznych	92
5.2.1	Stosowalność reguły doboru skali modeli	93
5.2.2	Wpływ skali aproksymacji falek na zachowanie modeli obliczeniowych	94
5.2.3	Porównanie algorytmu falkowego z algorytmem trygonometrycznym	94
	Podsumowanie	95
	Rezultaty badań numerycznych – wykresy	97
	Zakończenie	108
	Wyniki otrzymane w pracy	108

Dlaczego falki?	111
Otwarte problemy badawcze	112
A Uzupełnienia do rozdziału 1	114
A.1 Funkcje $b_{x,c}$ i $d_{x,c}$	114
A.2 Siatka binarna B_H	114
A.3 Algorytm wyznaczania wartości funkcji falkowych	115
B Uzupełnienia do rozdziału 3	116
B.1 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{G}_{M_n}^p$ i $\hat{\Delta}_{ml}^p$ modeli $\hat{G}(x; K; p)$	116
B.2 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{G}(x; K; p)$	120
B.3 Oszacowanie współczynników falkowych \hat{G}_{ml}^{-p}	123
B.4 Oszacowanie obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p)$	126
B.5 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{R}_{M_n}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{p0}$ modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$	127
B.6 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{R}_R(x; K; p)$	128
B.7 Optymalna szybkość zbieżności modeli falkowych	129
B.8 Szybkość zbieżności według prawdopodobieństwa	129
B.9 Wybrane własności szeregów liczbowych	130
C Uzupełnienia do rozdziału 4	131
C.1 Oszacowanie błędów aproksymacji funkcji falkowych	131
C.2 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{G}_{M_n}^p$ i \hat{G}_{ml}^p modeli $\hat{G}(x; K; H; p)$	134
C.3 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{G}(x; K; H; p)$	135
C.4 Oszacowanie obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; H; p)$	135
C.5 Tabele współczynników Daubechies	137
C.6 Liczba współczynników w modelach obliczeniowych $\hat{R}_G(x; K; H; p)$	138
C.7 Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy	139
C.8 Procedury komputerowe	140
Literatura	142

Lista najważniejszych oznaczeń

Rozdział 1

- $\tilde{f}(x)$ — funkcja skalująca (falka-ojciec)
- $\tilde{A}(x)$ — falka (falka-matka)
- $N; Z; R$ — zbiory liczb naturalnych, całkowitych i rzeczywistych
- $L^2(R)$ — przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na prostej rzeczywistej
- $\tilde{f}^p(x)$ — funkcja skalująca Daubechies o numerze falkowym p
- $\tilde{A}^p(x)$ — falka Daubechies o numerze falkowym p
- $I_S(x)$ — funkcja wskaźnikowa zbioru S

Rozdział 2

Schemat zastępczy systemu:

- x_k — wejście identyfikowanego systemu
- y_k — wyjście identyfikowanego systemu
- $R(\zeta)$ — identyfikowana nieliniowość
- $f(\zeta)$ — funkcja gęstości prawdopodobieństwa wejścia systemu
- $f_{i;g}$ — odpowiedź impulsowa liniowego podsystemu dynamicznego
- u_k — sygnał zakłócający pochodzący od systemu
- $\zeta^3(\zeta)$ — nieliniowość pasożytnicza
- u_k — zakłócenie zewnętrzne (białe)
- z_k — zakłócenie zewnętrzne (skorelowane)
- $f_{i;g}$ — odpowiedź impulsowa układu generującego zakłócenia z_k

Przykłady systemów:

- $\mu(\zeta)$ — charakterystyki nieliniowe elementów statycznych
- $f_{i;g}$ — odpowiedzi impulsowe liniowych elementów dynamicznych
- u_k — pobudzenie zewnętrzne (białe)

Rozdział 3

- $R_G(x; K; p)$ — teoretyczny model falkowy nieliniowości $R(x)$, podstawa algorytmu ilorazowego
- $G(x; K; p)$ — teoretyczny model falkowy funkcji $G(x) = R(x) \circledast f(x)$ (licznik falkowych modeli teoretycznych $R_G(x; K; p)$ i $R_{Gf}(x; K; p)$)
- $\hat{R}_G(x; K; p)$ — empiryczny model falkowy nieliniowości $R(x)$ otrzymywany według algorytmu ilorazowego
- $\hat{G}(x; K; p)$ — empiryczny model falkowy funkcji $G(x)$ (licznik falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ i $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$)
- $\hat{R}_{Mn}^p, \hat{R}_{ml}^{-p}$ — współczynniki modelu empirycznego $\hat{G}(x; K; p)$

- $R_R(x; K; p)$ — teoretyczny model falkowy nieliniowości $R(x)$,
 podstawa algorytmu bezpośredniego
 $\otimes_{Mn}^{p0}, \text{ } ^{-p0}_{ml}$ — współczynniki modelu teoretycznego $R_R(x; K; p)$
 $\hat{R}_R(x; K; p)$ — empiryczny model falkowy nieliniowości $R(x)$,
 otrzymywany według algorytmu bezpośredniego
 $\otimes_{Mn}^{p0}, \text{ } ^{\Delta p0}_{ml}$ — współczynniki modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K; p)$
- $R_{Gf}(x; K; p)$ — teoretyczny model falkowy nieliniowości $R(x)$,
 podstawa algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości
 wejścia systemu $f(x)$
 $f(x; K; p)$ — teoretyczny model falkowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
 (mianownik modelu teoretycznego $R_{Gf}(x; K; p)$)
 $a_{Mn}^p, \text{ } b_{ml}^p$ — współczynniki modelu teoretycznego $f(x; K; p)$
 $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ — empiryczny model falkowy nieliniowości $R(x)$, otrzymywany
 według algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości
 wejścia systemu $f(x)$
 $\hat{f}(x; K; p)$ — empiryczny model falkowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
 (mianownik modelu empirycznego $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$)
 $a_{Mn}^p, \text{ } \hat{b}_{ml}^p$ — współczynniki modelu empirycznego $\hat{f}(x; K; p)$
- $C \rightarrow [a; b]$ — klasa funkcji ciągłych w przedziale $[a; b]$
 MSE — punktowy błąd średniokwadratowy
 $bias$ — składowa obciążenia błędu MSE
 var — składowa wariancji błędu MSE
 $MISE$ — całkowy (globalny) błąd średniokwadratowy
 ISB — składowa obciążenia (w kwadracie) błędu MISE
 IV — składowa wariancji błędu MISE

Rozdział 4

- H — parametr skali aproksymacji funkcji falkowych
 $\eta^p(x; H)$ — aproksymacja funkcji skalującej $\eta^p(x)$ w skali H
 $\hat{A}^p(x; H)$ — aproksymacja falki-matki $\hat{A}^p(x)$ w skali H
 B_H — siatka binarna
- $\hat{R}_G(x; K; H; p)$ — falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $R_G(x; K; p)$)
 $\hat{G}(x; K; H; p)$ — falkowy model obliczeniowy funkcji $G(x)$ (odpowiednik
 falkowego modelu teoretycznego $G(x; K; p)$)
 $\otimes_{Mn}^p, \text{ } ^{1p}_{ml}$ — współczynniki falkowego modelu obliczeniowego $\hat{G}(x; K; H; p)$
 $\hat{R}_G(x; K; H; p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 otrzymywany według obliczeniowego algorytmu ilorazowego
 $\hat{G}(x; K; H; p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy funkcji $G(x)$ (licznik
 empirycznych modeli obliczeniowych $\hat{R}_G(x; K; H; p)$
 i $\hat{R}_{Gf}(x; K; H; p)$)
 $\otimes_{Mn}^p, \text{ } ^{=p}_{ml}$ — współczynniki falkowego empirycznego modelu
 obliczeniowego $\hat{G}(x; K; H; p)$

- $\hat{R}_R(x; K; H; p)$ — falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $R_R(x; K; p)$)
- $\hat{a}_{Mn}^{p0}, \hat{b}_{ml}^{p0}$ — współczynniki falkowego modelu obliczeniowego $\hat{R}_R(x; K; H; p)$
- $\mathbb{R}_R(x; K; H; p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 otrzymywany według obliczeniowego algorytmu bezpośredniego
- $\hat{a}_{Mn}^{p0}, \hat{b}_{ml}^{p0}$ — współczynniki empirycznego modelu obliczeniowego $\mathbb{R}_R(x; K; H; p)$
- $\hat{R}_{Gf}(x; K; H; p)$ — falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $R_{Gf}(x; K; p)$)
- $\hat{f}(x; K; H; p)$ — falkowy model obliczeniowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $f(x; K; p)$)
- $\hat{a}_{Mn}^p, \hat{b}_{ml}^p$ — współczynniki falkowego modelu obliczeniowego $\hat{f}(x; K; H; p)$
- $\mathbb{R}_{Gf}(x; K; H; p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 otrzymywany według obliczeniowego algorytmu ilorazowego
 z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
- $\hat{f}(x; K; H; p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy funkcji gęstości
 wejścia systemu $f(x)$ (mianownik empirycznego
 modelu obliczeniowego $\mathbb{R}_{Gf}(x; K; H; p)$)
- $\hat{a}_{Mn}^p, \hat{b}_{ml}^p$ — współczynniki empirycznego modelu obliczeniowego $\hat{f}(x; K; H; p)$
- $P_G(M; K)$ — liczba współczynników falkowego modelu
 obliczeniowego $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$
- $C_G(N; K; p)$ — złożoność numeryczna falkowego obliczeniowego
 algorytmu ilorazowego
- $C_G^F(N; K; p)$ — złożoność numeryczna szybkiego falkowego algorytmu ilorazowego

Wprowadzenie

Zadanie identyfikacji polega na wyznaczeniu matematycznego opisu zależności pomiędzy wejściem a wyjściem obiektu. Zadanie to jest determinowane przez następujące czynniki (por. [52], [95], [108], [127]):

- ² obiekt identyfikacji i informacja aprioryczna o obiekcie,
- ² możliwości pomiarowe i dane pomiarowe zebrane w trakcie eksperymentu (informacja pomiarowa),
- ² wybrana klasa modeli obiektu, oraz
- ² zastosowany algorytm identyfikacji.

Obiekt identyfikacji i informacja aprioryczna. W niniejszej pracy, obiektem identyfikacji jest nieliniowa charakterystyka elementu statycznego, będącego częścią składową zrozozonego systemu dynamicznego o strukturze blokowej (systemu o strukturze zbudowanej z wyodrębnionych elementów (podsystemów) nieliniowych statycznych i liniowych dynamicznych).

Problematyka identyfikacji charakterystyk nieliniowych w tego typu systemach jest tematem szeregu prac (zob. np. [6], [8]-[11], [18], [44]-[57], [61]-[63], [66]-[70], [87]-[90], [103], [107]-[108], [117], [124], [127]). Jej znaczenie wynika z szerokiego zakresu zastosowań systemów o strukturze blokowej, przykładowo: w sterowaniu [155], mechanice [134], biocybernetyce [59], medycynie [75], [96], chemii [36], czy w przetwarzaniu sygnałów [101].

Zakładamy, że dostępna informacja aprioryczna o identyfikowanej nieliniowości jest niewielka. Przyjmujemy jedynie, że nieliniowa charakterystyka jest ograniczona; natomiast od pozostałych elementów dynamicznych systemu wymagamy tylko aby były asymptotycznie stabilne.

Dane pomiarowe. Eksperyment. W pracy przyjmujemy, że identyfikacja przebiega w warunkach losowych, tj., że wejście zrozozonego systemu jest pobudzone sygnałem losowym, a jego wyjście podlega losowym zakłóceniom. Sytuacja taka odpowiada tzw. eksperymentowi biernemu i, z praktycznego punktu widzenia oznacza, że charakterystyka nieliniowa w systemie ma być identyfikowana w trakcie jego normalnej pracy (zob. np. [37, str. 39], [40, str. 306]). Ponadto, zakładamy, że posiadane pomiary pochodzą z wejścia i wyjścia całego systemu. Warunek ten jest istotny w wielu zastosowaniach, w których odłączenie (lub rozdzielenie) systemu w celu identyfikacji jego elementów jest, bądź niemożliwe (np. w badaniach biomedycznych [102], [120], [154], czy analizie jakości wody [29]), bądź kosztowne (np. w identyfikacji charakterystyk nieliniowych kolumn destylacyjnych [19] lub obiektów elektrotermicznych [125]).

Klasa modeli. Przyjęte ogólne postulaty odnośnie nieliniowości będących obiektem identyfikacji wymagają (w celu umożliwienia zbieżności algorytmom identyfikacji) dobrania odpowiednio szerokiej klasy ich modeli (por. [44]-[57], [70], [86], [107]-[108], [112]-[113], [116], [124]). W pracy stosujemy modele falkowe, które opierają się na szeregach ortogonalnych funkcji falkowych Daubechies¹. Funkcje te stanowią nową rodzinę układow ortogonalnych. Ich teorii poświęcone są m. in. prace [16], [26], [92], [130]-[131] i monografie [2], [5], [23], [27], [98], [118] i [152]. Szereg prac traktuje również o ich zastosowaniach: [99]-[100], [148]-[149]. Poza dziedzinami, takimi jak geologia [58], przetwarzanie sygnałów i obrazów [17], [24], [93], [94], [110], [118], [145], medycyna [1], [126], [146], [144], chemia [38]-[39], energetyka [74], czy statystyka matematyczna [3], [65], [104], pewną liczbę zastosowań można odnaleźć również w obszarze modelowania systemów [106]. Przykładami mogą być tu aplikacje odpowiednich modeli falkowych w sterowaniu samolotami wojskowymi [12], monitorowaniu procesów technologicznych i wykrywaniu uszkodzeń [25], [76]-[77], [97], [147] i w medycynie [102], [120], [154]. Natomiast zastosowaniom falek w identyfikacji dynamicznych systemów nieliniowych o strukturze blokowej poświęcone są jedynie prace [70], [82] i [108] i częściowo [124].

Przyjęcie falek Daubechies jako podstawy modeli identyfikowanych nieliniowości wynika z następujących przesłanek:

- ² Falki te stanowią bazę ortogonalną przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem. Własność ta pozwala identyfikować z ich pomocą szeroką klasę charakterystyk nieliniowych.
- ² W odróżnieniu od innych szeregów ortogonalnych, analityczne własności algorytmów identyfikacji opartych o falek Daubechies nie zostały, jak dotąd, zbadane.

Algorytmy identyfikacji. Pojęcie „algorytmy identyfikacji” jest w pracy rozumiane dwojako:

- ² jako zbiór formuł prowadzących do uzyskania empirycznego modelu falkowego identyfikowanej charakterystyki nieliniowej, oraz
- ² jako zestaw procedur obliczeniowych, umożliwiających efektywne wyznaczenie empirycznych modeli falkowych na podstawie danych pomiarowych.

Rozróżnienie to wynika ze specyficznych własności funkcji falkowych Daubechies, które nie są dane za pomocą jawnych wzorów, ale przy pomocy formuł rekurencyjnych. Z tej przyczyny, bezpośrednie zastosowanie falkowych algorytmów identyfikacji (tj. prosta implementacja odpowiednich wzorów wykorzystujących falek Daubechies) nie jest możliwe i wymaga opracowania odpowiednich algorytmów obliczeniowych uwzględniających te cechy funkcji falkowych. Problem staje się istotny zwłaszcza przy losowym pobudzeniu wejścia systemu z powodu braku standardowych procedur obliczeniowych (zob. uwaga 1.2 w rozdziale pierwszym).

¹ Ze względu na brak polskojęzycznych publikacji dotyczących funkcji falkowych, w pracy stosujemy dosłowne tłumaczenia terminów angielskich z tej dziedziny.

Cele pracy

W pracy postawiono następujące cele:

- 2 Sformułowanie i zbadanie własności falkowych algorytmów identyfikacji charakterystyk nieliniowych.
- 2 Zaproponowanie komputerowych (obliczeniowych) algorytmów identyfikacji, opartych na prostej aproksymacji funkcji falkowych i zbadanie wpływu zastosowanej aproksymacji falek na rezultat identyfikacji.
- 2 Opracowanie sprawnych obliczeniowo algorytmów wyznaczania modeli falkowych.
- 2 Przeprowadzenie badań empirycznych. Eksperymentalne zbadanie własności algorytmów dla małej i umiarkowanej liczby pomiarów.
- 2 Eksperymentalne porównanie algorytmów falkowych z algorytmami opartymi na szeregach trygonometrycznych.

Zagadnieniom tym poświęcone są kolejne rozdziały pracy:

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe wiadomości dotyczące teorii falek. Rozdział drugi poświęcony jest przedstawieniu klasy rozpatrywanych systemów nieliniowych oraz ich schematu zastępczego. Podajemy w nim także przykładowe systemy z tej klasy i definiujemy założenia dotyczące warunków identyfikacji.

W rozdziale trzecim prezentujemy falkowe algorytmy identyfikacji oraz odpowiadające im klasy empirycznych modeli falkowych charakterystyk nieliniowych. W formie twierdzeń i wniosków przedstawiamy warunki zbieżności modeli falkowych do identyfikowanych nieliniowości, zarówno w sensie lokalnym (punktowym) jak i globalnym (całkowym), średniokwadratowo i według prawdopodobieństwa. Pokazujemy wpływ regularności (gładkości) identyfikowanych charakterystyk, funkcji gęstości prawdopodobieństwa wejścia systemu oraz cech zastosowanych w modelach funkcji falkowych na szybkość zbieżności poszczególnych modeli. W szczególności pokazujemy, że w praktycznych sytuacjach, przy braku informacji na temat gładkości identyfikowanej charakterystyki, modele falkowe zbiegają do niej, w sensie całkowego błęd średniokwadratowego, z gwarantowaną szybkością rzędu $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Na treść rozdziału czwartego składają się komputerowe algorytmy identyfikacji falkowej. Proponujemy tam, oparte na prostych aproksymacjach funkcji falkowych, obliczeniowe wersje algorytmów falkowych i pokazujemy, że (przy spełnieniu wymagań) są one asymptotycznie równoważne (pod względem warunków i szybkości zbieżności odpowiednich modeli empirycznych) algorytmom „teoretycznym”, opartym na oryginalnych funkcjach falkowych.

Wyniki teoretyczne ilustrujemy i uzupełniamy w rozdziale piątym rezultatami badań symulacyjnych. Pokazujemy w nim zachowanie modeli falkowych przy małej i umiarkowanej liczbie pomiarów, przy znanej i nieznannej funkcji gęstości wejścia systemu, dla gładkich i niegładkich charakterystyk, przy skorelowanych zakłóceniach oraz różnych typach systemów. Porównujemy także własności falkowych algorytmów z algorytmami wykorzystującymi szereg trygonometryczny.

W ostatnim rozdziale podsumowujemy uzyskane wyniki oraz przedstawiamy, naszym zdaniem ważne, poznawczo i praktycznie, zagadnienia otwarte, wymagające dalszych badań.

Rozdział 1

Falkowa analiza wielorozdzielcza

W rozdziale przedstawiamy elementy teorii falek wybrane pod kątem ich zastosowania w falkowych algorytmach identyfikacji.

W teorii falek podstawową rolę odgrywa para funkcji falkowych: $\phi(x)$, nazywana falką ojcem (ang. father wavelet) lub funkcją skalującą (ang. scaling function) oraz $\tilde{\phi}(x)$, zwana falką matką (ang. mother wavelet) ([27], [93], [98], [118] i [152]).

Przesunięcia (translacje) funkcji skalującej $\phi(x)$, tj. $\phi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x - n)$, $n \in \mathbb{Z}$, generują bazę ortonormalną przestrzeni V_0 będącej podprzestrzenią przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ funkcji całkowalnych z kwadratem

$$V_0 = \text{span} \{ \phi(x - n) ; n \in \mathbb{Z} \} \subset L^2(\mathbb{R})$$

Translacje jej skalowanych wersji

$$\phi_{mn}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{m}{2}} \phi(2^m x - n) \quad (1.1)$$

stanowią natomiast bazy ortonormalne podprzestrzeni $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$

$$V_m = \text{span} \{ \phi_{mn}(x) ; n \in \mathbb{Z} \} ; m \in \mathbb{Z}$$

formujących analizę wielorozdzielczą (ang. multiresolution analysis) przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, tj. łańcuch zagnieżdżonych podprzestrzeni

$$\dots \subset V_{j-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{m-1} \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}) \quad (1.2)$$

o następujących własnościach

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\} \quad (1.3)$$

Z (1.2) i (1.3) wynika zatem, że dowolna funkcja całkowalna z kwadratem jest, w kolejnych podprzestrzeniach V_m (tj. ze wzrostem skali m), aproksymowana z rosnącą dokładnością (rozdzielczością).

Falkami nazywamy skalowane przesunięcia pojedynczej falki-matki $\tilde{\phi}(x)$

$$\tilde{\phi}_{ml}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{m}{2}} \tilde{\phi}(2^m x - l) ; \quad l ; m \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

Podstawową cechą falek jest następująca własność

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{A}_{ml}(x) dx = 0 \quad (1.5)$$

Falki tworzą bazy ortonormalne wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeni $W_m \subset L^2(\mathbb{R})$

$$W_m = \text{span} \{ \tilde{A}_{ml}(x) ; l \in \mathbb{Z} ; m \in \mathbb{Z} \}$$

stanowiących podstawę falkowej dekompozycji przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{m=-1}^{\infty} W_m \quad (1.6)$$

Podprzestrzenie W_m są ortogonalnymi dopełnieniami podprzestrzeni V_m w łańcuchu (1.2) i zawierają elementy V_{m+1} leżące poza V_m

$$V_m \ominus W_m = V_{m+1} \quad (1.7)$$

Powyższy związek jest podstawą równoważnej z (1.6) dekompozycji $L^2(\mathbb{R})$ złożonej z podprzestrzeni typu V i W

$$L^2(\mathbb{R}) = V_M \oplus \bigoplus_{m=M}^{\infty} W_m ; \quad M \in \mathbb{Z} \quad (1.8)$$

W oparciu o tę dekompozycję, dowolną podprzestrzeń V_K , $K \in \mathbb{Z}$, można przedstawić za pomocą następującej sumy jej podprzestrzeni

$$V_K = V_M \oplus \bigoplus_{m=M}^{K-1} W_m ; \quad K > M \quad (1.9)$$

1.1 Rodzina funkcji falkowych Daubechies

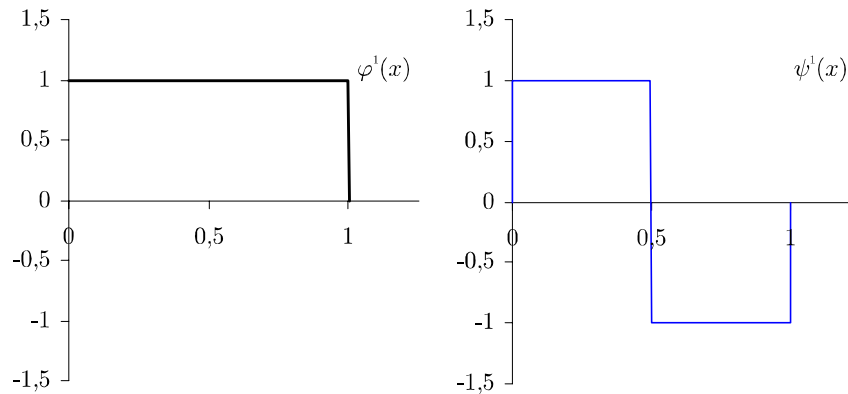
Funkcje falkowe Daubechies $\psi^p(x)$ i $\tilde{A}^p(x)$ stanowią rodzinę funkcji falkowych o zwartym nośniku. Ich własności zależą od liczby naturalnej p zwanej indeksem (numerem) falkowym.

Uwaga 1.1 Najprostszym (i chronologicznie pierwszym, zob. [60]) ich przykładem są funkcje o indeksie $p = 1$, zwane funkcjami Haara. Funkcja skalująca $\psi^1(x)$ i falka-matka Haara $\tilde{A}^1(x)$ dane są (jako jedyne w rodzinie funkcji Daubechies) prostymi wzorami (por. Rys. 1.1)

$$\psi^1(x) = I_{[0;1)}(x) \quad \text{oraz} \quad \tilde{A}^1(x) = I_{[0;\frac{1}{2})}(x) - I_{[\frac{1}{2};1)}(x) \quad (1.10)$$

gdzie $I_S(x)$ jest funkcją wskaźnikową zbioru S

$$I_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

Rys. 1.1 Funkcja skalująca $\varphi^1(x)$ i falka Haara $\psi^1(x)$

Własności funkcji falkowych Daubechies. Przedstawimy teraz własności funkcji falkowych wykorzystane w dalszej części pracy podczas konstruowania i analizy proponowanych algorytmów identyfikacji i modeli falkowych:

- ² Zwarty nośnik. Funkcje falkowe Daubechies mają zwarte nośniki o długości $2p_i - 1$

$$\text{supp } \varphi^p(x) = [0; 2p_i - 1) \quad \text{oraz} \quad \text{supp } \tilde{A}^p(x) = [1; p; p)$$

a ich skalowane translacje nośniki o długościach $\frac{2p_i - 1}{2^m}$ (por. (1.1) i (1.4))

$$\text{supp } \varphi_{mn}^p(x) = \left[\frac{n}{2^m}; \frac{n + (2p_i - 1)}{2^m} \right) \quad \text{oraz} \quad \text{supp } \tilde{A}_{ml}^p(x) = \left[\frac{l + (1 - p)}{2^m}; \frac{l + p}{2^m} \right) \quad (1.11)$$

- ² Znikające momenty. Falki Daubechies $\tilde{A}^p(x)$ posiadają p znikających momentów

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \tilde{A}^p(x) dx = \int_{1-p}^p x^k \tilde{A}^p(x) dx = 0; \quad k = 0; \dots; p - 1 \quad (1.12)$$

- ² Brak jawnych wzorów. Oprócz przypadku, gdy $p = 1$, funkcje falkowe Daubechies nie mają jawnej postaci ale stanowią granice procedur rekurencyjnych (zob. np. [26]-[27]). W pracy [130, str. 616] podano przykładowy sposób konstrukcji tych funkcji

$$\varphi_{(r)}^p(x) = \prod_{t=0}^{2^r-1} c_{t(r_i-1)}^p(2x - t) \quad \text{oraz} \quad \tilde{A}_{(r)}^p(x) = \prod_{t=i-2(p_i-1)}^{i-1} (i-1)^t c_{1+t(r_i-1)}^p(2x - t) \quad (1.13)$$

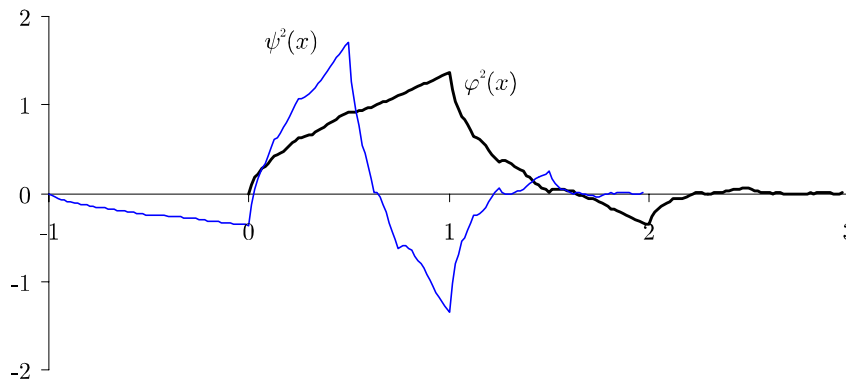
gdzie

$$\varphi_{(0)}^p = I_{[0;1)}(x)$$

We wzorach (1.13), $\{c_{t(r_i-1)}^p\}_{t=0}^{2^r-1}$ jest zbiorem współczynników Daubechies, specyficznym dla każdej rodziny funkcji $\varphi^p(x)$ i $\tilde{A}^p(x)$ (zob. np. [27]).

W Dodatku C.5, str. 137, przedstawiliśmy jedną z metod wyznaczania tych współczynników, a w znajdujących się tam tabelach C.1-C.2, zestawiliśmy ich wartości dla numerów falkowych $p = 2; \dots; 6$.

Uwaga 1.2 Przedstawiona w (1.13) metoda konstrukcji funkcji falkowych Daubechies nie pozwala (dla skończonych r) wyznaczyć wartości funkcji falkowych $\psi^p(x)$ i $\tilde{A}^p(x)$. Istniejące (osobne) procedury służące do ich wyznaczania działają poprawnie jedynie w punktach leżących na siatce binarnej (tj. w punktach o postaci $n=2^q$, gdzie $n, q \in \mathbb{Z}; q < 1$) (przykład takiej procedury, pochodzącej z pracy [131], przedstawiamy w Dodatku A.3, str. 115)



Rys. 1.2 Funkcja skalująca Daubechies $\psi^2(x)$ oraz odpowiadająca jej falka $\tilde{A}^2(x)$

Skalowane i przesuwane funkcje falkowe Daubechies $\psi^p(x)$ i $\tilde{A}^p(x)$ (por. (1.1) i (1.4))

$$\psi_{mn}^p(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi^p(2^m x - n) \quad \text{oraz} \quad \tilde{A}_{ml}^p(x) = 2^{\frac{m}{2}} \tilde{A}^p(2^m x - l) \quad (1.14)$$

generują dla każdego p , własne przestrzenie V_m^p i W_m^p , a zatem też, odmienne dla każdej z rodzin, analizy wielorozdzielcze (por. (1.2))

$$\dots V_{i-1}^p \subset V_0^p \subset V_1^p \subset \dots \subset V_{m-1}^p \subset V_m^p \subset V_{m+1}^p \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}) \quad (1.15)$$

i, odpowiadające im, falkowe dekompozycje przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ (por. (1.8))

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{m=M}^{\infty} V_m^p \oplus \bigoplus_{m=M}^{\infty} W_m^p \quad (1.16)$$

1.2 Aproksymacja falkowa

Niech $F(x)$ będzie dowolną funkcją całkowitą z kwadratem, $F(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Jej rozwinięcie w szereg falkowy, odpowiadający dekompozycji (1.16) ma postać

$$F(x) = \sum_{n=-j-1}^{\infty} \hat{c}_{Mn}^p \psi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=-j-1}^{\infty} \hat{c}_{ml}^{-p} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (1.17)$$

gdzie \hat{c}_{Mn}^p i \hat{c}_{ml}^{-p} są współczynnikami Fouriera tej funkcji, zwanymi również jej współczynnikami falkowymi (ang. wavelet coefficients), o postaciach (por. (1.11))

$$\hat{c}_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2^p-1)}{2^M}} F(x) \psi_{Mn}^p(x) dx \quad \text{oraz} \quad \hat{c}_{ml}^{-p} = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} F(x) \tilde{A}_{ml}^p(x) dx \quad (1.18)$$

Rzut ortogonalny (najlepsza aproksymacja) funkcji $F(x)$ w wybranej przestrzeni V_K^p ; $K \geq 2$, $K > M$, jest dany następująco (por. (1.9))

$$F(x; K; p) = \sum_{n=i-1}^{\infty} \hat{\alpha}_{Mn}^p \hat{\alpha}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \hat{\alpha}_{ml}^{-p} \hat{\alpha}_{ml}^p(x) \quad (1.19)$$

Pierwszy składnik $F(x; K; p)$ można traktować jako wstępne (zgrubne) przybliżenie funkcji $F(x)$, uzupełnione (w drugim ze składników) o szczegóły funkcji $F(x)$ zawarte w przestrzeniach W_m^p ; $m = M, \dots, K-1$. Na mocy twierdzenia Parsevala, błąd tej aproksymacji, w metryce przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ wynosi

$$\begin{aligned} \text{ISE } F(x; K; p) &= \|F(x) - F(x; K; p)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} [F(x) - F(x; K; p)]^2 dx = \\ &= \sum_{n=i-1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{Mn}^p)^2 + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=i-1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{ml}^{-p})^2 + \\ &= \sum_{n=i-1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{Mn}^p)^2 + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=i-1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{ml}^{-p})^2 = \\ &= \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=i-1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{ml}^{-p})^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

jest więc równy sumie kwadratów współczynników falkowych $\hat{\alpha}_{ml}^{-p}$ funkcji $F(x)$, niewykorzystanych w aproksymacji $F(x; K; p)$.

Asymptotycznie (dla K dążących do nieskończoności) otrzymujemy, dla dowolnego indeksu falkowego p , dokładną (w sensie błędu (1.20)) reprezentację funkcji $F(x)$, a zatem:

$$\text{ISE } F(x; K; p) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } K \rightarrow \infty \quad (1.21)$$

Przestrzenie V_m^p noszą nazwę przestrzeni aproksymacji (ang. approximation spaces lub resolution spaces), natomiast W_m^p często nazywane są przestrzeniami detali (szczegółów) (ang. detail spaces).

Aproksymacja falkowa w skończonym przedziale. Załóżmy teraz, że funkcja $F(x)$ znika poza pewnym skończonym przedziałem $S = [a; b]$, (zob. przykład na Rys. 1.3).

Zauważmy, że współczynniki falkowe $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^{-p}$ odpowiadające funkcjom falkowym $\hat{\alpha}_{Mn}^p(x)$ i $\hat{\alpha}_{ml}^{-p}(x)$ których nośniki leżą poza przedziałem S są równe zero, dzięki czemu szereg falkowy funkcji $F(x)$ redukuje się do postaci (por. (1.17))

$$F(x) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{\alpha}_{Mn}^p \hat{\alpha}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{l_{\max}(m;p)} \hat{\alpha}_{ml}^{-p} \hat{\alpha}_{ml}^p(x) \quad (1.22)$$

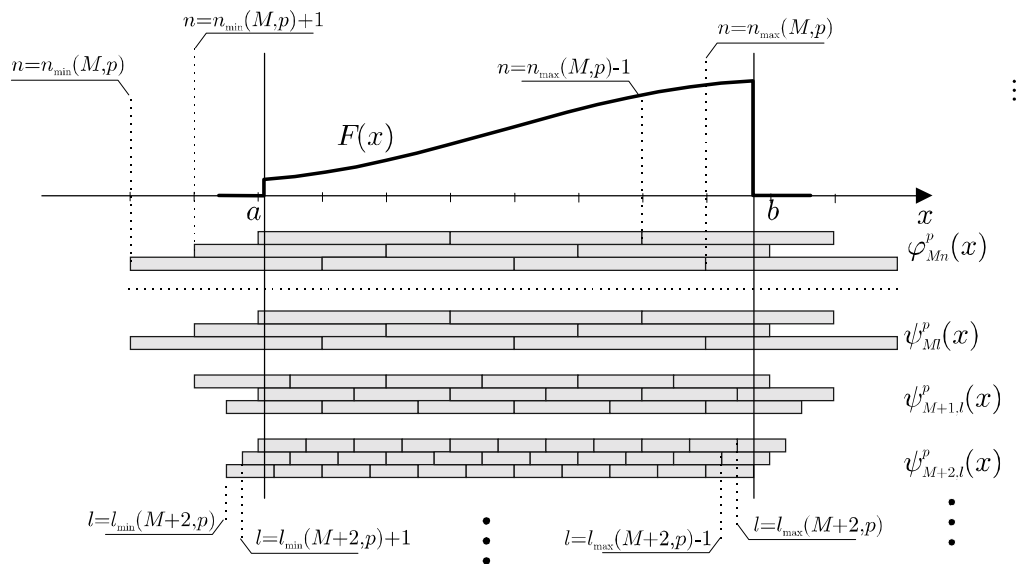
zawierającej w każdej skali m skończoną liczbę wyrazów. Granice sumowań $n_{\min}(M; p)$, $n_{\max}(M; p)$, $l_{\min}(m; p)$, $l_{\max}(m; p)$ wyznaczone są z następujących warunków

$$\begin{aligned} \frac{n + (2p - 1)}{2^M} > a & \quad \text{oraz} & \quad \frac{l + p}{2^m} > a \\ \frac{n}{2^M} < b & & \quad \frac{l + (1 - p)}{2^m} < b \end{aligned} \quad (1.23)$$

i wynoszą

$$\begin{aligned} n_{\min}(M; p) &= 2^M a_{i-2p+2}^i & \text{oraz} & & l_{\min}(m; p) &= b 2^m a_{i-p+1}^i \\ n_{\max}(M; p) &= 2^M b_{i-1}^i & & & l_{\max}(m; p) &= d 2^m b_{i-2}^i \end{aligned} \quad (1.24)$$

gdzie b_x (d_x) oznacza największą (najmniejszą) liczbę całkowitą nie większą (nie mniejszą) niż x (zob. [42, str. 87] i Dodatek A.1, str. 114).



Rys. 1.3 W rozwinięciu falkowym funkcji $F(x)$ znikającej poza przedziałem $S = [a; b]$ występują jedynie funkcje falkowe $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\tilde{\psi}_{ml}^p(x)$, $m > M$, których nośniki (przedstawione w postaci szarych prostokątów) przecinają się z tym przedziałem. Rysunek odpowiada sytuacji, gdy numer falkowy $p = 2$ (zauważmy, że nośniki poszczególnych funkcji falkowych w tej samej skali nachodzą na siebie)

W konsekwencji, aproksymacje funkcji $F(x)$ w przestrzeniach V_K^p , $K > M$; przyjmują postać (por. (1.19))

$$F(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \tilde{\psi}_{ml}^p(x) \quad (1.25)$$

i zawierają dla dowolnych skończonych skal M i K , skończoną liczbę współczynników φ_{Mn}^p i $\tilde{\psi}_{ml}^p$. Aproksymacje (1.25) stanowią podstawę do skonstruowania falkowych modeli teoretycznych w prezentowanych w pracy falkowych algorytmach identyfikacji.

1.3 Szybka transformata falkowa FWT

Pomiędzy funkcjami skalującymi a falkami Daubechies o tym samym numerze falkowym p zachodzą następujące relacje (por. (1.13))

$$\varphi^p(x) = \sum_{t=0}^{2^p-1} c_t^p \varphi(2x_j - t) \quad \text{oraz} \quad \tilde{\psi}^p(x) = \sum_{t=j-2^{(p-1)}}^{j-1} (i-1)^t c_{1i-t}^p \varphi(2x_j - t) \quad (1.26)$$

które stanowią podstawę zaproponowanego w pracy [92], algorytmu tzw. szybkiej transformaty falkowej (ang. fast wavelet transform (FWT)) służącego do wyznaczania współczynników falkowych c_{mn}^p i c_{ml}^{-p} . Algorytm ten oblicza współczynniki falkowe w skali m na podstawie współczynników z wyższej skali $m + 1$ za pomocą wzorów

$$c_{mn}^p = \sum_{t=0}^{2^i-1} c_{m+1;2n+t}^p \quad \text{oraz} \quad c_{ml}^{-p} = \sum_{t=i-2(p_i-1)}^{i-1} (i-1)^t c_{1;t}^p c_{m+1;2l+t}^p \quad (1.27)$$

Zwróćmy uwagę na następujące własności tego algorytmu, w odniesieniu do zadania wyznaczania współczynników falkowych w aproksymacjach (1.25):

- ² Algorytm nie definiuje sposobu wyznaczania współczynników początkowych c_{kn}^p (zob. np. dyskusję na ten temat w pracy [28]).
- ² Jego złożoność obliczeniowa jest funkcją liniową względem liczby współczynników c_{kn}^p , (por. np. [92], [131]).

Rozdział 2

Nieliniowe systemy o strukturze blokowej

Proponowane i badane w pracy algorytmy służą do identyfikacji nieliniowej charakterystyki elementu statycznego, będącego częścią zrozozonego systemu o strukturze blokowej. Systemy z rozważanej klasy zawierają zarówno statyczne elementy nieliniowe jak i liniowe elementy dynamiczne.

W literaturze można znaleźć szereg prac poświęconych identyfikacji tego typu systemów. W odniesieniu do zagadnienia identyfikacji charakterystyk nieliniowych, w wielu pracach na ten temat (np. [6], [8]-[11], [18], [62]-[63], [87]-[90], [103], [117], [127]) autorzy rozważają systemy, w których identyfikowana charakterystyka należy do znanej klasy funkcji o skończonej liczbie parametrów. Z tego punktu widzenia, znacznie szerszą klasę systemów, badano w pracach ([44]-[57], [70], [86], [107]-[108], [124]), w których o charakterystyce zakładano jedynie, że jest ograniczona lub całkowna z kwadratem.

2.1 Zastosowania praktyczne

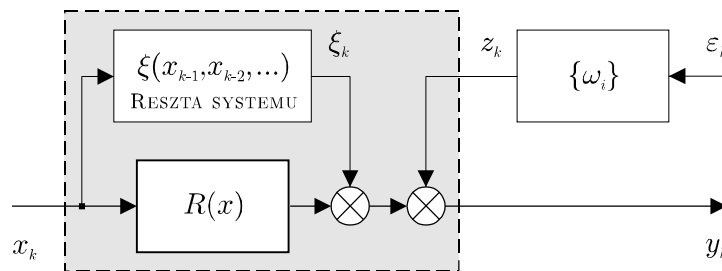
Jak wspomniano we wprowadzeniu, inspiracją dla rozwoju badań nad identyfikacją systemów o strukturze blokowej stanowi stale rosnący obszar dziedzin, w jakich pojawiają się ich zastosowania. Oprócz zastosowań w sterowaniu (zob. np. [125] i [155]), szereg aplikacji pojawiło się także w medycynie [96], biocybernetyce [59], [75] i chemii [36]. Kolejnymi przykładami mogą być: praca [143], w której przedstawiono zastosowania systemów o strukturze blokowej do opisu pojedynczych komórek nerwowych (neuronów) oraz ich części (m. in. synaps, zob. Rys. 2.5), jak również komórek receptorowych zmysłu słuchu; czy też prace [78], [83], [105], w których systemy Hammersteina są wykorzystywane w dynamicznych sztucznych sieciach neuronowych. Omawiane systemy stanowią również podstawę modeli urządzeń stosowanych w przemyśle spożywczym (np. kolumn rektyfikacyjnych, zob. np. [19]). Należy także odnotować ich zastosowania w przetwarzaniu sygnałów [54], [55] i [101].

2.2 System zastępczy. Warunki identyfikacji

Klasę rozważanych w pracy nieliniowych systemów dynamicznych o strukturze blokowej (Rys. 2.1) można opisać za pomocą ogólnego równania zastępczego (por. [108])

$$y_k = R(x_k) + \sum_{i=1}^n (x_{k-i}) + z_k \quad (2.1)$$

W równaniu tym wyodrębniamy identyfikowaną nieliniowość $R(x)$, natomiast pozostałą część systemu traktujemy jako źródło zakłóceń $f_k = \sum_{i=1}^n (x_{k-i})$ (por. np. [48]), oddziaływające wraz z zakłóceniami pomiarowymi $f_{z,k}$ na jej wyjście. Szczegółowa postać zakłóceń f_k zależy od struktury identyfikowanego systemu, w ogólności jednakże, przy losowym pobudzeniu, stanowią one ciąg skorelowanych zmiennych losowych.



Rys. 2.1 Schemat zastępczy klasy nieliniowych systemów dynamicznych o strukturze blokowej

Algorytmy proponowane w niniejszej pracy identyfikują nieliniowość $R(x)$ na podstawie dostępnego zbioru pomiarów wejścia-wyjścia systemu $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$. Pokazemy, że z tego powodu identyfikowana nieliniowość $R(x)$ z Rys. 2.1 (wzór (2.1)) jest, w ogólności, przesunięta i przeskalowana wersja oryginalnych charakterystyk elementów nieliniowych w tych systemach.

O systemie i warunkach identyfikacji przyjmujemy w pracy następujące założenia:

- Z1. Wejście systemu jest pobudzane ciągiem niezależnych zmiennych losowych $f_{x,k}$ o jednakowym rozkładzie. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wejścia $f(x)$ istnieje oraz jest dodatnia i ograniczona dla wszystkich x należących do pewnego przedziału $S = [a; b]$ i równa 0 poza nim:

$$0 < f(x) \leq M_f < 1; \quad x \in S \quad (2.2)$$

dla pewnych, nieznanych $\pm; M_f > 0$.

- Z2. Nieliniowość $R(x)$ jest ograniczona dla x z przedziału $S = [a; b]$

$$|R(x)| \leq M_R < 1; \quad x \in S \quad (2.3)$$

- Z3. Sygnały $f_{z,k}$, pochodzący od systemu, można przedstawić za pomocą ogólnej formuły

$$f_{z,k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^3(x_{k-i}) \quad (2.4)$$

gdzie $\alpha_i^3(x)$ jest nieliniowością pasywną, będącą (nieznana) funkcją ograniczoną dla każdego $x \in S = [a; b]$

$$|\alpha_i^3(x)| \leq M_{\alpha_i} < 1; \quad x \in S$$

i dla której zachodzi $E^3(x_1) = 0$. Ciąg $f_{i,j}$ jest (również nieznaną) odpowiedzią impulsową liniowego układu dynamicznego, o którym zakładamy, że jest asymptotycznie stabilny, $\sum_{i=1}^{\infty} |f_{i,j}| < 1$. Odpowiednie przykłady podane są w punkcie 2.3.

- Z4. Zakłócenie pomiarowe $f_{k,2Z}$ stanowi wyjście nieznanego elementu (podsystemu) dynamicznego, o odpowiedzi impulsowej $f_{i=0}^1$, asymptotycznie stabilnego, $\sum_{i=0}^{\infty} |f_{i,j}| < 1$ i pobudzanego białym szumem $f_{k,2Z}$ o zerowej wartości oczekiwanej, $E^1 = 0$, i skończonej wariancji, $\text{var}^1 < 1$

$$z_k = \sum_{i=0}^{\infty} f_{k,i} x_{k,i}$$

- Z5. Procesy $f_{k,g}$ i $f_{k,g}^1$, a zatem też $f_{k,g}$ i $f_{k,g}$, są wzajemnie niezależne.

- Z6. Sygnały interakcyjne łączące poszczególne elementy systemu, podobnie jak zakłócenia $f_{k,g}$ i $f_{k,g}$, są niedostępne dla pomiaru.

Przy tak sformułowanych założeniach ogólne równanie zastępcze (2.1) przyjmuje postać

$$y_k = R(x_k) + \sum_{i=1}^{\infty} f_{k,i}^3(x_{k,i}) + \sum_{i=0}^{\infty} f_{k,i}^1 x_{k,i} \quad (2.5)$$

Zwróćmy uwagę, że przedstawione powyżej założenia stawiają niewielkie wymagania co do zakresu wstępnej wiedzy o charakterystykach poszczególnych elementów systemu. Założenie Z2 obejmuje praktycznie dowolną charakterystykę, jaką można spotkać w zastosowaniach, a wraz z założeniami Z1 i Z4, dotyczy sytuacji, w których identyfikacja ma miejsce:

- 2 podczas normalnej pracy systemu w stanie ustalonym (w trakcie tzw. eksperymentu biernego),
- 2 w warunkach losowych, tj. przy losowym pobudzeniu wejść systemu i losowym charakterze (niemierzalnych) zakłóceń pomiarowych działających na jego wyjście,
- 2 przy pomocy urządzeń o ograniczonym zakresie pomiarowym (np. woltomierze, światłomierze, termometry).

Podobnie ogólny charakter ma założenie Z3, które dotyczy dynamicznej części identyfikowanego systemu i nakłada tylko wymaganie, aby była ona asymptotycznie stabilna.

Uwaga 2.3 Przy założeniach Z1-Z5, x_k , y_k , z_k i, w konsekwencji także y_k , są stacjonarnymi (w szerszym sensie) procesami losowymi drugiego rzędu, tj. dla każdego z nich istnieje stała wartość średnia, ograniczona wariancja oraz funkcja autokowariancji zależna tylko od odległości w czasie pomiędzy poszczególnymi realizacjami każdego z procesów (zob. np. [153, str. 64] i por. [108, str. 948]).

2.3 Przykłady systemów o strukturze blokowej

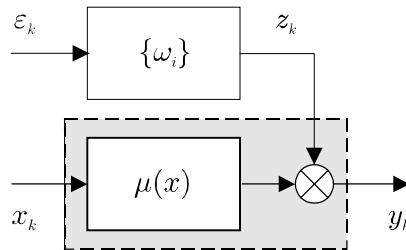
Przedstawimy teraz przykładowe systemy o strukturze blokowej i dla każdego z nich wyznaczymy postać równania zastępczego (2.5) oraz warunki potrzebne do spełnienia założeń Z2-Z3. W sposób szczególny zbadamy związki pomiędzy nieliniowością $R(x)$ a charakterystykami nieliniowymi elementów statycznych tych systemów.

2.3.1 System statyczny

Jest to najprostszy z systemów (Rys. 2.2) należących do rozważanej klasy, w którym $\tau_k \approx 0$. Dla tego systemu równanie zastępcze (2.5) redukuje się do postaci

$$y_k = f_0(x_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i f_i(x_k) \quad (2.6)$$

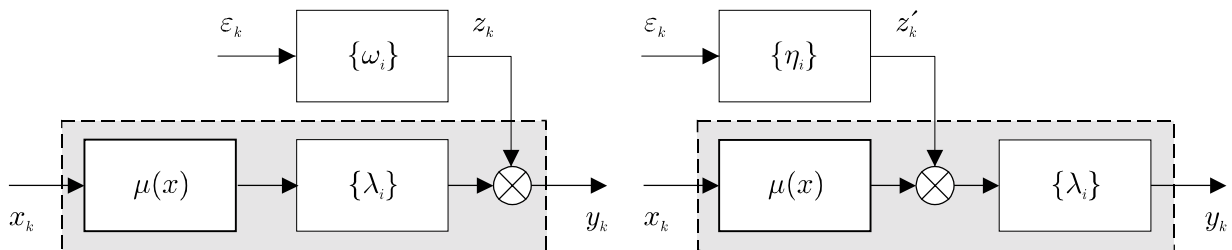
i nieliniowość $R(x)$ w systemie zastępczym jest równa charakterystyce $f_0(x)$.



Rys. 2.2 System statyczny

2.3.2 System Hammersteina

W przedstawionych systemach Hammersteina (Rys. 2.3) nieliniowy element statyczny o charakterystyce $f_0(x)$ łączy się w kaskadzie z liniowym elementem dynamicznym o odpowiedzi impulsowej $f_{s,i} g_{i=0}^{-1}$.



Rys. 2.3 System Hammersteina: a) z zakłóceniami na wyjściu systemu, b) z zakłóceniami na wyjściu elementu nieliniowego

System z Rys. 2.3a można opisać za pomocą poniższego równania (por. (2.6))

$$y_k = f_0(x_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i f_i(x_k)$$

z którego, po przekształceniu do postaci

$$y_k = f_0(x_k) + E^{-1}(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i [f_i(x_k) - E^{-1}(x_1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i f_i(x_k) \quad (2.7)$$

otrzymujemy w równaniu zastępczym (2.5), że

$$R(x) = f_0(x) + s \quad \text{oraz} \quad \hat{R}(x) = f_0(x) + E^{-1}(x_1), \quad \text{gdzie } s = E^{-1}(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \quad (2.8)$$

Aby system spełniał założenia Z2-Z3 potrzeba zatem, aby $\rho_j^1(x) < 1$, dla $x \in S$, $\rho_j^1(x) < 1$ oraz $\rho_{ij}^1(x) < 1$.

W wersji systemu z Rys. 2.3b na wyjście elementu nieliniowego $\rho^1(x)$ działają skorelowane zakłócenia zewnętrzne $z_k^0 = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{ki}^1 z_{ki}^0$. Otrzymujemy teraz, że

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{ki}^1(x_{ki}) + \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{ki}^1 z_{ki}^0$$

skąd, po przekształceniach, mamy (por. (2.7))

$$y_k = \rho_{k0}^1(x_k) + E^{-1}(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{ki}^1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{ki}^1 [E^{-1}(x_1)]^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{kj}^1 \rho_{ji}^1 z_{ki}^0$$

a zatem, podobnie jak poprzednio (por. (2.8)), dostajemy, że

$$R(x) = \rho_{k0}^1(x) + s \quad \text{oraz} \quad \rho^3(x) = \rho^1(x) + E^{-1}(x_1) s, \quad \text{gdzie } s = E^{-1}(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{ki}^1 \quad (2.9)$$

Zakłócenia zewnętrzne z_k przyjmują natomiast postać (por. założenie Z4)

$$z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{ki}^1 z_{ki}^0, \quad \text{gdzie} \quad \rho_{ij}^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{ij}^1 z_{ij}^0$$

W stosunku do wymagań stawianych systemowi Hammersteina z Rys. 2.3a, zakładamy dodatkowo, że element dynamiczny z odpowiedzią $f_i^1(x)$ jest asymptotycznie stabilny, tj., że $\rho_{ij}^1(x) < 1$.

Uwaga 2.4 Ze wzorów (2.8) oraz (2.9) wynika, że dla systemów Hammersteina nieliniowość $R(x)$ w równaniu zastępczym (2.5) nie jest równa charakterystyce elementu statycznego $\rho^1(x)$, ale stanowi jej skalowaną i przesuniętą wersję

$$R(x) = \rho_{k0}^1(x) + s \quad (2.10)$$

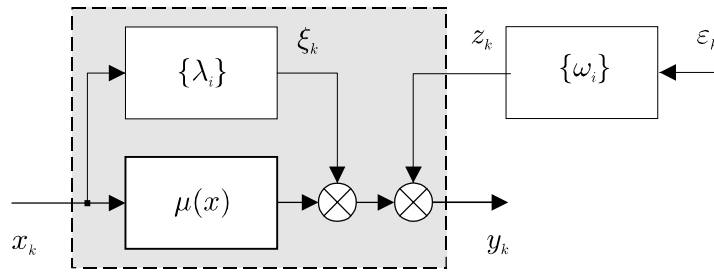
gdzie parametr ρ_{k0}^1 i przesunięcie s są stałymi zaleznymi od systemu. Taka relacja pomiędzy prawdziwą charakterystyką $\rho^1(x)$ a identyfikowaną nieliniowością $R(x)$ jest konsekwencją złożonej struktury systemu i przyjętych w założeniu Z6 ograniczeń pomiarowych. Tożsamość $R(x) = \rho^1(x)$ zachodzi tylko w szczególnych wypadkach, gdy $\rho_{k0}^1 = 1$ oraz np. gdy charakterystyka $\rho^1(x)$ i funkcja gęstości wejścia $f(x)$ są odpowiednio, nieparzyste i symetryczne względem środka przedziału S (wówczas $E^{-1}(x_1) = 0$, a stała $s = 0$).

2.3.3 System równoległy

W poniższym przykładzie, system stanowi połączenie równoległe nieliniowego elementu statycznego z dynamicznym podsystemem liniowym (Rys. 2.4)

Jego równanie ma postać (por. (2.6) i (2.7))

$$y_k = \rho^1(x_k) + \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{ki}^1 x_{ki} + \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{ki}^1 z_{ki}^0 \quad (2.11)$$



Rys. 2.4 Przykład systemu o strukturze równoległej

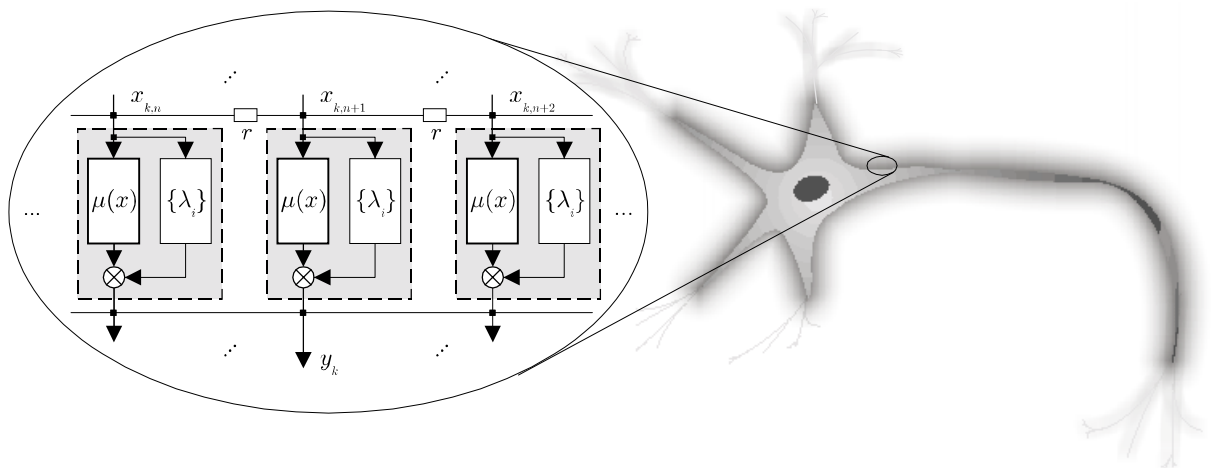
Zakładając teraz, że $\tau_0 = 0$ (tj. że podsystem dynamiczny wnosi opóźnienie) otrzymujemy, że

$$y_k = f^1(x_k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i x_{k-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \omega_i x_{k-i} = f^1(x_k) + E x_1 + \sum_{i=1}^p \lambda_i x_{k-i} + E x_1 + \sum_{i=0}^{p-1} \omega_i x_{k-i}$$

W rezultacie, w równaniu (2.5) nieliniowości $R(x)$ i $f^3(x)$ są dane następująco (por. (2.8))

$$R(x) = f^1(x) + s \quad \text{oraz} \quad f^3(x) = x_j + E(x_1), \quad \text{gdzie } s = E x_1 + \sum_{i=1}^p \omega_i \quad (2.12)$$

Dla spełnienia założeń Z2-Z3 należy przyjąć, że $|f^1(x)| < 1$ dla $x \in S$ oraz $\sum_{i=1}^p |j_{s,i}| < 1$. Natomiast warunek $|j^3(x)| < 1$ jest spełniony na mocy założenia Z1 (tj. zerowania się funkcji gęstości wejścia $f(x)$ poza przedziałem S).



Rys. 2.5 Dynamiczne systemy nieliniowe o strukturze równoległej stosowane są przy modelowaniu powierzchni komórek nerwowych [143, str. 94]

Uwaga 2.5 Nieliniowość $R(x)$ jest równa charakterystyce $f^1(x)$ jedynie w szczególnych przypadkach, gdy $s = 0$ (np. jeśli $E x_1 = 0$ lub $\sum_{i=1}^p \omega_i = 0$). W przypadku gdy $\tau_0 \neq 0$ (tj.

gdy w podsystemie dynamicznym nie występuje opóźnienie), zależność (2.11) komplikuje się i przybiera postać

$$y_k = \gamma_0(x_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(x_k) + E \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(x_{k-1}) + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \gamma_i(x_{k-1})$$

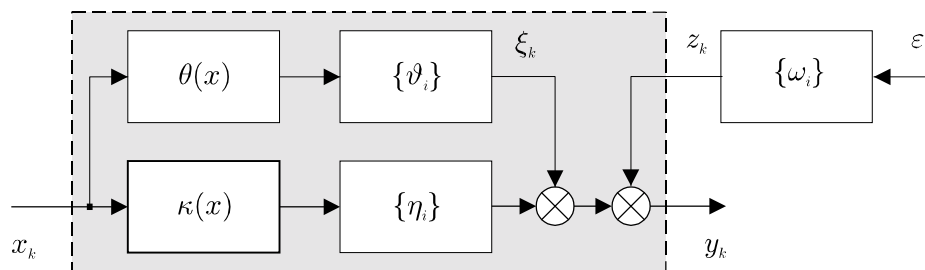
Wtedy, nawet jeśli $s = 0$, to nieliniowość $R(x)$ pozostaje zniekształcona w stosunku do charakterystyki $\gamma_0(x)$ przez liniowy składowik $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x$

$$R(x) = \gamma_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x$$

W sytuacji, gdy $\beta_0 = 1$, można w celu identyfikacji $\gamma_0(x)$ skorzystać z faktu, że $\gamma_0(x) = R(x) - x$.

2.3.4 System szeregowo-równoległy

Jest to system z Rys. 2.6, będący uogólnieniem systemów przedstawionych poprzednio.



Rys. 2.6 Przykład systemu szeregowo-równoległego z dwoma elementami nieliniowymi o charakterystykach $\theta(x)$ i $\mu(x)$

Liniowe podsystemy dynamiczne w obu gałęziach mają odpowiedzi impulsowe, odpowiednio, f_{i0} i $f_{i\#0}$ i zakładamy, że w gałęzi górnej występuje opóźnienie, tj. $\beta_0 = 0$. Wyjście takiego systemu można opisać następującym równaniem (por. (2.6), (2.7) i (2.11))

$$y_k = \gamma_0(x_k) + E \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(x_{k-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \gamma_i(x_{k-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} f_{i0} [\gamma_i(x_{k-1}) + E \gamma_i(x_{k-2})] + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \gamma_i(x_{k-1}) + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \gamma_i(x_{k-1}) \quad (2.13)$$

Nieliniowość $R(x)$ w równaniu zastępczym (2.5) ma teraz postać (por. (2.8) i (2.12))

$$R(x) = \gamma_0(x) + s; \quad s = E \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(x_{k-1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \gamma_i(x_{k-1}) \quad (2.14)$$

Jeśli zachodzi odwrotna sytuacja (opóźnienie istnieje w gałęzi dolnej, tj. $\beta_0 = 0$ oraz $\beta_{\#0} \neq 0$), to wówczas

$$R(x) = \beta_{\#0} \mu(x) + s$$

Gdy równocześnie $\epsilon_0 \neq 0$ oraz $\#_0 \neq 0$, to nieliniowość $R(x)$ jest równa wazonej i przesuniętej sumie obu charakterystyk nieliniowych

$$R(x) = \epsilon_0 \cdot (x) + \#_0 \mu(x) + s$$

Aby przedstawić zakłócenia f_k w postaci jak w zażyczeniu Z3, skorzystamy z następującej notacji wektorowej (zob. [108])

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= [\epsilon_i; \#_i] \\ \epsilon^3(x) &= [\cdot(x); E \cdot(x_1); \mu(x); E \mu(x_1)] \end{aligned}$$

dzięki której otrzymujemy, że

$$y_k = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^T(x_{k_i}) \quad (2.15)$$

Z (2.14) i (2.15) wynika, że zażyczenia Z2-Z3 są spełnione, gdy $\sum_{i=1}^3 \epsilon_i^T(x_{k_i}) < 1$ dla $x \in S$ oraz $\sum_{i=1}^3 \epsilon_i^T(x_{k_i}) < 1$ i $\sum_{i=1}^3 \epsilon_i^T(x_{k_i}) < 1$.

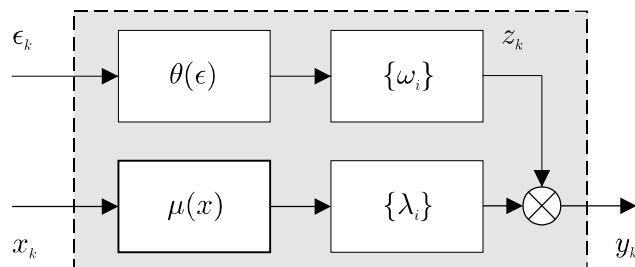
2.3.5 System o wielu wejściach (MISO)

Zażyczenie Z4 dotyczące zakłóceń zewnętrznych jest natury ogólnej. Nie formułuje się w nim ścisłych wymagań co do struktury korelacyjnej zewnętrznych zakłóceń (która może być dowolna), zażycząc jedynie aby zewnętrzny sygnał zakłócający z_k być (podobnie jak zakłócenie ϵ_k) stacjonarnym procesem o zerowej wartości oczekiwanej i skończonej wariancji, opisanym jak w Z4. Warunki te są spełniane przez typowe rodzaje zakłóceń:

- 2 Zakłócenia nieskorelowane (szum biały), dla których $z_k = \epsilon_k$.
- 2 Zakłócenia skorelowane (szum kolorowy), będące wyjściem asymptotycznie stabilnych elementów dynamicznych, pobudzanych przez stacjonarny biały szum ϵ_k .

O szumie ϵ_k zakłada się jedynie, że $E \epsilon_k = 0$ oraz $\text{var} \epsilon_k < 1$ (por. Z4).

Wobec dużej dowolności rozkładu z_k , równanie (2.5) może zatem posłużyć do opisu systemów o wielu stochastycznie niezależnych wejściach (systemów addytywnych względem swoich wejść – zob. np. [114, str. 170])



Rys. 2.7 System równoległy z dwoma niezależnymi wejściami

Przykład takiego systemu przedstawiony jest na Rys. 2.7. Przyjmując w nim, że wejścia z_k i x_k są stacjonarne i od siebie stochastycznie niezależne, górną gałąź systemu można

uznać za źródło skorelowanego zakłócenia, działającego na wyjście systemu Hammersteina w dolnej gałęzi. Równanie całego systemu jest teraz następujące (por. np. (2.7))

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} j^i(x_{k-i}) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i(x_{k-i})$$

Przekształcając je do postaci równania zastępczego (2.5)

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} j^i(x_k) + E^{-1}(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} j^i + E \mu^2(x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i + \sum_{i=1}^{\infty} j^i [1 - j^i(x_{k-i}) - E^{-1}(x_1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i [\mu^i(x_{k-i}) - E \mu^2(x_1)]$$

otrzymujemy, że

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} j^i(x) + s; \quad s = E^{-1}(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} j^i + E \mu^2(x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i$$

$$j^3(x) = j^1(x) - E^{-1}(x_1); \quad \mu^k = \mu^2(x_k) - E \mu^2(x_1)$$

Przyjmujemy tu, że $j^1(x) < 1$ dla $x \in S$, $\mu^1(x) < 1$, oraz że oba elementy dynamiczne są asymptotycznie stabilne, $j^0 < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} j^i < 1$ i $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i < 1$.

Podsumowanie

Przedstawiona w rozdziale klasa systemów nieliniowych obejmuje systemy o strukturze blokowej, w której można wyodrębnić element statyczny o charakterystyce nieliniowej, i w których nie występuje sprzężenie zwrotne od wyjścia systemu.

Ze względu na złożoną strukturę systemów oraz przyjęte ograniczenia pomiarowe (zakładanie Z6) obiektem identyfikacji nie jest oryginalna charakterystyka elementu statycznego, ale ogólnie nieliniowość $R(x)$ stanowiąca jej przesuniętą i przeskalowaną wersję. Ze względu na szeroki obszar, w jakim rozważana klasa systemów znajduje swoje zastosowania (zob. przykłady w punkcie 2.1), ważna wydaje się być jednakże możliwość identyfikacji nawet przybliżonych w powyższym sensie charakterystyk nieliniowych systemów, za to w warunkach bardzo małej wiedzy wstępnej, zarówno o własnościach samych charakterystyk jak i pozostałych elementów systemu oraz przy ograniczonych możliwościach pomiarów w systemie (por. [45]). Przyjęte przez nas założenia Z1-Z6 odpowiadają takim wymaganiom.

Rozdział 3

Falkowe algorytmy identyfikacji

W rozdziale prezentujemy i badamy falkowe algorytmy identyfikacji nieliniowości $R(x)$ w systemie zastępczym przedstawionym na Rys. 2.1 w rozdziale drugim. Proponowane algorytmy prowadzą do wyznaczenia empirycznych modeli falkowych, opartych o falkowe aproksymacje identyfikowanych nieliniowości (por. wzór (1.25) w punkcie 1.2). Algorytmy te mogą znaleźć zastosowanie przede wszystkim w sytuacjach, gdy wiedza wstępna na temat identyfikowanej nieliniowości jest niewielka (gdy np. wiadomo jedynie, że nieliniowość jest ograniczona) (por. też np. [43]-[57], [70], [86], [107]-[108], [112]-[113], [116], [124]).

Stosowane często w takich wypadkach tradycyjne algorytmy identyfikacji wykorzystujące modele będące wielomianami o arbitralnie przyjętym stopniu (zob. np. [8]-[9], [87], [103] czy też [127]) w naturalny sposób ograniczają klasę nieliniowości, dla której mogą zbiegać, do zbioru charakterystyk wielomianowych stopnia nie wyższego niż wybrany. Natomiast przedstawiane algorytmy falkowe (podobnie jak i inne algorytmy identyfikacji, wykorzystujące modele oparte na szeregach ortogonalnych) pozwalają (asymptotycznie) odkryć dowolne – w praktyce – nieliniowości, znacząco poszerzając klasę możliwych do identyfikacji charakterystyk, a tym samym, dziedzinę potencjalnych zastosowań.

Własności asymptotyczne (warunki i szybkość zbieżności) algorytmów ortogonalnych badano dotąd m.in. dla szeregów Fouriera [44], [50], [56], [86], Hermite'a [44], [50], [55], Laguerre'a [46], Legendre'a [54] i Czebyszewa [112].

W pracy [44] zauważono, że asymptotyczne własności algorytmów ortogonalnych, uzyskane wcześniej dla systemów statycznych w [50], nie ulegają zmianie, gdy identyfikowana nieliniowość (jej wersja) jest charakterystyką statycznego elementu nieliniowego w systemie Hammersteina, a w pracy [108] uogólniono tę obserwację na szerszą klasę zozonowanych systemów o strukturze blokowej (obejmującej, oprócz wspomnianego wyżej systemu Hammersteina, również prezentowane w rozdziale drugim systemy równoległe i o strukturze mieszanej).

Algorytmy falkowe z funkcjami falkowymi Haara badano w pracach [70] i [108]. W niniejszej pracy, algorytmy identyfikacji wykorzystują dowolne funkcje falkowe Daubechies, podobnie jak wcześniej w [49], [71]-[72] i [109], jednak w zastosowaniu do innych algorytmów. Rozpatruje się trzy typy algorytmów i wynikające z nich klasy empirycznych modeli falkowych. Dwa z nich (algorytm ilorazowy i algorytm bezpośredni) znajdują zastosowanie w sytuacjach, w których funkcja gęstości wejścia systemu jest znana, trzeci (algorytm

ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia) dotyczy przypadku, gdy tej funkcji nie znamy.

A. Znana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu

3.1 Algorytm ilorazowy

Podstawa teoretyczna. W przypadku znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wejścia $f(x)$ klasa teoretycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$, stanowiąca podstawę do skonstruowania algorytmu identyfikacji, składa się z modeli opartych o zaproponowaną w pracy [50] faktoryzację nieliniowości $R(x)$

$$R(x) = \frac{G(x)}{f(x)}; \quad \text{gdzie } G(x) \stackrel{\text{def}}{=} R(x) \cdot f(x) \quad (3.1)$$

Modele z tej klasy (otrzymywane dla różnych p) dane są następującym ilorazem

$$R_G(x; K; p) = \frac{G(x; K; p)}{f(x)} \quad (3.2)$$

w którym $G(x; K; p)$ (dla danego K i p) jest teoretycznym modelem falkowym (aproxymacją) funkcji $G(x)$ (por. wzór (1.25) w punkcie 1.2)

$$G(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \mathbb{R}_{Mn}^p \cdot \mathbb{P}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \mathbb{P}_{ml}^{-p} \tilde{\mathbb{A}}_{ml}^p(x) \quad (3.3)$$

o współczynnikach \mathbb{R}_{Mn}^p i \mathbb{P}_{ml}^{-p} równych współczynnikom jej rozwinięcia w szereg falkowy (por. wzór (1.18) w punkcie 1.2)

$$\mathbb{R}_{Mn}^p = \frac{\int_{\mathcal{X}} \frac{n+(2p-1)}{2^M} G(x) \cdot \mathbb{P}_{Mn}^p(x) dx}{\int_{\mathcal{X}} \frac{n}{2^M} G(x) \cdot \mathbb{P}_{Mn}^p(x) dx} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}_{ml}^{-p} = \frac{\int_{\mathcal{X}} \frac{l+p}{2^m} G(x) \tilde{\mathbb{A}}_{ml}^p(x) dx}{\int_{\mathcal{X}} \frac{l+(1-p)}{2^m} G(x) \tilde{\mathbb{A}}_{ml}^p(x) dx} \quad (3.4)$$

Granice sumowań w modelu (3.3) wynoszą (por. (1.24))

$$\begin{aligned} n_{\min}(M; p) &= \sum_{i=1}^M a_i \cdot 2p + 2 & \text{oraz} & \quad l_{\min}(m; p) = b \cdot 2^m \cdot a_i \cdot p + 1 \\ n_{\max}(M; p) &= \sum_{i=1}^M b_i \cdot 1 & & \quad l_{\max}(m; p) = d \cdot 2^m \cdot b_e \cdot p + 2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie a ; b są granicami przedziału S .

Algorytm identyfikacji. Modele empiryczne. Zadaniem algorytmu identyfikacji jest wyznaczenie empirycznego modelu falkowego nieliniowości $R(x)$ na podstawie zbioru pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ wejścia i wyjścia systemu (por. punkt 2.2 w rozdz. 2). Wobec znajomości funkcji gęstości $f(x)$ oraz teoretycznej postaci modelu falkowego (wzory (3.2)-(3.3)) zadanie to sprowadza się do oszacowania (estymacji) nieznanych (przy nieznaności $R(x)$) współczynników \mathbb{R}_{Mn}^p i \mathbb{P}_{ml}^{-p} modelu $G(x; K; p)$ (dla dowolnego p) w oparciu o

pomiary $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$. Opierając się na znanym spostrzeżeniu, że przy założeniach Z1-Z5 współczynniki modeli $G(x; K; p)$ są równe przedstawionym poniżej wartościom oczekiwanym (zob. np. [44], [50], [104] lub [108])

$$\Theta_{Mn}^p = E[y_1^p \tilde{A}_{Mn}^p(x_1)] \quad \text{oraz} \quad \Delta_{ml}^p = E[y_1 \tilde{A}_{ml}^p(x_1)] \quad (3.6)$$

możemy je oszacować za pomocą prostych estymatorów

$$\hat{\Theta}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^p \tilde{A}_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{\Delta}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \tilde{A}_{ml}^p(x_k) \quad (3.7)$$

otrzymując w ten sposób klasę (dla różnych p) estymatorów falkowych (empirycznych modeli falkowych) nieliniowości $R(x)$, odpowiadających klasie modeli teoretycznych (3.2)-(3.3):

$$\hat{R}_G(x; K; p) = \frac{\hat{G}(x; K; p)}{f(x)} \quad (3.8)$$

gdzie

$$\hat{G}(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \Theta_{Mn}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{m=1} \Delta_{ml}^p \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.9)$$

jest empirycznym modelem falkowym funkcji $G(x)$.

Prowadzi to do sformułowania następującego algorytmu identyfikacji (algorytm tego typu dla innych układów funkcji ortogonalnych badany był w [43], natomiast dla falek w [72]):

Algorytm ilorazowy:

Krok 1. Na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\hat{\Theta}_{Mn}^p$ oraz $\hat{\Delta}_{ml}^p$ według wzorów (3.7):

Krok 2. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (3.8), z licznikiem danym przez (3.9).

Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$, dla różnych p , sprowadza się do zbadania własności modelu $\hat{G}(x; K; p)$ w liczniku zależności (3.8).

3.1.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$

Zbieżność oszacowań $\hat{\Theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\Delta}_{ml}^p$

Warto zauważyć, że na mocy założeń Z3-Z5, estymatory $\hat{\Theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\Delta}_{ml}^p$ dane wzorem (3.7) są nieobciążone

$$E \hat{\Theta}_{Mn}^p = \Theta_{Mn}^p \quad \text{oraz} \quad E \hat{\Delta}_{ml}^p = \Delta_{ml}^p \quad (3.10)$$

Ponadto, dla ich wariancji zachodzą następujące nierówności

$$\text{var} \hat{\Theta}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{var} \hat{\Delta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \quad (3.11)$$

gdzie A_{var} , B_{var} oraz A_{cov} i B_{cov} są dodatnimi stałymi, zależnymi od części dynamicznej systemu i charakteru zewnętrznych zakłóceń (zob. (B.13) i (B.14) w Dodatku B.1, str. 116-120).

Z własności (3.10) i (3.11) wnioskujemy zatem, że:

Lemat 3.1 Współczynniki $\hat{\Theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\Delta}_{ml}^p$ modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ zbiegają średniokwadratowo do współczynników Θ_{Mn}^p i Δ_{ml}^p modeli teoretycznych $G(x; K; p)$ wraz z rosnącą liczbą pomiarów N . Ponadto

$$\text{MSE } \hat{\Theta}_{Mn}^p = E (\hat{\Theta}_{Mn}^p - \Theta_{Mn}^p)^2 = E (E \hat{\Theta}_{Mn}^p - \Theta_{Mn}^p)^2 = \text{var } \hat{\Theta}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}})$$

oraz

$$\text{MSE } \hat{\Delta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}})$$

Należy podkreślić, że otrzymane wyżej oszacowania nie zależą od (patrz Dodatek B.1):

- V1. Skorelowania zakłóceń zewnętrznych z_k .
- V2. Struktury identyfikowanego systemu (z klasy rozwiązanych systemów).
- V3. Regularności identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$.

A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$

Dekomponując błąd średniokwadratowy modelu $\hat{G}(x; K; p)$ w ustalonym punkcie x

$$\begin{aligned} \text{MSE } \hat{G}(x; K; p) &= E \left(G(x) - E \hat{G}(x; K; p) \right)^2 + E \left(\hat{G}(x; K; p) - E \hat{G}(x; K; p) \right)^2 = \\ &= \left(G(x) - E \hat{G}(x; K; p) \right)^2 + E \left(\hat{G}(x; K; p) - E \hat{G}(x; K; p) \right)^2 = \\ &= \text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) + \text{var } \hat{G}(x; K; p) \end{aligned} \quad (3.12)$$

otrzymujemy dwa składniki błędu modelu: kwadrat obciążenia, $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p)$ (wynikający z niedoskonałości teoretycznego modelu falkowego $G(x; K; p) = E \hat{G}(x; K; p)$) – jedynie aproksymującego, dla skończonych skal K , funkcji $G(x)$ i wariancję $\text{var } \hat{G}(x; K; p)$, będącą konsekwencją losowej natury współczynników $\hat{\Theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\Delta}_{ml}^p$ (pomiarów $f(x_k; y_k)$).

Wariancja wyjścia modelu $\text{var } \hat{G}(x; K; p)$. Z (3.10) wynika, że modele empiryczne $\hat{G}(x; K; p)$ – dla poszczególnych K i p – są nieobciążonymi estymatorami modeli teoretycznych $G(x; K; p)$

$$E \hat{G}(x; K; p) = G(x; K; p) \quad (3.13)$$

i w konsekwencji

$$\text{var } \hat{G}(x; K; p) = E \left(\hat{G}(x; K; p) - G(x; K; p) \right)^2$$

Stąd oraz z obliczeń przedstawionych w Dodatku B.2 (str. 120) otrzymujemy, że w każdym punkcie $x \in S$ wariancja wyjścia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K; p)$ spełnia nierówność

$$\text{var } \hat{G}(x; K; p) \leq \frac{2^K}{N} C_{\text{var}} \quad (3.14)$$

gdzie C_{var} jest dodatnią stałą określoną w Dodatku B.2. Zależy ona od dynamiki systemu i działających zakłóceń. Wnioskujemy zatem, że rząd wariancji $\text{var } \hat{G}(x; K; p)$ zależy jedynie od liczby pomiarów N i przyjętych skal K modeli (por. własności V1-V3, str. 29).

Obciążenie $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p)$. Ze względu na (3.13) kwadrat obciążenia wyjścia modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie x jest równy kwadratowi błędowi aproksymacji w tym punkcie funkcji $G(x)$ za pomocą jej falkowych modeli teoretycznych $G(x; K; p)$:

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) = \int_{\mathcal{H}} G(x) - E \hat{G}(x; K; p) \Big|_2^2 = [G(x) - G(x; K; p)]^2 \quad (3.15)$$

Ma on zatem, w przeciwieństwie do wariancji, przyczyny natury deterministycznej i nie zależy od liczby pomiarów N . Błąd ten maleje do zera, ze wzrostem skali K , w tych punktach x , w których funkcja $G(x)$ jest ciągła (zob. [80, twierdzenie 2.1]), tj. gdy np. jednocześnie nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ są ciągłe,

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) \rightarrow 0 \text{ dla } K \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{G}(x; K; p)$

Z (3.14) wynika, że w ustalonej skali K i przy rosnącej liczbie pomiarów N znikająca losowa, wyrażana przez wariancję i w konsekwencji błąd średniokwadratowy modelu $\hat{G}(x; K; p)$ staje się (asymptotycznie) równy kwadratowi obciążenia

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K; p) \rightarrow \text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) \text{ dla } N \rightarrow \infty; K = \text{const} \quad (3.17)$$

Dalsza poprawa dokładności modelu wymaga zatem zredukowania obciążenia poprzez zwiększenie skali K we wzorze (3.9) (por. (3.16)). Postępowanie takie, przy ustalonej liczbie pomiarów N , prowadzi jednakże do wzrostu składowej wariancji, a tym samym zwiększenia błędów $\text{MSE} \hat{G}(x; K; p)$ (sądząc po oszacowaniu (3.14))

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K; p) \rightarrow \infty \text{ dla } K \rightarrow \infty; N = \text{const} \quad (3.18)$$

Takie przeciwstawne (ze względu na parameter K skali modelu) zachowanie się obu składowych błędów średniokwadratowego (3.12) cechuje również algorytmy identyfikacji oparte o inne szeregi ortogonalne (zob. np. [50]). Jego rozwiązaniem jest uzależnienie szybkości wzrostu skali K od liczby pomiarów N , tak aby jednocześnie spełnione były ogólne warunki (por. np. [50], [70], [108])

$$K = K(N) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{2^{K(N)}}{N} \rightarrow 0 \text{ dla } N \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

Dzięki temu, wraz ze wzrostem liczby pomiarów znikają obie składowe błędy średniokwadratowego modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ i modele te zbiegają do wartości funkcji $G(x)$ w każdym punkcie jej ciągłości, w przedziale $S = [a; b]$. Otrzymaliśmy zatem następujący lemat:

Lemat 3.2 Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ są ciągłe w punkcie $x \in S = [a; b]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki

$$K = K(N) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{2^{K(N)}}{N} \rightarrow 0, \text{ gdy } N \rightarrow \infty$$

to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie średniokwadratowo do nieliniowości $G(x)$

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K(N); p) = \int_{\mathcal{H}} G(x) - \hat{G}(x; K(N); p) \Big|_2^2 \rightarrow 0 \text{ gdy } N \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$

Szybkość punktowej zbieżności średniokwadratowej empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ (tempo zmniejszania się błędów MSE w (3.20) ze wzrostem skali K) będziemy badać w zależności od regularności (gładkości) identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$ oraz zastosowanych w modelach funkcji falkowych. Skupimy się przy tym na jego pierwszej składowej – obciążeniu bias² $\hat{G}(x; K; p)$ ponieważ, jak pokazaliśmy wcześniej, wariancja wyjścia $\text{var} \hat{G}(x; K; p)$ (razem jej wielkości) od tych własności nie zależy (por. (3.14)).

Badania dotyczyć będą następującej klasy funkcji ciągłych (por. np. [93, str. 166]):

Definicja 3.1 Funkcja $G(x)$ należy do klasy $C^s(a; b)$, $s > 0$ (jest w przedziale $(a; b)$ funkcją ciągłą z wykładnikiem s), jeżeli istnieje dodatnia stała L_s , taka, że

$$|G(x) - t(x; v)| \leq L_s |x - v|^s \quad (3.21)$$

dla wszystkich $x, v \in (a; b)$, gdzie $t(x; v)$ jest wielomanem Taylora funkcji $G(x)$ stopnia $q \leq s$, $q = \lfloor s \rfloor$, w punkcie v

$$t(x; v) = \sum_{r=0}^{q-1} \frac{G^{(r)}(v)}{r!} (x - v)^r; \quad T_r = \frac{G^{(r)}(v)}{r!} \quad (3.22)$$

Funkcja $G(x)$ należy do klasy C^s ; $s > 0$, w przedziale domkniętym $[a; b]$, jeśli w punktach brzegowych a i b jest ciągła z wykładnikiem s , odpowiednio, prawo- i lewostronnie.

Powyższa klasa, w zależności od wartości wykładnika s , obejmuje różne znane rodzaje funkcji nieliniowych (zob. przykłady na Rys. 3.1 i 3.2). W szczególności:

- ² Dla $s \geq 2$ (0; 1) mamy $q = \lfloor s \rfloor = 1$, stąd we wzorze (3.22) $t(x; v) = G(v)$ i warunek (3.21) przyjmuje następującą postać

$$|G(x) - G(v)| \leq L_s |x - v|^s; \quad L_s > 0$$

Do klasy $C^s[a; b]$; $s \geq 2$ (0; 1) należą zatem funkcje, dla których w przedziale $[a; b]$ zachodzi warunek Höldera z wykładnikiem s .

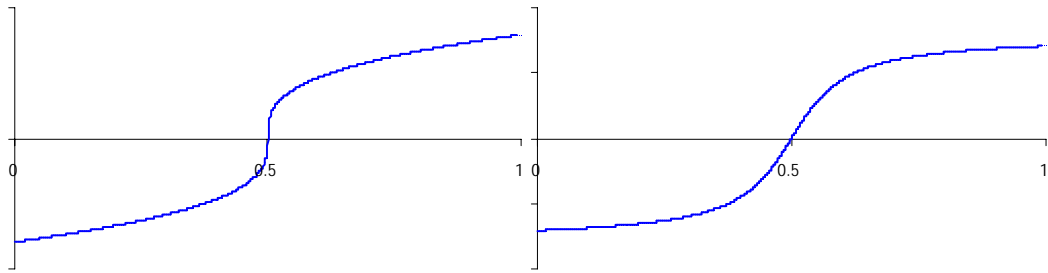
- ² Dla $s = 1$ do klasy $C^1[a; b]$ należą funkcje spełniające w przedziale $[a; b]$ warunek Lipschitza

$$|G(x) - G(v)| \leq L |x - v|; \quad L > 0$$

- ² Dla $s = s + \alpha$, gdzie $s = 0; 1; \dots$ oraz $\alpha \in (0; 1]$, klasa $C^s[a; b]$ odpowiada często rozważanej w literaturze statystycznej klasie funkcji o s ciągłych pochodnych w przedziale $[a; b]$, z ostatnią pochodną spełniającą w tym przedziale warunek Höldera z wykładnikiem α (zob. np. [64, str. 93] i [112]).

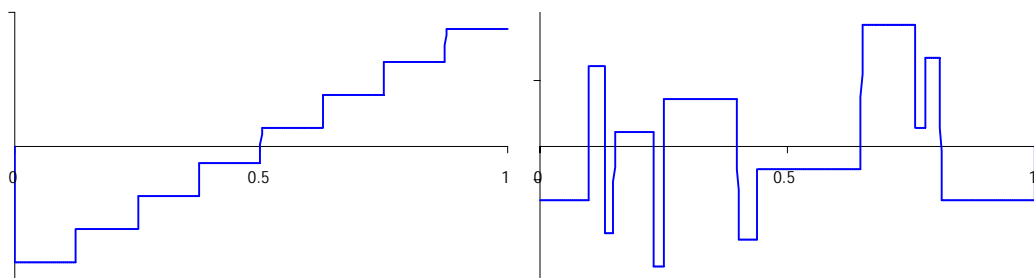
Przykładami funkcji posiadających s ciągłych pochodnych są np. funkcje sklejane stopnia $s + 1$. Zauważmy przy tym, że w przedziałach pomiędzy węzłami interpolacji, funkcje sklejane należą do klasy C^s , przy dowolnym $s > 0$.

Ponadto zauważmy, że:



Rys. 3.1 Funkcja $\frac{1}{3} \sqrt[3]{(x - 0.5)}$ (z lewej) należy do klasy C^{1-3} . Funkcja $\arctan(4x - 2)$ należy natomiast do klasy C^∞ z dowolnym $\epsilon > 0$

- 2 Funkcje będące w przedziale $[a; b]$ wielomianami należą do klasy $C^\infty[a; b]$, przy dowolnym $\epsilon > 0$ (ponadto, jeśli wielomiany te są stopnia $s < \frac{1}{\epsilon}$, to wówczas zachodzi $j^s(x; v) = 0$).
- 2 Funkcje z klasy C^1 (np. $\sin x$, $\arctan x$) należą w swoich dziedzinach do klasy C^∞ , dla dowolnego $\epsilon > 0$, w dowolnym przedziale $[a; b]$.



Rys. 3.2 Funkcje odcinkami stałe należą w przedziałach pomiędzy skokami do klasy C^∞ , przy dowolnym $\epsilon > 0$

W trakcie analizy będziemy też korzystać z następujących własności funkcji należących do tej klasy:

- G1. Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą odpowiednio, do klas $C^\infty[a; b]$ i $C^\infty[a; b]$, to funkcja $G(x) (= R(x) \cdot f(x))$ należy do klasy $C^\infty[a; b]$, gdzie $\epsilon = \min\{\epsilon_R, \epsilon_f\}$ (własność ta dla różnych przypadków szczególnych została pokazana w pracach [44], [50], [70], [108]).
- G2. Jeśli charakterystyka nieliniowa elementu statycznego systemu (z rozważanej klasy systemów) należy do klasy $C^\infty[a; b]$, to również identyfikowana nieliniowość $R(x)$ do niej należy (por. uwagi 2.4 i 2.5 w punkcie 2.3).

Szybkość zbieżności błędów obciążenia $\hat{G}(x; K; p)$. Analizę szybkości zbieżności błędów obciążenia rozpoczniemy od spostrzeżenia, że w każdym punkcie x , w którym funkcja $G(x)$ jest ciągła, dla funkcji falkowych Daubechies zachodzi równość (zob. [80, twierdzenie 2.1])

$$G(x) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{G}_n^p(x) + \sum_{m=M-l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.23)$$

stał (patrz wzór (3.3))

$$G(x) = G(x; K; p) + \sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} \tilde{A}_{ml}^p(x)$$

a zatem

$$G(x) - G(x; K; p) = \sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.24)$$

Z kolei, ze względu na zwartość nośnika falek (por. wzór (1.11) w rozdz. 1) w ustalonym punkcie x dla każdej skali m aktywne (różne od zera) są tylko niektóre falki (patrz Rys. 3.3) i w rezultacie suma po prawej stronie wzoru (3.24) redukuje się do postaci (por. [49] i [71])

$$\sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} \tilde{A}_{ml}^p(x)$$

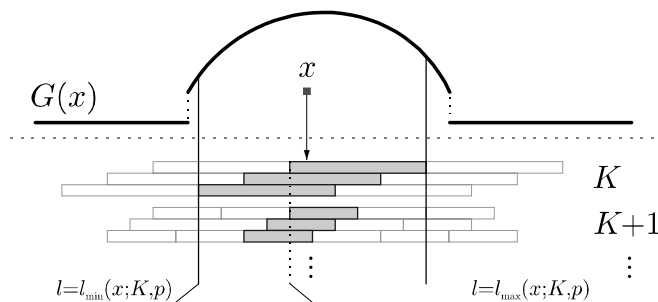
gdzie

$$l_{\min}(x; m; p) = \lfloor b^{-p} x \rfloor + 1 \quad \text{oraz} \quad l_{\max}(x; m; p) = \lfloor b^p x \rfloor + 1 \quad (3.25)$$

W konsekwencji, błąd obciążenia empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie x jest równy

$$\text{bias } \hat{G}(x; K; p) = G(x) - G(x; K; p) = \sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.26)$$

A zatem szybkość zmniejszania się błędu obciążenia w ustalonym punkcie x zależy (w szczególności) od szybkości zmniejszania się, ze wzrostem skali K , współczynników falkowych \tilde{A}_{ml}^p odpowiadających falkom $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ o nośniku zawierającym punkt x (zob. Rys. 3.3)



Rys. 3.3 Błąd obciążenia empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie x zależy tylko od tych współczynników falkowych \tilde{A}_{ml}^p , dla których nośniki odpowiednich falek \tilde{A}_{ml}^p zawierają punkt x (rysunek przedstawia sytuację, gdy $p = 2$)

W Dodatku B.3 (str. 123) pokazaliśmy, że jeśli w przedziale zawierającym nośnik falki $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ funkcja $G(x)$ jest ciągła z wykładnikiem $\nu > 0$, to wówczas przy dużej skali m dla odpowiadającego tej falce współczynnika \tilde{A}_{ml}^p zachodzi następujące oszacowanie

$$|\tilde{A}_{ml}^p| \leq 2^i \frac{(2^\nu + 1)m}{2} C_\nu; \quad \nu = \min \nu_j; \quad p \geq \nu \quad (3.27)$$

gdzie C_0 jest dodatnią stałą zależną od $R(x)$, $f(x)$ i falek $\tilde{A}^p(x)$ (zob. lemat 2.16, str. 126).

Jeśli zatem w sąsiedztwie punktu x , obejmującym nośniki wszystkich falek występujących we wzorze (3.26), funkcja $G(x)$ jest ciągła z wykładnikiem ν , to wówczas, korzystając z powyższego oszacowania oraz wzoru (3.26) można pokazać (zob. Dodatek B.4, str. 126), że kwadrat błędów obciążenia empirycznego modelu falkowego $\hat{G}(x; K; p)$ spełnia asymptotycznie (tj. dla dużych wartości K) w punkcie x następującą nierówność

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) \leq 2^{i-2} 2^K C_{\text{bias}}; \quad \nu = \min f_{\nu}; \quad (3.28)$$

gdzie dodatnia stała C_{bias} zależy (podobnie jak stała C_0) od wartości $R(x)$; $f(x)$ i falek $\tilde{A}^p(x)$. Punkty brzegowe tego sąsiedztwa można wyznaczyć korzystając z granic indeksów l (przesunięć) falek, danych w (3.25) oraz ze wzorów (1.11) określających nośniki falek $\tilde{A}_{ml}^p(x)$:

$$a_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l_{\min}(x; K; p) + 1}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l_{\max}(x; K; p) + p}{2^K}$$

otrzymując, że

$$a_x = \frac{\nu 2^K x^l + 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\nu 2^K x^l + 2p + 1}{2^K}$$

W dalszej części pracy będziemy korzystać z poniższego założenia precyzującego wartość identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$ (a zatem także funkcji $G(x)$, por. (3.1)), dla których otrzymaliśmy oszacowanie (3.28):

Z7. Nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in C^{\nu} [a_x; b_x] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^{\nu} [a_x; b_x]; \quad [a_x; b_x] \in S; \quad \nu > 0$$

gdzie

$$a_x = \frac{\nu 2^K x^l + 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\nu 2^K x^l + 2p + 1}{2^K}$$

Funkcja $G(x)$ należy zatem do klasy $C^{\nu} [a_x; b_x]$, gdzie $\nu = \min f^{\nu}; g$ (por. wartość $G1$). Wyznaczony przedział jest prawostronnie otwarty ponieważ przedział zawierający nośniki falek Daubechies są również prawostronnie otwarte (por. (1.11) w punkcie 1.1).

Uwaga 3.6 Jeśli w przedziale $[a_x; b_x]$ funkcja $G(x)$ jest wielomianem stopnia s , to w modelach teoretycznych $G(x; K; p)$ opartych na funkcjach falkowych Daubechies o numerach $p > s$, ze względu na posiadanie przez falki p znikających momentów (zob. (1.12), punkt 1.1) zachodzi (por. wzór (3.4) i zob. Rys. 3.4)

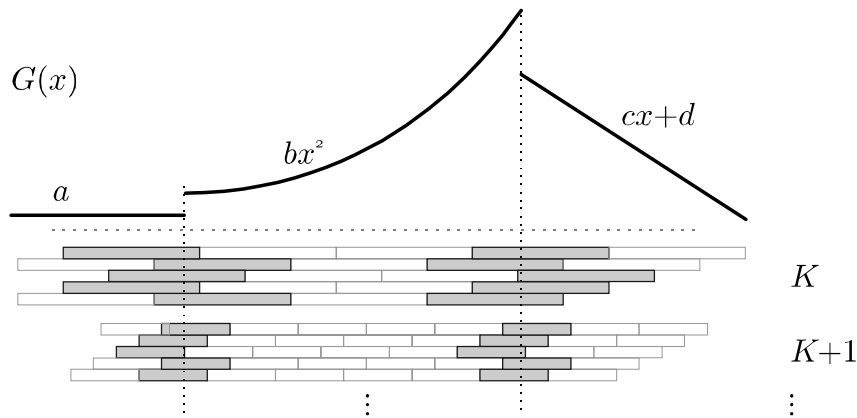
$$\tilde{A}_{ml}^p = 0; \quad \text{dla} \quad m > K; \quad l = l_{\min}(x; m; p); \dots; l_{\max}(x; m; p)$$

a zatem, w punkcie $x \in [a_x; b_x]$ znika obciążenie modeli (por. (3.26))

$$\text{bias} \hat{G}(x; K; p) = 0 \quad (3.29)$$

i, w konsekwencji, dla każdego $x \in [a_x; b_x]$ błąd średniokwadratowy MSE składa się tylko z wariancji wyjścia modeli:

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K; p) = \text{var} \hat{G}(x; K; p)$$



Rys. 3.4 Współczynniki falkowe \hat{a}_{ml}^p przy falkach \tilde{A}_{ml}^p leżących wewnątrz przedziałów ciągłości nieliniowości $G(x)$ znikają, jeśli jest ona w tych przedziałach wielomianem stopnia mniejszego niż numer falkowy p . Na rysunku przedstawiono sytuację, gdy $p = 3$. Nośniki falek \tilde{A}_{ml}^p odpowiadających zerowym współczynnikom \hat{a}_{ml}^p zaznaczono kolorem białym ($a; b; c; d$ - dowolne stałe)

Na podstawie nierówności (3.28) wnioskujemy, że przy założeniu Z7 (wtedy $\mu = \min f^{\circ}; \bar{g}$):

- B1. Wraz ze wzrostem skali K , kwadrat błędów obciążenia empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ maleje wykładniczo do zera w punktach ciągłości $R(x)$ i $f(x)$.
- B2. Szybkość zmniejszania się tego błędu zależy od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p).
- B3. Wpływ na błąd obciążenia modeli $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie x ma jedynie gładkość $R(x)$ i $f(x)$ w otoczeniu punktu x (w przedziale $[a_x; b_x]$).
- B4. Oszacowanie (3.28) jest prawdziwe dla wszystkich punktów x należących do przedziału $\frac{b^{2^K} x c}{2^K}; \frac{b^{2^K} x c + 1}{2^K}$ (bowiem w modelach falkowych $p > 1$).

Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$. Nierówności (3.14) i (3.28) pozwalają następująco oszacować asymptotyczny błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ w ustalonym punkcie x :

$$MSE \hat{G}(x; K; p) \leq 2^{i \cdot 2^K} + \frac{2^K}{N} C_{MSE} \quad (3.30)$$

gdzie $C_{MSE} = \max f C_{bias}; C_{var} g$. Minimalizując oszacowanie względem parametru skali K otrzymujemy następująco regułę lokalnego doboru skali K modeli empirycznych (w otoczeniu punktu x) dla dużej liczby obserwacji (por. warunki (3.19))

$$K = K_{opt}(N) = \frac{1}{2^\circ + 1} \log_2 2^\circ N \quad (3.31)$$

Wstawienie tego wzoru do (3.30) daje lemat:

Lemat 3.3 Jeśli spełnione są warunki założenia Z7, to w każdym punkcie x należącym do przedziału $\frac{b2^K \times c}{2^K}; \frac{b2^K \times c+1}{2^K}$, asymptotyczny błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, przy skali K dobieranej za pomocą reguły (3.31), spełnia nierówność

$$\text{MSE } \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N); p) \leq N^{-i} 2^{\frac{2^\circ}{2^\circ+1}} C_{\text{MSE}}^\circ; \quad \circ = \min_{\tau; \tau; p} f^\circ; \tau; p \quad (3.32)$$

gdzie $C_{\text{MSE}}^\circ = 2 \tau (2^\circ)^{i-2^\circ} C_{\text{MSE}}$.

B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$

W badaniach zbieżności całkowej (globalnej) modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ posłużymy się całkowym (zintegrowanym) błędem średniokwadratowym, na który składają się zintegrowana wariancja $\text{IV } \hat{G}(x; K; p)$ i zintegrowany kwadrat obciążenia $\text{ISB } \hat{G}(x; K; p)$

$$\begin{aligned} \text{MISE } \hat{G}(x; K; p) &= \int_S G(x) \int E \hat{G}(x; K; p) \, dx + \\ &+ \int_S E \int E \hat{G}(x; K; p) \int \hat{G}(x; K; p) \, dx = \\ &= \text{ISB } \hat{G}(x; K; p) + \text{IV } \hat{G}(x; K; p) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zbieżność i szybkość zbieżności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ w sensie tego błędu wyznaczmy zarówno dla przypadku, gdy identyfikowana funkcja $G(x)$ jest ciągła w przedziale S , jak i w sytuacji, gdy $G(x)$ posiada w nim skończoną liczbę punktów nieciągłości.

Wariancja $\text{IV } \hat{G}(x; K; p)$. Składowa $\text{IV } \hat{G}(x; K; p)$ dla $S = [a; b]$ można łatwo oszacować korzystając z oszacowania punktowej wariancji modelu empirycznego we wzorze (3.14)

$$\text{IV } \hat{G}(x; K; p) = \int_S \text{var } \hat{G}(x; K; p) \, dx \leq \frac{2^K}{N} C_{\text{IV}} \quad (3.34)$$

gdzie $C_{\text{IV}} = (b - a) C_{\text{var}}$.

Obciążenie $\text{ISB } \hat{G}(x; K; p)$. Na mocy nieobciążoności estymatorów $\hat{\theta}_{Mn}^p$ oraz $\hat{\Delta}_{ml}^p$ (3.10), a zatem i wyjścia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K; p)$ w stosunku do modelu teoretycznego $G(x; K; p)$ (wzór (3.13)), całkowe obciążenie $\text{ISB } \hat{G}(x; K; p)$ jest równe całkowemu błędowi aproksymacji funkcji $G(x)$ przez model teoretyczny $G(x; K; p)$ (tj. odległości pomiędzy modelem teoretycznym $G(x; K; p)$ i funkcją $G(x)$ w metryce przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned} \text{ISB } \hat{G}(x; K; p) &= \int_S G(x) \int E \hat{G}(x; K; p) \, dx = \\ &= \int_S [G(x) - G(x; K; p)]^2 \, dx = \text{ISE } G(x; K; p) \end{aligned} \quad (3.35)$$

a zatem ma charakter deterministyczny i nie zależy od liczby pomiarów N (por. (3.15)). Na podstawie własności (1.21) falkowej analizy wielorozdzielczej, obciążenie $\text{ISB } \hat{G}(x; K; p)$

maleje do 0 wraz ze wzrostem skali K dla dowolnych (niekoniecznie ciągłych) funkcji $G(x)$ ograniczonych w przedziale S i znikających poza tym przedziałem (por. założenia $Z1$ i $Z2$ w rozdz. 2) i dowolnego numeru falkowego p

$$ISB \hat{G}(x; K; p) \rightarrow 0; \text{ gdy } K \rightarrow 1 \quad (3.36)$$

Zbieżność całkowa modeli $\hat{G}(x; K; p)$

Podobnie jak to ma miejsce w przypadku błędów MSE (zob. dyskusję na str. 30), wzrost liczby pomiarów N powoduje, że przy ustalonej skali K modelu empirycznego $\hat{G}(x; K; p)$, składowa wariancja błędów MISE maleje do 0 (zob. (3.34)). Zatem (por. wzory (3.33) i (3.35))

$$MISE \hat{G}(x; K; p) \rightarrow ISB \hat{G}(x; K; p) \quad \text{dla } N \rightarrow 1; K = \text{const}$$

Z kolei zwiększanie skali K w modelu (w celu zmniejszenia składowej obciążenia, por. (3.36)) przy stałej liczbie pomiarów N wiąże się ze wzrostem wariancji (szacunek według oszacowania (3.34)) i, w konsekwencji, zwiększeniem błędów MISE

$$MISE \hat{G}(x; K; p) \rightarrow 1 \quad \text{dla } K \rightarrow 1; N = \text{const}$$

Uzależniając zatem skalę K modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ we wzorze (3.9) od liczby pomiarów N tak, aby spełnione były warunki (por. (3.19))

$$K = K(N) \rightarrow 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)} = N \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow 1 \quad (3.37)$$

otrzymujemy, że:

Lemat 3.4 Jeśli skala K falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów tak, że spełnione są warunki (3.37), to modele te zbiegają w przedziale S do nieliniowości $G(x)$, w sensie całkowego błędów średniokwadratowego

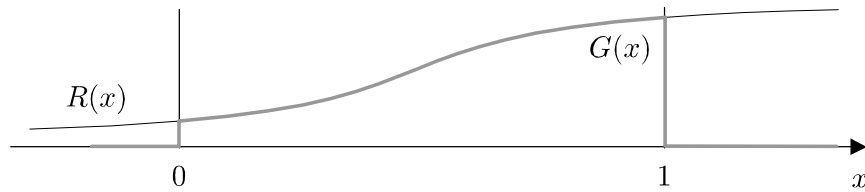
$$MISE \hat{G}(x; K(N); p) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow 1 \quad (3.38)$$

Zauważmy, że fakt zbieżności całkowej nie zależy od ciągłości $R(x)$ i $f(x)$ (por. lemat 3.2).

Szybkość zbieżności całkowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$

Analizując szybkość zbieżności błędów MISE $\hat{G}(x; K; p)$ jako pierwszy rozpatrzmy przypadek, gdy $G(x)$ jest ciągła w przedziale $S = [a; b]$.

Uwaga 3.7 Przyjęte w założeniu $Z1$ wymaganie, aby funkcja gęstości $f(x)$ była dodatnia w przedziale S i równa zero poza nim, powoduje, że nieliniowość $G(x) (= R(x) \oplus f(x))$ jest w punktach brzegowych a i b ogólnie nieciągła. Natomiast może być ona ciągła w przedziale S , jeśli jest w tych punktach, odpowiednio, prawostronnie (w punkcie a) i lewostronnie (w punkcie b) ciągła (Rys. 3.5).



Rys. 3.5 Przy założeniu Z1, identyfikowana funkcja $G(x) = R(x) \circledast f(x)$ może być w punktach brzegowych $a; b$ ciągła jednostronnie, od strony wnętrza przedziału. Przykład na rysunku odpowiada sytuacji, gdy wejście ma rozkład jednostajny w przedziale $[0; 1]$, tj. $f(x) = I_{[0;1]}(x)$

a) Funkcja $G(x)$ ciągła w przedziale $S = [a; b]$. Biorąc pod uwagę, że dla dowolnego przedziału $S^0 \mu S$ zachodzi

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K; p) = \int_{S^0} \text{MSE } \hat{G}(x; K; p) dx$$

średniokwadratowy MISE modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ można teraz łatwo oszacować, korzystając z lematu 3.3, dotyczącego błędów punktowych MSE tych modeli. Uwzględniając ten lemat, otrzymujemy jako bezpośredni wniosek następujący:

Lemat 3.5 Jeśli $R(x) \in C^-[a; b]$ oraz $f(x) \in C^@[a; b]$, to w przedziale $S_G^0 \stackrel{\text{def}}{=} [a_G^0; b_G^0]$, którego granice wynoszą

$$a_G^0 = \frac{2^K a + 2p_i - 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_G^0 = \frac{2^K b_i - 2p + 2}{2^K} \quad (3.39)$$

asymptotyczny średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ ze skalą K dobieraną w zależności od liczby pomiarów N według reguły (por. (3.31))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2^{\circ} + 1} \log_2 2^{\circ} N \quad ; \quad \circ = \min f^{\circ}; \cdot; p_g \quad (3.40)$$

spełnienia następującej nierówności

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N); p) = E \int_{S_G^0} |G(x) - \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N); p)|^2 dx \leq N^{-\frac{2^{\circ}}{2^{\circ}+1}} \circ C_{\text{MISE}}^{\circ} \quad (3.41)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{\circ} = (b_G^0 - a_G^0) C_{\text{MSE}}^{\circ}$.

Powyższy lemat gwarantuje modelom $\hat{G}(x; K; p)$ zbieżność rzędu $O(N^{-\frac{2^{\circ}}{2^{\circ}+1}})$, gdzie $\circ = \min f^{\circ}; \cdot; p_g$. Gwarantowana szybkość zbieżności zależy zatem od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, gładkości funkcji gęstości $f(x)$ i numeru fałek p zastosowanych w empirycznym modelu falkowym.

Przedział $S_G^0 = [a_G^0; b_G^0]$, jest (w ogólności) węższy niż przedział S , $S_G^0 \mu S$. Zauważmy jednak, że ze wzrostem skali K modeli, przedział S_G^0 rozszerza się (zob. własność (A.1) funkcji dlc i bcc)

$$a_G^0 - a < \frac{2^K a + 2p_i - 1}{2^K} - a = \frac{2p_i - 1}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_i - b_G^0 < b_i - \frac{2^K b_i - 2p + 1}{2^K} = \frac{2p_i - 1}{2^K} \quad (3.42)$$

i asymptotycznie (dla $K \rightarrow \infty$) staje się on równy przedziałowi S , niezależnie od zastosowanych w modelach $\hat{G}(x; K; p)$ funkcji falkowych (numeru p).

Uwaga 3.8 Jeśli granice a i b przedziału S leżą na siatce binarnej $B_H; H \in \mathbb{Z}; H < 1$ (tj. punkty brzegowe a i b można przedstawić w postaci $n=2^H$, $n; H \in \mathbb{Z}; H < 1$ – por. definicja B_H w Dodatku A.2, str. 114), to wówczas (zob. własności (A.4) funkcji dte i bte) dla modeli $\hat{G}(x; K; p)$ opartych o funkcje falkowe Haara ($p = 1$) zachodzi

$$a_G^0 = \frac{\int_a^b 2^K a}{2^K} = a \quad \text{oraz} \quad b_G^0 = \frac{\int_a^b 2^K b}{2^K} = b$$

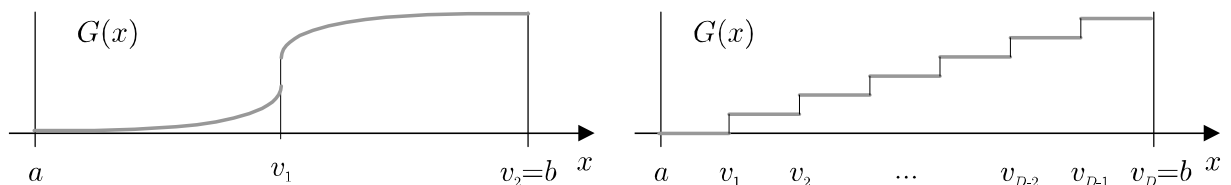
i przedział S_G^0 jest równy przedziałowi S , a zatem takie modele zbiegają w tym wypadku z gwarantowaną szybkością zbieżności (3.41) i $\rho = \min f^{\otimes}; \tau; 1g$, w całym przedziale S .

b) Funkcja $G(x)$ nieciągła w skończonej liczbie punktów. Analizując błąd MISE falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ skupimy się teraz na jego składowej obciążeniu $\text{ISB} \hat{G}(x; K; p)$, ponieważ, jak pokazaliśmy wcześniej, składowa wariancji ma ten sam rząd dla dowolnych funkcji $G(x) = R(x) \circ f(x)$ spełniających założenia Z1-Z2 (zob. (3.34)).

Przyjmijmy następujące założenie (por. założenie Z7, str. 34)

Z7a. Nieliniowość $R(x)$ i (lub) funkcja gęstości $f(x)$ są w przedziale S odcinkami gładkimi, tj. mają w przedziale S skończoną, ale nieznaną liczbę punktów nieciągłości typu skok i poza nimi należą odpowiednio, do klas C^- i C^+ .

Zauważmy, że nieliniowość $G(x)$ ma przy założeniu Z7a w przedziale S skończoną liczbę punktów nieciągłości typu skok, a pomiędzy nimi należy do klasy C^- , $\rho = \min f^{\otimes}; \tau; 1g$ (Rys. 3.6)



Rys. 3.6 Przykłady funkcji odcinkami gładkich w przedziale $S = [a; b]$

Błąd obciążenia $\text{ISB} \hat{G}(x; K; p)$ oszacujemy korzystając ze wzoru (3.24), równości (3.35) i tożsamości Parsevala

$$\text{ISB} \hat{G}(x; K; p) = \sum_{m=K}^{\infty} \frac{I_{\max}^{(m;p)}}{I_{\min}^{(m;p)}} \left(\frac{1}{m!} \right)^2 \quad (3.43)$$

Oznaczmy przez $\{v_i\}_{i=1}^D; D < 1$, zbiór punktów nieciągłości funkcji $G(x)$, natomiast przez $\mathcal{I}_v^a(m; p)$ zbiór indeksów l translacji tych funkcji falkowych $\tilde{A}_{ml}^p(x)$, których nośniki, w skali m , zawierają co najmniej jeden punkt nieciągłości v_i

$$\mathcal{I}_v^a(m; p) = \{l \in \mathbb{Z} : l_{\min}(m; p) \leq l \leq l_{\max}(m; p) \text{ i } \exists i \in \{1, \dots, D\} : v_i \in \text{supp} \tilde{A}_{ml}^p(x)\}$$

Mozemy teraz dokonać dekompozycji sumy (3.43) na dwa składniki

$$ISB \hat{G}(x; K; p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=2^a \vee(m;p)}^{2^m} (-\frac{p}{ml})^2 + \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=I_{\min}(m;p)}^{I_{\max}(m;p)} (-\frac{p}{ml})^2 \quad (3.44)$$

Zauważmy, że ze względu na to, iż rozmiar (długość) nośnika falek $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ w skali m wynosi $(2p_i - 1)2^m$ (por. wzór (1.11) w rozdz. 1), a poszczególne falki wraz ze zmianą l przesuwane są ze skokiem $1=2^m$, dla każdej ze skal m maksymalna liczba elementów zbioru ${}^a \vee(m;p)$ wynosi $D(2p_i - 1)$ (liczba elementów wewnętrznej sumy pierwszego składnika), natomiast liczbę elementów sumy wewnętrznej drugiego składnika można wtedy oszacować następująco

$$\begin{aligned} I_{\max}(m;p) - I_{\min}(m;p) + 1 &\leq D(2p_i - 1) = d2^m b e + p_i - 2 - b2^m a c + p_i - D(2p_i - 1) = \\ &= d2^m b e - b2^m a c + 2p_i - 2 - D(2p_i - 1) < \\ &< 2^m (b_i - a) \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz oszacowania współczynników falkowych $-\frac{p}{ml}$ dla funkcji $G(x)$ nieciągłych w przedziale zawierającym nośnik falki $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ (uzyskane w Dodatku B.3, str. 123)

$$j^{-\frac{p}{ml}} \leq 2^{i \frac{m}{2}} \leq C_{G\tilde{A}}$$

(ze stałą $C_{G\tilde{A}} = M_R M_f M_{\tilde{A}}(2p_i - 1)$, zależną od $R(x)$, $f(x)$ i zastosowanych w modelu funkcji falkowych) i stosując je w odniesieniu do współczynników falkowych o indeksach l ze zbioru ${}^a \vee(m;p)$ (pierwsza suma), a oszacowanie ze str. 33 (por. (B.24) w Dodatku B.3) w odniesieniu do pozostałych współczynników (druga suma) otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned} ISB \hat{G}(x; K; p) &\leq \sum_{m=K}^{\infty} 2^{i m} C_{G\tilde{A}}^2 D(2p_i - 1) + \sum_{m=K}^{\infty} 2^{i 2^m} C_{\tilde{A}}^2 (b_i - a) = \\ &= 2^{i K} \leq 2 C_{G\tilde{A}}^2 D(2p_i - 1) + 2^{i 2^K} \leq \frac{C_{\tilde{A}}^2 (b_i - a)}{1 - 2^{i 2^k}} \leq \\ &\leq 2^{i 2^k} \leq C_{ISB} \quad (3.45) \end{aligned}$$

gdzie $C_{ISB} = \max_n 2 C_{G\tilde{A}}^2 D(2p_i - 1); \frac{C_{\tilde{A}}^2 (b_i - a)}{1 - 2^{i 2^k}}$ oraz $\% = \min_{\circ; \frac{1}{2}}^{\circ} = \min_{\circ; \frac{1}{2}}^{\circ}$ (uwzględniając wzór (3.40) i biorąc pod uwagę, że $p > 1$). Nierówność ta wraz z (3.34) daje następujące oszacowanie asymptotycznego błędów MISE falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ dla badanego przypadku

$$MISE \hat{G}(x; K; p) \leq 2^{i 2^k} \leq C_{ISB} + \frac{2^k}{N} \leq C_{IV} \leq 2^{i 2^k} + \frac{2^k}{N} C_{MISE} \quad (3.46)$$

gdzie teraz $C_{MISE} = \max_{\circ} f C_{ISB}; C_{IV}$. Optymalizując to oszacowanie względem parametru skali K otrzymujemy tym razem (por. (3.40))

$$K = K_{opt}(N) = \frac{1}{2^{\%} + 1} \log_2 2^{\%} N \quad (3.47)$$

Po podstawieniu wzoru (3.47) do oszacowania (3.46) uzyskujemy lemat:

Lemat 3.6 Asymptotyczne błędy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, przy skali K dobranej za pomocą reguły (3.47), spełniają nierówność

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N); p) \leq N^{-\frac{2\%}{2\%+1}} C_{\text{MISE}}^{\%} \quad (3.48)$$

gdzie $\% = \min\{f''(x); 1\}$ i $C_{\text{MISE}}^{\%} = 2 \int (2\%)^i 2^{2\%-(2\%+1)} C_{\text{MISE}}$.

Ponieważ $\% = \min\{f''(x); 1\} \leq 1$, gwarantowana obecnie szybkość zbieżności całkowej przy wzroście liczby pomiarów N jest dla $\% > 1/2$ (por. (3.40)) mniejsza niż we wzorze (3.41). Należy też podkreślić, że $\%$ w wykładniku we wzorze (3.48) nie zależy od numeru falkowego p , tzn. gwarantowana szybkość zbieżności całkowej jest taka sama niezależnie od rodzaju falek zastosowanych w modelu empirycznym $\hat{G}(x; K; p)$.

3.1.2 Analiza wierności modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$

Ze względu na postać (3.8), wierności empirycznych modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ wynikają jako proste wnioski z wierności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, wykazanych w punkcie 3.1.1.

A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$

Korzystając z poniższego związku pomiędzy punktowymi błędami średniokwadratowymi modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ i $\hat{R}_G(x; K; p)$ w punkcie x (por. wzory (3.1), (3.8) i (3.12))

$$\text{MSE } \hat{R}_G(x; K; p) = E \left[\frac{G(x)}{f(x)} \left(\frac{\hat{G}(x; K; p)}{f(x)} \right)^2 \right] = \frac{1}{f^2(x)} \text{MSE } \hat{G}(x; K; p) \quad (3.49)$$

wniosujemy, że modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K; p)$ zbiegają średniokwadratowo do nieliniowości $R(x)$ w tych samych punktach $x \in S$ w których modele empiryczne $\hat{G}(x; K; p)$ zbiegają w takim sensie do funkcji $G(x)$, dowodząc tym samym, w oparciu o lemat 3.2, następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1 (Zbieżność punktowa średniokwadratowa) Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ są ciągłe w punkcie $x \in S = [a; b]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki

$$K = K(N) \rightarrow 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)} = N \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie, średniokwadratowo, do nieliniowości $R(x)$

$$\text{MSE } \hat{R}_G(x; K(N); p) = E \left[R(x) \left(\frac{\hat{R}_G(x; K(N); p)}{R(x)} - 1 \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.50)$$

Z (3.49) wynika również, że szybkości zmniejszania się punktowego błędu średniokwadratowego są – z dokładnością do stałej – dla obu modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ i $\hat{G}(x; K; p)$ takie same, co po uwzględnieniu lematu 3.3 prowadzi bezpośrednio do twierdzenia.

Twierdzenie 3.2 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej) Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in C^{\alpha} [a_x; b_x] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^{\beta} [a_x; b_x]; \quad \alpha; \beta > 0; \quad [a_x; b_x] \subset S$$

gdzie

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^p 2^k x_i^{2p+2}}{2^k} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\sum_{i=1}^p 2^k x_i^{2p+1}}{2^k} \quad (3.51)$$

a skale K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ dobierane są według wzoru (por. (3.31))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2^{\alpha} + 1} \log_2 2^{\alpha} N, \quad \alpha = \min \{ \alpha; \beta \} \quad (3.52)$$

to błędy średniokwadratowe tych modeli w dowolnym punkcie $x \in [a_x; b_x]$ są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MSE} \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N); p) \in N^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} C_{\text{MSE}}^{\alpha} \quad (3.53)$$

gdzie $C_{\text{MSE}}^{\alpha} = C_{\text{MSE}}^{\alpha} = f^2(x)$ jest dodatnią stałą (por. wzór (3.32)).

Z powyższych twierdzeń wynikają następujące własności punktowe falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ w sensie zachowania się błędów średniokwadratowego MSE:

- RG1. Modele $\hat{R}_G(x; K; p)$ zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie jej ciągłości, pod warunkiem, że w tym punkcie również funkcja gęstości $f(x)$ jest ciągła.
- RG2. Tempo zmniejszania się błędów (3.53) modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ ze wzrostem liczby pomiarów N we wzorach (3.7) i (3.52) (szybkość zbiegania modeli do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$) zależy od lokalnej (w przedziale $[a_x; b_x]$) gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p ; por. wzory (3.52)-(3.53)).
- RG3. Jeśli w przedziale $[a_x; b_x]$ funkcja gęstości wejścia jest gadsza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\beta > \alpha$, a zastosowane w modelu empirycznym funkcje falkowe mają numer $p > \alpha$, to wówczas szybkość zbieżności błędów średniokwadratowego modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ z parametrem skali wybieranym według wzoru (3.52) osiąga asymptotycznie optymalną prędkość $O(N^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}})$ (por. Dodatek B.7, str. 129).
- RG4. Na zbieżność modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ i rząd szybkości zbieżności nie wpływa struktura ani dynamika systemu (w rozważanej klasie systemów) ani też skorelowanie zakłóceń z_k . W szczególności zatem, szybkość ta jest taka sama co do rzędu dla systemów statycznych, jak i dla systemów zawierających elementy dynamiczne.

Z punktowej zbieżności średniokwadratowej modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ wynika ich punktowa zbieżność według prawdopodobieństwa.

Wniosek 3.1 (Zbieżność punktowa wg prawdopodobieństwa) Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.1, to modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K(N); p)$ zbiegają do nieliniowości $R(x)$ w punktach ciągłości $R(x)$ i $f(x)$, według prawdopodobieństwa:

$$\hat{R}_G(x; K(N); p) \xrightarrow{P} R(x) \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

Kolejne twierdzenie charakteryzuje szybkość zbiegania empirycznych modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$ według prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 3.3 (Szybkość zbieżności punktowej wg prawdopodobieństwa)

Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.2, to dla b=odu bezwzględnego modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K_{opt}(N); p)$ zachodzi asymptotycznie, w każdym punkcie $x \in [a; b]$ następujące oszacowanie:

$$|R(x) - \hat{R}_G(x; K_{opt}(N); p)| = O(N^{-\frac{3}{2^p+1}}) \quad (3.54)$$

według prawdopodobieństwa.

Dowód. Dowód wynika z twierdzenia udowodnionego w pracy [50, twierdzenie 3, str. 449], które cytujemy w Dodatku B.8, str. 129. Podstawiając w nim $g(x) = G(x)$, $g_N(x) = \hat{G}(x; K_{opt}(N); p)$ oraz $f_N(x) = f(x)$ i przyjmując $s_g = 2^p = (2^p + 1)$ oraz $s_f = 1$ otrzymujemy (3.54). ■

Z twierdzenia wynika zatem kolejna własność modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$:

RG3a. Jeśli w przedziale $[a; b]$ funkcja gęstości wejścia jest gładzsza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\alpha > 0$, oraz zastosowane w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ funkcje falkowe mają numer $p > 0$, to wówczas modele te zbiegają do nieliniowości $R(x)$ z prędkością $O(N^{-\frac{3}{2^p+1}})$, według prawdopodobieństwa (por. własność RG3).

B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$

Z poniższej nierówności (por. założenie Z1 w rozdz. 2 i wzory (3.1), (3.8) oraz (3.49))

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K; p) = E \int_S \frac{G(x)}{f(x)} \left| \frac{\hat{G}(x; K; p)}{f(x)} - \frac{G(x)}{f(x)} \right|^2 dx \leq \frac{1}{2} \text{MISE } \hat{G}(x; K; p) \quad (3.55)$$

oraz lematu 3.4 wynika całkowa, średniokwadratowa zbieżność falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ w przedziale $S = [a; b]$ do dowolnej, ograniczonej nieliniowości $R(x)$.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.4 (Średniokwadratowa zbieżność całkowa) Jeśli skala K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki (por. (3.37))

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)} = N \rightarrow \infty, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty;$$

to modele te zbiegają w przedziale $S = [a; b]$ do nieliniowości $R(x)$, w sensie całkowego b=odu średniokwadratowego MISE

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K(N); p) = E \int_S |R(x) - \hat{R}_G(x; K(N); p)|^2 dx \rightarrow 0; \quad N \rightarrow \infty$$

Z tej samej nierówności dla przedziału $S_G^0 \subset S$ (por. wzory (3.39)) i treści lematu 3.5 wynika z kolei poniższe twierdzenie, dotyczące szybkości średniokwadratowej zbieżności całkowej modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$.

Twierdzenie 3.5 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej) ($R(x); f(x)$ ciągłe) Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in C^{\alpha} [a; b] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^{\beta} [a; b]; \quad \alpha, \beta > 0$$

a skale K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ dobierane są według wzoru (por. (3.40))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2^{\alpha} + 1} \log_2 2^{\alpha} N; \quad \alpha = \min \{ \alpha, \beta \}; \quad (3.56)$$

to w przedziale $S_G^0 \stackrel{\text{def}}{=} [a_G^0; b_G^0]$, gdzie

$$a_G^0 = \frac{2^{\alpha} a + 2p + 2}{2^{\alpha}} \quad \text{oraz} \quad b_G^0 = \frac{2^{\alpha} b + 2p + 2}{2^{\alpha}}$$

ich całkowe błędy średniokwadratowe są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N); p) = E \int_{S_G^0} R(x) - \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N); p)^2 dx \leq N^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} C_{\text{MISE}}^{\alpha} \quad (3.57)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{\alpha} = \pm \int C_{\text{MISE}}^{\alpha}$ jest dodatnią stałą

Nierówność (3.55) wraz z lematem 3.6 dowodzi również szybkości zbieżności tych modeli gdy $R(x)$ i $f(x)$ są nieciągłe:

Twierdzenie 3.6 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej) ($R(x); f(x)$ nieciągłe) Jeśli nieliniowość $R(x)$ i (lub) funkcja gęstości $f(x)$ mają w przedziale $S = [a; b]$ dowolną skończoną liczbę punktów nieciągłości (typu skok), a pomiędzy punktami nieciągłości należą odpowiednio, do klas C^{α} oraz C^{β} ; $\alpha, \beta > 0$ oraz jeśli skale modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ dobierane są według wzoru (por. (3.47))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2^{\alpha} + 1} \log_2 2^{\alpha} N; \quad \alpha = \min \left\{ \alpha, \beta, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}; \quad (3.58)$$

to całkowe błędy średniokwadratowe tych modeli są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N); p) \leq N^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} C_{\text{MISE}}^{\alpha} \quad (3.59)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{\alpha} = \pm \int C_{\text{MISE}}^{\alpha}$ jest dodatnią stałą

Z powyższych twierdzeń wnioskujemy następujące własności empirycznych modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ w sensie błędów MISE:

- RG5. Przy założeniach twierdzenia 3.4, modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K; p)$ zbiegają do dowolnych (ograniczonych na przedziale $S = [a; b]$ – por. założenie Z2) nieliniowości $R(x)$, przy dowolnych (ograniczonych i dodatnich w tym przedziale – por. założenie Z1) funkcjach gęstości wejścia $f(x)$.

- RG6. Szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ zależy od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ w przedziale $S = [a; b]$ oraz od numeru falkowego p funkcji falkowych zastosowanych w modelach $\hat{R}_G(x; K; p)$ (por. wzory (3.56)-(3.57) i (3.58)-(3.59)).
- RG7. Jeśli w przedziale $S = [a; b]$ funkcja gęstości wejścia $f(x)$ jest gładka od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\alpha > \beta$ oraz zastosowane w modelu empirycznym falki mają numer $p > \beta$, to wówczas model $\hat{R}_G(x; K; p)$ zbliża się do nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną szybkością $O(N^{-2/(2-\alpha)})$ (por. Dodatek B.7, str. 129 i własność RG3).
- RG8. Oszacowanie (3.59) gwarantuje w praktycznych zastosowaniach (dla $\alpha; \beta > 1=2$) minimalną szybkość zbieżności modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K; p)$ rzędu $O(N^{-1/2})$, niezależnie od numeru falki p .
- RG9. Na zbieżność i szybkość zbieżności nie wpływają dokładności do stałych, ani struktura ani dynamika systemu (z klasy rozważanych systemów) ani też skorelowanie zakłóceń z_k (por. własność RG4).

Przykłady. Rozpatrzmy teraz kilka przykładowych przypadków identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Niech nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia $f(x)$ będą odcinkami stałymi w $S = [a; b]$. Wówczas w przedziałach pomiędzy skokami obie funkcje należą do klasy C^1 , a zatem (por. (3.58)) $\alpha = \beta = 1$ i wraz ze wzrostem liczby pomiarów N gwarantowany błąd (3.59) maleje jak $O(N^{-1/2})$.

Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ są ciągłe w przedziale S i spełniają np. warunek Lipschitza ($\alpha; \beta = 1$), wtedy gwarantowany rząd szybkości zbieżności rośnie do poziomu $O(N^{-2/3})$ (por. (3.56)-(3.57) biorąc pod uwagę, że $p > 1$ i $\alpha = 1$). W obu przypadkach gwarantowane szybkości nie zależą od zastosowanych w modelach funkcji falkowych.

Jeśli natomiast $R(x)$ i $f(x)$ są dwukrotnie różniczkowalne (np. obie należą do klasy $C^{2.5}[a; b]$), to wówczas modele oparte o falki Haara ($p = 1$) nadal zbliżają się z szybkością $O(N^{-2/3})$, natomiast dla modeli z falkami Daubechies o numerze $p > 3$ szybkość ta wzrasta do maksymalnego (dla funkcji z klasy $C^{2.5}$) poziomu $O(N^{-5/6})$ (por. (3.57) i Dodatek B.7).

Dla bardzo gładkich funkcji $R(x)$ i $f(x)$ ($\alpha; \beta \rightarrow 1$), szybkość zbieżności modeli falkowych zależy głównie od zastosowanych w nich funkcji falkowych (numeru falkowego p). Zauważmy, że już przy falkach o numerze $p = 5$ otrzymujemy szybkość zbieżności rzędu $O(N^{-10/11})$ (zakładamy tu $\alpha; \beta > 5$), a zatem praktycznie równą rzędowi $O(N^{-1})$, charakterystycznemu dla metod z parametryczną znajomością funkcji $R(x)$ i $f(x)$ (por. np. [7]).

C. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_G(x; K; p)$

Opierając się na przeprowadzonej powyżej analizie teoretycznej (i podanych przykładach), można podać następujące wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w empirycznym modelu falkowym (3.8)-(3.9), otrzymywanym według algorytmu ilorazowego.

A. Jeśli oprócz informacji pomiarowej (zawartej w obserwacjach $f(x_k; y_k)$) dostępna jest również informacja wstępna na temat gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ to, kierując się własnościami RG3 i RG7, należy zastosować w nich funkcje falkowe o numerze $p > \min\{f^{\circledast}, \bar{g}\}$.

Zastosowanie w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ falek o większych numerach falkowych p , wiąże się jednakże ze wzrostem komplikacji obliczeniowych związanych z otrzymywaniem odpowiednich funkcji falkowych (zagadnienie to analizujemy szczegółowo w rozdziale 4). Ponadto, już przy numerach falkowych $p > 2$, różnice pomiędzy gwarantowanymi szybkościami zbieżności stają się nieznaczne i, przy odpowiednio gładkich $R(x)$ i $f(x)$, wynoszą (por. wzór (3.57) dla białego MISE):

p	MISE $\hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N); p)$
2	$O(N^{-4-5}) \gg O(N^{-0.8})$
3	$O(N^{-6-7}) \gg O(N^{-0.86})$
4	$O(N^{-8-9}) \gg O(N^{-0.89})$
5	$O(N^{-10-11}) \gg O(N^{-0.91})$

Mozna się zatem spodziewać, że zastosowanie modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ z funkcjami falkowymi o wysokich numerach falkowych p jedynie nieznacznie poprawi (asymptotyczną) szybkość zbieżności do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, w stosunku do ich odpowiedników z funkcjami falkowymi o małych numerach p (por. też wyniki badań symulacyjnych w rozdz. 5).

B. W czystych sytuacjach braku informacji wstępnej o $R(x)$ i $f(x)$ można jednak na ogół przyjąć, że funkcje te posiadają skończoną liczbę punktów nieciągłości i są odcinkami gładkie z $\bar{g} > 1=2$. Wówczas (por. własność RG8) przy regule doboru skali (3.58) modele empiryczne zbiegają globalnie (w sensie białego MISE) do nieliniowości $R(x)$ z gwarantowaną szybkością $O(N^{-1-2})$ (por. (3.59)), niezależną od liczby punktów nieciągłości w tej nieliniowości i w funkcji gęstości wejścia $f(x)$ (w przedziale $S = [a; b]$).

Ponieważ gwarantowana szybkość zbieżności nie zależy teraz także od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p), to przyjmując, jako dodatkowe kryterium wyboru, łatwość implementacji modeli, należy stwierdzić, że najkorzystniejszy wybór stanowi w takich sytuacjach (tj. przy braku informacji apriorycznej) modele oparte o falki Haara (por. (1.10) i zob. rozdz. 4; por. także [49], [70]-[71] i [108]).

Zauważmy jednak, że biorąc pod uwagę punktowe (lokalne) własności empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K; p)$ (por. własność RG2) zastosowanie funkcji falkowych o wyższych numerach pozwala tym modelom lepiej „dopasować” się do identyfikowanej nieliniowości w przedziałach jej ciągłości (por. (3.52) i (3.53)). Szczególnie widoczne jest to w przypadku, gdy $R(x)$ i $f(x)$ są pomiędzy punktami skoków wielomianami. Wówczas bowiem (zob. uwaga 3.6), jeśli numer falkowy jest większy od stopnia tych wielomianów, znika obciążenie modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ (por. wzory (3.29) i (3.49)).

3.2 Algorytm bezpośredni

Jedną z cech przedstawionego w poprzednim punkcie algorytmu ilorazowego jest zależność zbieżności i szybkości zbieżności wyznaczanych przez niego modeli empirycznych

$R_G(x; K; p)$ od własności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$. Zależność ta wynika z postaci funkcji $G(x)$ identyfikowanej w pierwszym kroku algorytmu ilorazowego, która jest iloczynem nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzór (3.1) w punkcie 3.1).

W szczególności, gdy na przykład $f(x)$ jest nieciągła, gwarantowana szybkość średniokwadratowej zbieżności takich modeli jest co najwyżej rzędu $O(N^{-1/2})$, nawet jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest wielokrotnie różniczkowalna (z ∞) a zastosowane w modelach falki mają wysoki numer p (zob. twierdzenie 3.6 na str. 44 oraz własności RG7-RG8).

Proponowany poniżej algorytm identyfikacji jest pozbawiony tej wady i wyznaczone przez niego modele empiryczne zbiegają do nieliniowości $R(x)$ niezależnie od własności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Podstawa teoretyczna. Klasa teoretycznych modeli falkowych (dla różnych p), stanowiąca podstawę algorytmu identyfikacji, składa się obecnie z modeli będących aproksymacjami identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. (1.25) w punkcie 1.2 oraz wzory (3.2) i (3.3) definiujące modele teoretyczne $R_G(x; K; p)$)

$$R_R(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}^0(M;p)}^{n_{\max}^0(M;p)} \alpha_{Mn}^{p0} \cdot \tilde{R}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}^0(m;p)}^{l_{\max}^0(m;p)} \beta_{ml}^{p0} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.60)$$

w których współczynniki α_{Mn}^{p0} i β_{ml}^{p0} są (bezpośrednio) współczynnikami falkowymi identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. z postaciami współczynników modeli $G(x; K; p)$ daną wzorem (3.4))

$$\alpha_{Mn}^{p0} = \frac{\int_{-a}^a R(x) \cdot \tilde{R}_{Mn}^p(x) dx}{\int_{-a}^a R(x)^2 dx} \quad \text{oraz} \quad \beta_{ml}^{p0} = \frac{\int_{-a}^a R(x) \tilde{A}_{ml}^p(x) dx}{\int_{-a}^a R(x)^2 dx} \quad (3.61)$$

Granice sumowań w modelach $R_R(x; K; p)$ wynoszą (por. wzory w (3.5))

$$\begin{aligned} n_{\min}^0(M; p) &= \lfloor 2^M a \rfloor & \text{oraz} & \quad l_{\min}^0(m; p) = \lfloor d 2^m a \rfloor \\ n_{\max}^0(M; p) &= \lfloor 2^M b \rfloor & \text{oraz} & \quad l_{\max}^0(m; p) = \lfloor b 2^m c \rfloor \end{aligned} \quad (3.62)$$

gdzie a ; b są granicami przedziału S .

Algorytm identyfikacji. Modele empiryczne. Wobec nieznanosti nieliniowości $R(x)$, zadaniem algorytmu jest oszacowanie (estymacja) nieznanych współczynników α_{Mn}^{p0} i β_{ml}^{p0} modeli $R_R(x; K; p)$ (dla dowolnego p) na podstawie zbioru pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ wejścia-wyjścia systemu (por. punkt 2.2 w rozdz. 2).

Wykorzystując w tym celu spostrzeżenie, że przy założeniach Z1-Z5, dla $x \in S = [a; b]$ zachodzą poniższe tożsamości (por. wzory w (3.6))

$$\begin{aligned} \alpha_{Mn}^{p0} &= \frac{\int_{-a}^a R(x) \cdot \tilde{R}_{Mn}^p(x) \frac{1}{f(x)} f(x) dx}{\int_{-a}^a R(x)^2 dx} = E \left[R(x_1) \frac{\tilde{R}_{Mn}^p(x_1)}{f(x_1)} \right] = \\ &= E \left[[R(x_1) + \varepsilon_1 + z_1] \frac{\tilde{R}_{Mn}^p(x_1)}{f(x_1)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E y_1 \frac{y_{Mn}^p(x_1)}{f(x_1)} \\
{}_{ml}^{p0} &= \int_{\frac{1+(1-p)}{2^m}}^{\frac{1+p}{2^m}} R(x) \tilde{A}_{ml}^p(x) \frac{1}{f(x)} f(x) dx = E R(x_1) \frac{\tilde{A}_{ml}^p(x_1)}{f(x_1)} = \\
&= E [R(x_1) + z_1 + z_1] \frac{\tilde{A}_{ml}^p(x_1)}{f(x_1)} = \\
&= E y_1 \frac{\tilde{A}_{ml}^p(x_1)}{f(x_1)} \quad (3.63)
\end{aligned}$$

możemy, dzięki znajomości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, oszacować te współczynniki za pomocą następujących estymatorów (współczynników empirycznych) (por. estymatory w (3.7))

$${}_{Mn}^{p0} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k y_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \Delta_{ml}^{p0} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \tilde{A}_{ml}^{p0}(x_k) \quad (3.64)$$

gdzie

$$y_{Mn}^p(x_k) = \frac{y_{Mn}^p(x_k)}{f(x_k)} \quad \text{oraz} \quad \tilde{A}_{ml}^{p0}(x_k) = \frac{\tilde{A}_{ml}^p(x_k)}{f(x_k)} \quad (3.65)$$

otrzymując w ten sposób klasę (dla różnych p) empirycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$, odpowiadających klasie modeli teoretycznych (3.60) (por. z postacią modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ daną wzorami (3.8) i (3.9))

$$\hat{R}_R(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}^0(M;p)}^{n_{\max}^0(M;p)} {}_{Mn}^{p0} y_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{m=1} \Delta_{ml}^{p0} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.66)$$

Uzyskaliśmy zatem następujący bezpośredni algorytm identyfikacji (algorytm tego typu dla klasycznych układów funkcji ortogonalnych badany był w pracy [43]):

Algorytm bezpośredni:

Krok 1. Na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ oblicz oszacowania ${}_{Mn}^{p0}$ i Δ_{ml}^{p0} według wzorów (3.64) i (3.65).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ wstawiając obliczone oszacowania do wzoru (3.66).

3.2.1 Analiza wierności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$

Analizę wierności modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ rozpoczniemy od uwagi, że współczynniki empiryczne ${}_{Mn}^{p0}$ i Δ_{ml}^{p0} w (3.64) są dobrze zdefiniowane, gdy funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest dodatnia (por. wzory (3.63) i (3.65)). A zatem, na mocy założenia Z1, gwarantującego też wierność $f(x)$ jedynie w przedziale $S = [a; b]$, nośniki funkcji falkowych $y_{Mn}^p(x)$ i $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ odpowiadające współczynnikom empirycznym ${}_{Mn}^{p0}$ i Δ_{ml}^{p0} modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$, muszą zawierać się w tym przedziale. Należy to następująco ograniczenia na indeksy

translacji n i l funkcji falkowych w tych modelach (por. Rys. 3.7)

$$\frac{n + (2^p i - 1)}{2^M} > a \quad \text{oraz} \quad \frac{l + (1 - i)p}{2^m} > a$$

$$\frac{n + (2^p i - 1)}{2^M} \leq b \quad \text{oraz} \quad \frac{l + p}{2^m} \leq b$$

i prowadzi do podanych we wzorze (3.62) granic sumowań w modelach teoretycznych i empirycznych.

Przed przystąpieniem do dalszej analizy pokazemy, że z powyższego wynikają w ogólności (dla dowolnego numeru falkowego p) następujące konsekwencje:

- ² zbieżność i gwarantowane szybkości zbieżności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ zachodzą jedynie w podprzedziale przedziału S ,
- ² nośniki modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ są mniejsze niż przedział $S = [a; b]$, stąd niektóre pomiary ze zbioru $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ nie są wykorzystywane przez algorytm bezpośredni przy wyznaczaniu tych modeli.

Przedział użyteczny modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$. Analiza błędów obciążenia modeli falkowych opiera się na własności falkowej analizy wielorozdzielczej (1.3) w rozdz. 1 mówiącej, że zbiór funkcji falkowych (por. (1.14)-(1.16) w rozdz. 1)

$$f(\cdot)_{M_n}^p(x); \tilde{A}_{ml}^p(x); M; m; n; l \in \mathbb{Z} : m > Mg \quad (3.67)$$

jest bazą zupełną przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, a zatem pozwala przedstawić dowolną funkcję całkowalną z kwadratem na całej prostej \mathbb{R} (por. wzory (1.17) i (1.18) w rozdz. 1). Jak jednak stwierdziliśmy powyżej w przypadku modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ do dyspozycji mamy jedynie zbiór funkcji falkowych o postaci

$$\left(f(\cdot)_{M_n}^p(x); \tilde{A}_{ml}^p(x); M; m; n; l \in \mathbb{Z} : \begin{array}{l} n = n_{\min}^0(M; p); \dots; n_{\max}^0(M; p) \\ l = l_{\min}^0(m; p); \dots; l_{\max}^0(m; p) \end{array} ; m > M \right) \quad (3.68)$$

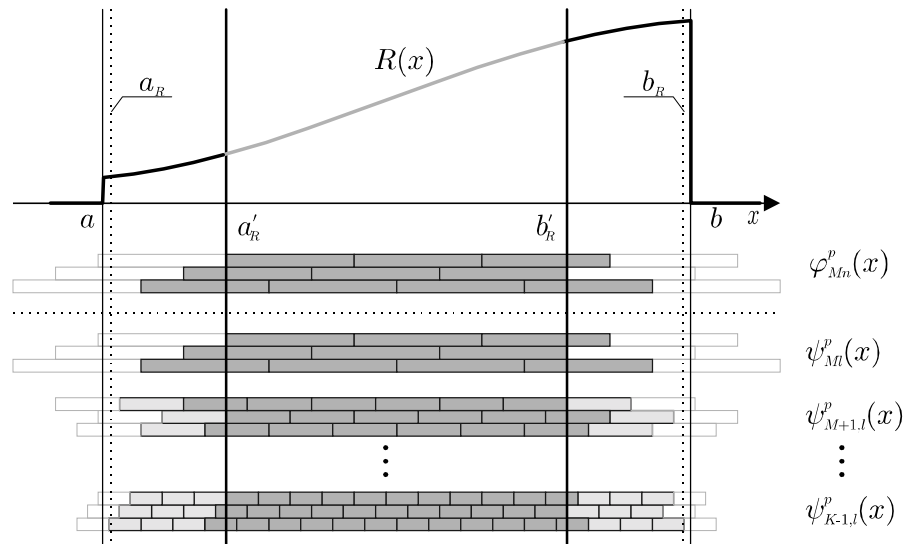
Zbiór ten, ze względu na zwartość nośników funkcji falkowych Daubechies, jest bazą zupełną przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem jedynie w pewnym przedziale, w którym spośród wszystkich funkcji falkowych ze zbioru (3.67) aktywne są tylko te, które należą do zbioru wyznaczonego w (3.68). Granice tego przedziału, oznaczane dalej przez a_R^0 i b_R^0 , można zatem wyznaczyć na podstawie poniższych równości (por. wzory w (3.62), postaci nośników funkcji falkowych dane w (1.11), rozdz. 1 oraz Rys. 3.7)

$$a_R^0 = \frac{n_{\min}^0(M; p) + 1 + (2^p i - 1)}{2^M} \quad \text{oraz} \quad b_R^0 = \frac{n_{\max}^0(M; p) + 1}{2^M}$$

z których otrzymujemy, że

$$S_R^0 \stackrel{\text{def}}{=} [a_R^0; b_R^0] = \left[\frac{n_{\min}^0(M; p) + 1 + (2^p i - 1)}{2^M}; \frac{n_{\max}^0(M; p) + 1}{2^M} \right] \quad (3.69)$$

Przedział $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$ będziemy nazywać przedziałem użytecznym modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$. Zwróćmy uwagę, że jest on w ogólności większy od przedziału S .

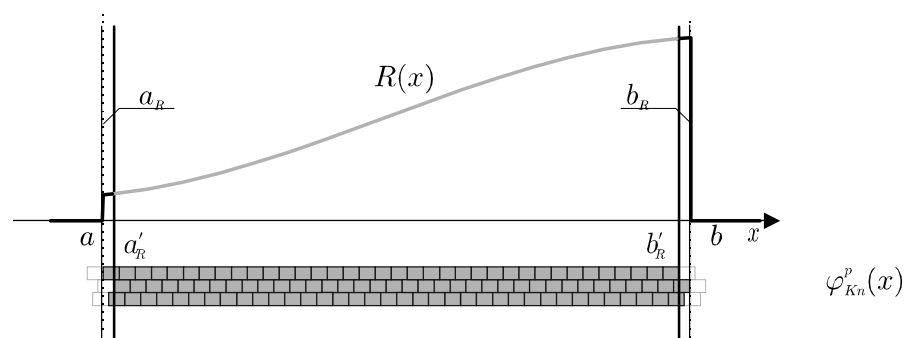


Rys. 3.7 Algorytm bezpośredni (wyznaczający empiryczne modele falkowe $\hat{R}_R(x; K; p)$) pozwala identyfikować nieliniowość $R(x)$ w przedziale $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, który jest w ogólności większy niż przedział $S = [a; b]$ (na rysunku przedstawiono przykładowy model $\hat{R}_R(x; K; p)$ z $p = 2$). Szare prostokąty odpowiadają nośnikom funkcji falkowych tego modelu

Zauważmy także, że na mocy własności (A.2) funkcji b_i i d_i (Dodatek A.1, str. 114), długość tego przedziału rośnie ze wzrostem skali M (por. wzory w (3.42)), ponieważ:

$$a_R^0 - a < \frac{2^M a + 2p - 1}{2^M} - a = \frac{2p - 1}{2^M} \quad \text{oraz} \quad b_i - b_R^0 < b_i - \frac{2^M b_i - 2p + 1}{2^M} = \frac{2p - 1}{2^M} \quad (3.70)$$

i (asymptotycznie, $M \rightarrow \infty$) osiąga długość przedziału S (dla dowolnych p). Stąd, aby za pomocą algorytmu bezpośredniego móc identyfikować nieliniowość $R(x)$ w jak najszerszym przedziale S_R^0 , należy w empirycznych modelach falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ przyjmować skalę $M = K$ (por. Rys. 3.8).



Rys. 3.8 Przedział użyteczny S_R^0 modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ osiąga (w danej skali K) największą długość (nieliniowość $R(x)$ jest identyfikowana przez algorytm bezpośredni w najszerszym podprzedziale $S_R^0 \approx \frac{1}{2} S$) w przypadku, gdy parametry skali M i K w tych modelach są równe (model wykorzystuje tylko funkcje skalujące $\psi_{K,n}^p(x)$) (por. z Rys. 3.7)

Nośnik modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$. Nośnik modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ jest dany następującym wzorem

$$\text{supp } \hat{R}_R(x; K; p) = \bigcap_{n=n_{\min}^0(M;p)}^{n_0^{\text{mir}}(M;p)} \text{supp } \hat{R}_{Mn}^p(x) \cap \bigcap_{m=M}^{m=K} \bigcap_{l=l_{\min}^0(m;p)}^{l_0^{\text{mir}}(m;p)} \text{supp } \hat{A}_{ml}^p(x)$$

a zatem, przy granicach sumowań podanych we wzorze (3.62) i przy uwzględnieniu postaci nośników odpowiednich funkcji falkowych $\hat{R}_{Mn}^p(x)$ i $\hat{A}_{ml}^p(x)$, jest równy (por. wzór (1.11) w punkcie 1.1)

$$\begin{aligned} \text{supp } \hat{R}_R(x; K; p) &= \bigcap_{n=d2^M a^e}^{b2^M b^e} \bigcap_{m=K}^{m=K} \bigcap_{l=d2^m a^{e_j+1+p}}^{b2^{m-1} b^{c_j+p}} \bigcap_{l=d2^{K-i-1} a^{e_j+1+p}}^{b2^{K-i-1} b^{c_j+p}} = \\ &= \bigcap_{l=d2^{K-i-1} a^{e_j+1+p}}^{b2^{K-i-1} b^{c_j+p}} = \frac{d2^{K-i-1} a^e}{2^{K-i-1}}; \frac{b2^{K-i-1} b^c}{2^{K-i-1}} = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} S_R = [a_R; b_R] \end{aligned} \tag{3.71}$$

a zatem jest ogólnie węższy od przedziału $S = [a; b]$ (zob. Rys. 3.7). W rezultacie pomiary, w których skądś wejściowa x_k leży na brzegach $a; 2^i (K-i) 2^{K-i} a$ oraz $2^i (K-i) 2^{K-i} b; b$ przedziału S , nie są brane pod uwagę przez rozważany algorytm podczas wyznaczania współczynników modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$. Dla porównania, w przypadku modelu z Rys. 3.8 (tj. dla $M = K$) nośnik tego modelu wynosi

$$\text{supp } \hat{R}_R(x; K; p) = \bigcap_{n=d2^K a^e}^{b2^K b^e} = \frac{d2^K a^e}{2^K}; \frac{b2^K b^c}{2^K}$$

a zatem odpowiednie przedziały brzegowe są mniejsze (i mniejsza może być także liczba pomiarów niewykorzystanych przez algorytm identyfikacji).

Uwaga 3.9 Dla modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ opartych o funkcje Haara ($p = 1$), w przypadku, gdy granice $a; b$ przedziału S leżą na siatce binarnej $B_H; H \in M$ (por. definicja w Dodatku A.2, str. 114), zachodzi (por. wzory (3.69) i (3.71))

$$a_R^0 = a_R = a \quad \text{oraz} \quad b_R^0 = b_R = b$$

i algorytm bezpośrednio identyfikuje w takim przypadku nieliniowość $R(x)$ w całym przedziale S , z wykorzystaniem wszystkich pomiarów ze zbioru $f(x_k; y_k) g_{k=1}^N$.

Zbieżność oszacowań $\hat{\otimes}_{Mn}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{p0}$

Na mocy tożsamości (3.63) oraz zależności Z3-Z5, estymatory $\hat{\otimes}_{Mn}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{p0}$ (dane wzorem (3.64)) są nieobciążone

$$E \hat{\otimes}_{Mn}^{p0} = \otimes_{Mn}^{p0} \quad \text{oraz} \quad E \hat{\Delta}_{ml}^{p0} = \Delta_{ml}^{p0} \tag{3.72}$$

Ponadto, ich wariancje spełniają następujące oszacowania

$$\text{var } \hat{\otimes}_{Mn}^{p0} \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}}^0 + A_{\text{cov}}^0) \quad \text{oraz} \quad \text{var } \hat{\Delta}_{mn}^{p0} \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}}^0 + B_{\text{cov}}^0) \tag{3.73}$$

gdzie $A_{var}^0; B_{var}^0$ oraz $A_{cov}^0; B_{cov}^0$ są dodatnimi stałymi zaleznymi od części dynamicznej systemu i wartości zakłóceń zewnętrznych (zob. (B.31) i (B.32) w Dodatku B.5).

Z wartości (3.72) i (3.73) wnioskujemy, że (por. z lematem 3.1):

Lemat 3.7 Współczynniki $\hat{\theta}_{Mn}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{p0}$ modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbiegają średniokwadratowo do współczynników θ_{Mn}^{p0} i Δ_{ml}^{p0} modeli teoretycznych $R_R(x; K; p)$ wraz z rosnącą liczbą pomiarów N . Ich błędy średniokwadratowe spełniają nierówności

$$\begin{aligned} \text{MSE } \hat{\theta}_{Mn}^{p0} &= \text{var } \hat{\theta}_{Mn}^{p0} \leq \frac{1}{N} (A_{var}^0 + A_{cov}^0) \\ \text{MSE } \hat{\Delta}_{ml}^{p0} &= \text{var } \hat{\Delta}_{ml}^{p0} \leq \frac{1}{N} (B_{var}^0 + B_{cov}^0) \end{aligned}$$

A zatem, podobnie jak współczynniki empiryczne $\hat{\theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\Delta}_{ml}^p$ modeli $\hat{G}(x; K; p)$, również powyższe charakteryzują się wartościami $V1-V3$ (str. 29), zbiegając przy tym bezpośrednio do współczynników rozwinięcia falkowego identyfikowanej nieliniowości $R(x)$.

A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Analiza zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ przebiega podobnie jak przeprowadzona w punkcie 3.1.1 analiza zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ wyznaczanych za pomocą algorytmu ilorazowego.

Rozpoczniemy ją od dekompozycji punktowego błędów średniokwadratowego modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w ustalonym punkcie x

$$\begin{aligned} \text{MSE } \hat{R}_R(x; K; p) &= E \left[R(x) - \hat{R}_R(x; K; p) \right]^2 = \\ &= E \left[R(x) - E \hat{R}_R(x; K; p) \right]^2 + E \left[E \hat{R}_R(x; K; p) - \hat{R}_R(x; K; p) \right]^2 = \\ &= \text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p) + \text{var } \hat{R}_R(x; K; p) \end{aligned} \quad (3.74)$$

na dwa składniki błędów modelu: kwadrat obciążenia $\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p)$ oraz wariancję wyjścia modelu $\text{var } \hat{R}_R(x; K; p)$.

Wariancja wyjścia modelu $\text{var } \hat{R}_R(x; K; p)$. Z wartości (3.72) wynika, że modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K; p)$ są – dla poszczególnych K i p – nieobciążonymi estymatorami modeli teoretycznych $R_R(x; K; p)$ (por. wzór (3.13))

$$E \hat{R}_R(x; K; p) = R_R(x; K; p) \quad (3.75)$$

W konsekwencji zatem

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K; p) = E \left[R_R(x; K; p) - \hat{R}_R(x; K; p) \right]^2$$

Na podstawie obliczeń zawartych w Dodatku B.6 (str. 128) otrzymujemy, że w każdym punkcie $x \in S_R^0$ wariancja wyjścia modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K; p)$ spełnia nierówność

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K; p) \leq \frac{2^K}{N} C_{var}^0 \quad (3.76)$$

gdzie C_{var}^0 jest dodatnią stałą zależną od dynamiki systemu i zakłóceń zewnętrznych z_k . Podobnie zatem jak dla modelu $\hat{G}(x; K; p)$, rząd wariancji wyjścia modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ zależy tylko od liczby pomiarów N oraz przyjętych skal K modeli (por. (3.14) oraz wartości $V1-V3$, str. 29).

Obciążenie $\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p)$. Ze względu na (3.75) kwadrat obciążenia modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w punkcie x jest równy kwadratowi błędowi aproksymacji w tym punkcie nieliniowości $R(x)$ za pomocą jej falkowych modeli teoretycznych $R_R(x; K; p)$:

$$\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p) = \int_{\mathcal{H}} [R(x) - R_R(x; K; p)]^2 dP(x) \quad (3.77)$$

A zatem ma przyczyny jedynie natury deterministycznej i nie zależy od liczby pomiarów N . Błąd ten maleje do zera ze wzrostem skali K w tych punktach x , w których identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest ciągła (zob. [80, twierdzenie 2.1]), bez względu na zachowanie się w tym punkcie funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. (3.16)),

$$\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p) \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty \quad (3.78)$$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Dobierając parametr skali K tak, aby wzrost liczby pomiarów N powodował jednocześnie zmniejszanie się obu składowych błędów średniokwadratowego we wzorze (3.74) (por. z dyskusją na str. 30, dotyczącą warunków zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$), tj. aby

$$K = K^0(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad \frac{2^{K^0(N)}}{N} \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.79)$$

otrzymujemy następujące twierdzenie charakteryzujące warunki zbieżności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ (por. z twierdzeniem 3.1).

Twierdzenie 3.7 (Średniokwadratowa zbieżność punktowa) Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest ciągła w punkcie $x \in S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki w (3.79), to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie średniokwadratowo do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$

$$\text{MSE} \hat{R}_R(x; K^0(N); p) = \int_{\mathcal{H}} [R(x) - \hat{R}_R(x; K^0(N); p)]^2 dP(x) \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

Z powyższego twierdzenia wnioskujemy zatem, że zbieżność punktowa empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$ nie zależy od ciągłości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Z punktowej zbieżności średniokwadratowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ wynika ich punktowa zbieżność według prawdopodobieństwa (por. wniosek 3.1):

Wniosek 3.2 (Zbieżność punktowa wg prawdopodobieństwa) Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.7, modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K^0(N); p)$ zbiegają do nieliniowości $R(x)$ według prawdopodobieństwa, w każdym punkcie $x \in S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, w którym ta nieliniowość jest ciągła

$$\hat{R}_R(x; K^0(N); p) \xrightarrow{P} R(x) \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Aby wyznaczyć szybkość średniokwadratowej zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ przyjmijmy teraz następujące założenie o jej gładkości (por. założenie Z7, str. 34).

Z7⁰. Nieliniowość $R(x)$ należy do klasy

$$R(x) \in C^p[a_x; b_x] \quad [a_x; b_x] \in S_R^0; \quad p > 0$$

gdzie

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^p 2^K x_i^{2p+2}}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\sum_{i=1}^p 2^K x_i^{2p+1}}{2^K}$$

Zauważmy, że założenie to nie dotyczy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, która może być teraz dowolna (w zakresie podanym w założeniu Z1 w rozdz. 1).

Szybkość zbieżności błędów obciążenia $\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p)$. Korzystając teraz z oszacowania błędów obciążenia w ustalonym punkcie x , uzyskanego w Dodatku B.4 (str. 126) dla modeli $\hat{G}(x; K; p)$ otrzymujemy (przy podstawieniu $G(x) = R(x)$ oraz $\mu = \bar{\mu}$), że odpowiednie oszacowanie błędów obciążenia dla modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ wynosi

$$\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K; p) \leq 2^{2^0 K} C_{\text{bias}}^0 \quad (3.80)$$

gdzie $2^0 = \min f''$ i C_{bias}^0 jest dodatnią stałą (zależną od nieliniowości $R(x)$ i falk $\hat{A}_{ml}^p(x)$).

Na podstawie tej nierówności wnioskujemy, że przy założeniu Z7⁰ (por. własności B1-B4 modeli $\hat{G}(x; K; p)$, str. 35):

B1⁰. Wraz ze wzrostem skali K empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$, kwadrat ich błędów obciążenia maleje wykładniczo do zera w punktach ciągłości nieliniowości $R(x)$, przy dowolnej funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (spełniającej założenie Z1).

B2⁰. Szybkość zmniejszania się tego błędu zależy jedynie od gładkości nieliniowości $R(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p), natomiast nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

B3⁰. Wpływ na błąd obciążenia modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ w punkcie x ma gładkość nieliniowości $R(x)$ jedynie w otoczeniu tego punktu (w przedziale $[a_x; b_x]$).

B4⁰. Oszacowanie (3.80) jest prawdziwe dla wszystkich punktów x należących do przedziału $\left[\frac{b^{2^K} x_C}{2^K}; \frac{b^{2^K} x_{C+1}}{2^K} \right] \in S_R^0$.

Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$. Nierówności (3.76) i (3.80) pozwalają w następujący sposób oszacować asymptotyczny błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S_R^0$ (por. wzór (3.30)):

$$\text{MSE} \hat{R}_R(x; K; p) \leq 2^{2^0 K} + \frac{2^K}{N} C_{\text{MSE}}^0 \quad (3.81)$$

gdzie $C_{MSE}^0 = \max\{C_{bias}^0, C_{var}^0\}$. Minimalizacja tego oszacowania względem parametru skali K prowadzi do następującej reguły lokalnego doboru skali K modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ (w otoczeniu punktu x) dla dużej liczby obserwacji N (por. warunki (3.79) i reguły doboru skali (3.31) w modelach empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$)

$$K = K_{opt}^0(N) = \frac{1}{2^{\circ_0} + 1} \log_2 2^{\circ_0} N \quad (3.82)$$

Podstawiając ten wzór do oszacowania (3.81) otrzymujemy następujące twierdzenie (por. twierdzenie 3.2).

Twierdzenie 3.8 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej) Jeśli spełnione są warunki założenia Z7⁰, to w każdym punkcie x należącym do przedziału $\frac{b_{2^K} \times C}{2^K}, \frac{b_{2^K} \times C + 1}{2^K}$, błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$, przy skali K dobieranej według reguły (3.82), spełnia nierówność

$$MSE \hat{R}_R(x; K_{opt}^0(N); p) \leq N^{-\frac{2^{\circ_0}}{2^{\circ_0} + 1}} C_{MSE}^{R^{\circ_0}}; \quad \circ_0 = \min f^{\circ_0}; pg \quad (3.83)$$

gdzie $C_{MSE}^{R^{\circ_0}} = 2 \cdot (2^{\circ_0})^{2^{\circ_0} - (2^{\circ_0} + 1)} C_{MSE}^0$.

Z twierdzeń 3.7 i 3.8 wynikają następujące własności punktowe (w sensie zachowania się błędów średniokwadratowych MSE) empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ (por. z własnościami RG1-RG4 modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$, str. 42):

- RR1. Modele $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie jej ciągłości w przedziale $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, niezależnie od ciągłości w tych punktach funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.
- RR2. Szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ ze wzrostem liczby pomiarów N we wzorach (3.64) i (3.83) zależy od lokalnej (w przedziale $[a_x; b_x]$) gładkości nieliniowości $R(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p), natomiast nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.82)-(3.83)).
- RR3. Jeśli w przedziale $[a_x; b_x]$ nieliniowość $R(x)$ należy do klasy C°_0} , a zastosowane w modelu empirycznym $\hat{R}_R(x; K; p)$ falki mają numer $p > \circ_0$, to wówczas szybkość zbieżności błędów średniokwadratowych tych modeli osiąga asymptotycznie optymalną prędkość $O(N^{-\frac{2^{\circ_0}}{2^{\circ_0} + 1}})$ (por. Dodatek B.7, str. 129).
- RR4. Na wyznaczone w twierdzeniach 3.7 i 3.8 warunki i szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ nie wpływają ani struktura ani dynamika systemu (z klasy rozwiązywalnych systemów), ani też skorelowanie zakłóceń pomiarowych z_k .
- RR5. Przedziały $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, w których punktach może zachodzić zbieżność modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ jest, w ogólności, węższy niż przedział S . Różnica pomiędzy tymi przedziałami maleje ze wzrostem skali M (por. wzory (3.69) i (3.70)) (i dla przyjętej skali K modeli jest najmniejsza gdy $M = K$).

Ponizsze twierdzenie określa szybkość zbieżności punktowej empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ według prawdopodobieństwa (por. twierdzenie 3.3).

Twierdzenie 3.9 (Szybkość zbieżności punktowej wg prawdopodobieństwa)
 Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.8, to dla błęd bezwzględny modelu empirycznych $\hat{R}_R(x; K_{opt}^0(N); p)$ zachodzi asymptotycznie w każdym punkcie $x \in \frac{b_{2^k} \times c; b_{2^k} \times c + 1}{2^k}$, następujące oszacowanie:

$$\| \hat{R}_R(x; \hat{R}_R(x; K_{opt}^0(N); p) - \mu \| = O \left(N^{-\frac{1}{2^0+1}} \right) \quad (3.84)$$

według prawdopodobieństwa.

Dowód. Dowód twierdzenia otrzymujemy po zastosowaniu twierdzenia 2.19 z pracy [50, twierdzenie 3, str. 449], cytowanego w Dodatku B.8, str. 129. Podstawiając w nim $g(x) = R(x)$, $g_N(x) = \hat{R}_R(x; K_{opt}^0(N); p)$ oraz $\hat{f}_N(x) = f(x) = I_S(x)$ i przyjmując $s_g = 2^0 = (2^0 + 1)$ oraz $s_f = 1$, otrzymujemy (3.84). ■

Otrzymujemy zatem kolejną własność:

RR3a. Jeśli zastosowane w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ funkcje falkowe mają numer $p > 1$, to wówczas modele te zbiegają punktowo do nieliniowości $R(x)$ z prędkością $O \left(N^{-\frac{1}{2^0+1}} \right)$, według prawdopodobieństwa (por. własność RR3).

B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Badanie zachowania się modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w sensie globalnego (całkowego) błęd średniokwadratowego MISE opiera się na dekompozycji tego błęd na składowe zintegrowanego kwadratu obciążenia ISB $\hat{R}_R(x; K; p)$ oraz zintegrowanej wariancji wyjścia IV $\hat{R}_R(x; K; p)$ (por. z dyskusją dotyczącą modeli $\hat{G}(x; K; p)$, str 3.1.1).

Błęd ten dla modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ definiujemy w przedziale $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$:

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K; p) = E \int_{S_R^0}^h R(x; \hat{R}_R(x; K; p))^2 dx = \text{ISB } \hat{R}_R(x; K; p) + \text{IV } \hat{R}_R(x; K; p) \quad (3.85)$$

Podobnie jak dla modeli $\hat{G}(x; K; p)$ w algorytmie ilorazowym, warunki i szybkość całkowej zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbadamy dla ciągłych i nieciągłych (ze skończoną liczbą nieciągłości typu skok) nieliniowości $R(x)$.

Wariancja IV $\hat{R}_R(x; K; p)$. Składowa IV $\hat{R}_R(x; K; p)$ dla $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$ można oszacować korzystając z oszacowania punktowej wariancji modelu empirycznego podanego we wzorze (3.76) (por. (3.34))

$$\text{IV } \hat{R}_R(x; K; p) = \int_{S_R^0}^h \text{var } \hat{R}_R(x; K; p) dx \leq \frac{2^k}{N} C_{IV}^0 \quad (3.86)$$

gdzie $C_{IV}^0 = (b_R^0 - a_R^0) C_{var}^0$.

Ociążenie ISB $\hat{R}_R(x; K; p)$. Ze względu na nieobciążoność estymatorów $\hat{\theta}_{Mn}^{(p)}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{(p)}$ (por. wzory w (3.72)), a zatem też wyjścia modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K; p)$ w stosunku do jego teoretycznego odpowiednika $R_R(x; K; p)$ (por. wzór (3.75)) całkowite obciążenie ISB $\hat{R}_R(x; K; p)$ jest równe całkowitemu błędowi aproksymacji identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ przez model teoretyczny $R_R(x; K; p)$ (por. wzór (3.35))

$$\begin{aligned} \text{ISB } \hat{R}_R(x; K; p) &= \int_{S_R^0}^Z \int_h R(x) - E \hat{R}_R(x; K; p) \, dx \\ &= \int_{S_R^0} [R(x) - R_R(x; K; p)]^2 dx = \text{ISE } R_R(x; K; p) \end{aligned} \quad (3.87)$$

a zatem, podobnie jak składowa obciążenia biał $\hat{R}_R(x; K; p)$ biał punkowego, ma przyczyny natury deterministycznej. Na mocy własności (1.21) w rozdz. 1 falkowej analizy wielorozdzielczej, obciążenie ISB $\hat{R}_R(x; K; p)$ maleje do zera ze wzrostem skali K modeli, dla dowolnych $R(x)$ spełniających założenie Z_2 z rozdz. 2 i dla dowolnego numeru falkowego p (por. wzór (3.36))

$$\text{ISB } \hat{R}_R(x; K; p) \rightarrow 0; \text{ gdy } K \rightarrow \infty \quad (3.88)$$

Zbieżność całkowita modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Opierając się na rozumowaniu przedstawionym w trakcie analizy warunków zbieżności całkowitej modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ (zob. str. 37) i dotyczących doboru skali K w zależności od liczby pomiarów otrzymujemy, że w przedziale użytecznym S_R^0 falkowe modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbiegają w sensie błędów MISE (danego wzorem (3.85)) do dowolnej, ograniczonej w przedziale S nieliniowości $R(x)$, jeśli ich skala K zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki

$$K = K^0(N) \rightarrow \infty \text{ oraz } 2^{K^0(N)} = N \rightarrow 0 \text{ gdy } N \rightarrow \infty \quad (3.89)$$

Otrzymaliśmy zatem następujące twierdzenie (por. twierdzenie 3.4).

Twierdzenie 3.10 (Średniokwadratowa zbieżność całkowita) Jeśli skala K modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki (3.89), to dla dowolnego p modele te zbiegają w przedziale $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, gdzie (por. (3.69)):

$$a_R^0 = \frac{\int_{S_R^0} 2^M a + 2p \, dx}{2^M} \text{ oraz } b_R^0 = \frac{\int_{S_R^0} 2^M b + 2p \, dx}{2^M}$$

do nieliniowości $R(x)$, w sensie całkowitego błędów średniokwadratowego (MISE)

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K^0(N); p) = E \int_{S_R^0} \int_h R(x) - \hat{R}_R(x; K^0(N); p) \, dx \rightarrow 0 \text{ przy } N \rightarrow \infty$$

Zauważmy, że zbieżność całkowita modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K^0(N); p)$ nie zależy od ciągłości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$.

Szybkość zbieżności całkowitej modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Jako pierwszy rozpatrzmy przypadek, gdy identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest ciągła w przedziale $S = [a; b]$.

a) Nieliniowość $R(x)$ ciągła w przedziale $S = [a; b]$. Do oszacowania błędów całkowego modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w przypadku ciągłej nieliniowości $R(x)$ możemy wykorzystać wyniki uzyskane w trakcie analizy błędów punktowych tych modeli. Ponieważ dla dowolnego przedziału $S^0 \subset S_R^0$ zachodzi

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K; p) = \int_{S^0} \text{MSE } \hat{R}_R(x; K; p) dx$$

to dla błędów całkowego modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ otrzymujemy, jako wniosek z twierdzenia 3.8, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.11 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej) ($R(x)$ ciągła) Jeśli $R(x) \in C^1[a; b]$ oraz skale modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ dobierane są według reguły (por. (3.82))

$$K = K_{\text{opt}}^0(N) = \frac{1}{2^{\rho_0} + 1} \log_2 2^{\rho_0} N; \quad \rho_0 = \min f''; pg \quad (3.90)$$

to w przedziale $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0]$, ich całkowe błędy średniokwadratowe są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K_{\text{opt}}^0(N); p) = E \int_{S_R^0} |R(x) - \hat{R}_R(x; K_{\text{opt}}^0(N); p)|^2 dx \leq N^{-\frac{2\rho_0}{2\rho_0+1}} C_{\text{MISE}}^{R^0} \quad (3.91)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{R^0} = (b_R^0 - a_R^0) C_{\text{MISE}}^{R^0}$.

Powyzsze twierdzenie gwarantuje modelom empirycznym $\hat{R}_R(x; K; p)$ szybkość zbieżności rzędu $O(N^{-\frac{2\rho_0}{2\rho_0+1}})$, gdzie $\rho_0 = \min f''; pg$. Zauważmy, że gwarantowana szybkość zbieżności zachodzi przy dowolnych funkcjach gęstości wejścia $f(x)$ spełniających założenie Z1 z rozdz. 1.

b) Nieliniowość $R(x)$ nieciągła w skończonej liczbie punktów. Na mocy wzoru (3.86) rząd zintegrowanej wariancji wyjścia modelu $\hat{R}_R(x; K; p)$ zależy jedynie od liczby pomiarów N i przyjętej w modelu skali K . A zatem do ustalenia gwarantowanej szybkości całkowej zbieżności średniokwadratowej modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ wystarczy zbadać zachowanie się obciążenia $\text{ISB } \hat{R}_R(x; K; p)$.

Przyjmijmy teraz następujące założenie dotyczące identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. założenie Z7a na str. 39):

Z7a⁰ Nieliniowość $R(x)$ jest w przedziale S odcinkami gładka, tj. ma w tym przedziale skończoną, ale nieznaną liczbę punktów nieciągłości typu skok i poza nimi należy do klasy C^1 .

Korzystając z oszacowania zintegrowanego obciążenia modeli $\hat{G}(x; K; p)$ (por. wzór (3.45), str. 40) dla przypadku nieciągłej funkcji $G(x)$ otrzymujemy, po podstawieniu $f(x) = I_S(x)$, że zintegrowane obciążenie modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ przy założeniu Z7a⁰ spełnia następującą nierówność

$$\text{ISB } \hat{R}_R(x; K; p) \leq 2^{2\rho_0 K} C_{\text{ISB}}^{R^0}, \quad \rho_0 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$$

gdzie $C_{ISB}^{R\%}$ jest dodatnią stałą zależną od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i zastosowanych w modelu funkcji falkowych $\tilde{A}_{mi}^p(x)$.

Powyzsze, wraz z oszacowaniem całkowitej wariancji w IV $\hat{R}_R(x; K; p)$ we wzorze (3.86), prowadzi do następującej nierówności charakteryzującej średniokwadratowy błąd całkowity empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w przypadku nieciągłej nieliniowości $R(x)$ (por. (3.46))

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K; p) \leq 2^{2\%K} C_{ISB}^{R\%} + \frac{2^K}{N} C_{IV}^0 \leq 2^{2\%K} + \frac{2^K}{N} C_{MISE}^{R\%} \quad (3.92)$$

gdzie $C_{MISE}^{R\%} = \max_{C_{IV}^0} C_{ISB}^{R\%}$. Optymalizując to oszacowanie względem parametru skali K otrzymujemy, że (por. (3.47))

$$K = K_{opt}^0(N) = \frac{1}{2\% + 1} \log_2 2\%N \quad (3.93)$$

Po wstawieniu powyższej reguły do wzoru (3.92) otrzymujemy następujące twierdzenie (por. twierdzenie 3.6).

Twierdzenie 3.12 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowitej) ($R(x)$ nieciągła) Jeśli nieliniowość $R(x)$ ma w przedziale $S = [a; b]$ dowolną skończoną liczbę punktów nieciągłości (typu skok), a pomiędzy punktami nieciągłości należy do klasy $C^{\%}$; $\% > 0$ oraz jeśli skale modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ dobierane są według wzoru (3.93), to w przedziale S_R^0 błędy średniokwadratowe tych modeli są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K_{opt}^0(N); p) = E \int_{S_R^0}^Z \int_h^h R(x) | \hat{R}_R(x; K_{opt}^0(N); p) - R(x) |^2 dx \leq N^{-\frac{2\%}{2\%+1}} C_{MISE}^{R\%} \quad (3.94)$$

gdzie $\% = \min_{f \in \mathcal{F}} \%$; $1=2g$ oraz $C_{MISE}^{R\%} = 2 C_{MISE}^{R\%}$.

Z twierdzeń 3.10-3.12 wnioskujemy następujące własności falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ w sensie zachowania się błędów całkowitych MISE (por. własności RR1-RR5 oraz własności RG4-RG8 modelu $\hat{R}_G(x; K; p)$):

- RR6. Przy założeniach twierdzenia 3.10, modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbiegają w przedziale $S_R^0 = [a_R^0; b_R^0)$ do dowolnych (w tym nieciągłych) nieliniowości $R(x)$.
- RR7. Szybkość zbieżności modelu $\hat{R}_R(x; K; p)$ zależy od gładkości nieliniowości $R(x)$ w przedziale S i od zastosowanych w nim funkcji falkowych, ale nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.90)-(3.91) i (3.93)-(3.94)).
- RR8. Jeśli zastosowane w modelu empirycznym falki mają numer $p > \%$, to wówczas model $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbliża się do nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną prędkością $O(N^{-\frac{2\%}{2\%+1}})$ przy dowolnych $f(x)$ spełniających założenie Z1 (por. Dodatek B.7, str. 129 i własności RR3 oraz RG3).
- RR9. Oszacowanie (3.94) gwarantuje w praktycznych zastosowaniach (dla $\% > 1=2$) minimalną szybkość zbieżności modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ rzędu $O(N^{-\frac{1}{1+2\%}})$, niezależną od numeru falki p (i gładkości funkcji gęstości wejścia $f(x)$).

RR10. Na szybkość zbieżności nie wpływają (z dokładnością do stałych) ani struktura systemu (z klasy rozważanych systemów) ani jego dynamika, ani też skorelowanie zakłóceń z_k (por. własności RR4 oraz RG4).

Przykłady. Dla nieliniowości $R(x)$ odcinkami stałych, błąd (3.94) maleje z gwarantowaną szybkością rzędu $O^1 N^{i-1-2}$ i nie zależy od zastosowanych w modelach $\hat{R}_R(x; K; p)$ funkcji falkowych i gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzór (3.93)).

Jeśli $R(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna (należy np. do klasy $C^{2.5}[a; b]$), a funkcja gęstości $f(x)$ jest nieciągła, to wówczas modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K; p)$ oparte o falek Hara (p = 1) zbiegają do nieliniowości $R(x)$ z gwarantowaną prędkością $O^1 N^{i-2-3}$, która przy zastosowaniu falek o numerze $p > 3$ wzrasta do asymptotycznie optymalnej (wynoszącej tu $O^1 N^{i-5-6}$ – por. wzory (3.90)-(3.91) i własność RR8). Natomiast modele $\hat{R}_G(x; K; p)$ zbiegają w obu przypadkach (zarówno dla $p = 1$ jak i $p = 3$) ze znacznie mniejszą gwarantowaną szybkością $O^1 N^{i-1-2}$ (zob. wzory (3.58)-(3.59)), niezależną od zastosowanych funkcji falkowych (numeru p).

C. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_R(x; K; p)$

Na podstawie przeprowadzonej analizy i podanych przykładów należy stwierdzić, że wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ otrzymywanych za pomocą algorytmu ilorazowego (por. str. 45) można odnieść również do modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ uzyskiwanych za pomocą algorytmu bezpośredniego. Jednakże, ze względu na niezależność własności (warunków i szybkości zbieżności) modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, dobór jest ten podyktowany jedynie własnościami identyfikowanej nieliniowości $R(x)$.

Zwróćmy jednakże uwagę, że zastosowanie w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ funkcji falkowych o wysokim numerze p wiąże się (w praktycznych sytuacjach – tj. przy skończonej skali $M \leq K$) ze zmniejszeniem przedziału użytecznego S_R^0 , w którym modele te zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. wzory (3.69)-(3.70) i twierdzenia 3.7-3.12 oraz własność RR5).

Dalsze wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ dla przypadków małej i umiarkowanej liczby pomiarów N , przedstawiamy w rozdz. 5, w oparciu o wyniki eksperymentów numerycznych.

B. Nieznana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu

3.3 Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu

W wielu praktycznych sytuacjach funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest nieznana. Zatem, z punktu widzenia zastosowań ważne są algorytmy umożliwiające identyfikację nieliniowości $R(x)$ również przy nieznannej funkcji gęstości wejścia.

Podstawa teoretyczna. Klasa teoretycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$, która stanowi podstawę obecnego algorytmu identyfikacji, składa się z następujących modeli opartych, podobnie jak modele teoretyczne $R_G(x; K; p)$ w przypadku znanej gęstości wejścia $f(x)$, o faktoryzacji nieliniowości $R(x)$ (zob. wzór (3.1) w punkcie 3.1)

$$R_{Gf}(x; K; p) = \frac{G(x; K; p)}{f(x; K; p)} \quad (3.95)$$

w których licznik $G(x; K; p)$ jest teoretycznym modelem falkowym funkcji $G(x)$ ($= R(x) \cdot f(x)$) (jak w modelach teoretycznych $R_G(x; K; p)$ – zob. wzory (3.2) i (3.3)):

$$G(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} a_{Mn}^p \cdot \sum_{m=M}^n \tilde{A}_{ml}^p(x) + \sum_{m=M}^{n_{\max}(M;p)} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.96)$$

(ze współczynnikami a_{Mn}^p i \tilde{A}_{ml}^p danymi wzorami (3.4)) a mianownik $f(x; K; p)$ stanowi teoretyczny model falkowy nieznannej gęstości wejścia systemu $f(x)$ (jej falkową aproksymację):

$$f(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} a_{Mn}^p \cdot \sum_{m=M}^n \tilde{A}_{ml}^p(x) + \sum_{m=M}^{n_{\max}(M;p)} \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.97)$$

o współczynnikach a_{Mn}^p i \tilde{A}_{ml}^p równych współczynnikom jej rozwinięcia w szereg falkowy (por. wzory w (3.4))

$$a_{Mn}^p = \frac{\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} f(x) \cdot \sum_{m=M}^n \tilde{A}_{ml}^p(x) dx}{\frac{n}{2^M}} \quad \text{oraz} \quad \tilde{A}_{ml}^p = \frac{\int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} f(x) \cdot \tilde{A}_{ml}^p(x) dx}{\frac{l+(1-p)}{2^m}} \quad (3.98)$$

Granice sumowań w modelach $f(x; K; p)$ wynoszą (por. wzór (3.5))

$$\begin{aligned} n_{\min}(M; p) &= 2^M a_{j-2p+2}^1 & \text{oraz} & \quad l_{\min}(m; p) = b 2^m a_{j-p+1}^1 \\ n_{\max}(M; p) &= 2^M b_{j-1}^1 & \text{oraz} & \quad l_{\max}(m; p) = d 2^m b_{j-2}^1 \end{aligned} \quad (3.99)$$

gdzie a ; b są granicami przedziału S .

Algorytm identyfikacji. Modele empiryczne. Zadanie algorytmu identyfikacji polega na wyznaczeniu empirycznego modelu falkowego nieliniowości $R(x)$ na podstawie zbioru pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$. Wobec nieznanowości zarówno identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ jak i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, polega ono na oszacowaniu (estymacji) współczynników a_{Mn}^p , b_{ml}^p i a_{Mn}^p , b_{ml}^p obu modeli falkowych $G(x; K; p)$ i $f(x; K; p)$ (wzory (3.96) i (3.97)).

Współczynniki pierwszego z nich szacujemy, analogicznie jak w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ w algorytmie ilorazowym przy znanej funkcji gęstości wejścia systemu, za pomocą estymatorów (zob. wzory w (3.7)):

$$\hat{a}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \cdot \tilde{a}_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{b}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \tilde{A}_{ml}^p(x_k) \quad (3.100)$$

otrzymując model empiryczny ze wzoru (3.9):

$$\hat{G}(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{a}_{Mn}^p \cdot \tilde{a}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{m=1} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \hat{b}_{ml}^p \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.101)$$

Wykorzystując natomiast, w odniesieniu do modelu $f(x; K; p)$, znane tożsamości (zob. np. [104], [122])

$$a_{Mn}^p = E \cdot \tilde{a}_{Mn}^p(x_1) \quad \text{oraz} \quad b_{ml}^p = E \tilde{A}_{ml}^p(x_1) \quad (3.102)$$

otrzymujemy następujące estymatory jego współczynników

$$\hat{a}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{b}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{A}_{ml}^p(x_k) \quad (3.103)$$

oraz poniższy falkowy model empiryczny nieznannej funkcji gęstości wejścia $f(x)$

$$\hat{f}(x; K; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{a}_{Mn}^p \cdot \tilde{a}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{m=1} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \hat{b}_{ml}^p \tilde{A}_{ml}^p(x) \quad (3.104)$$

Uzyskaliśmy w ten sposób klasę (dla różnych p) empirycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$ (por. (3.101) i (3.104))

$$\hat{R}_{Gf}(x; K; p) = \frac{\hat{G}(x; K; p)}{\hat{f}(x; K; p)} \quad (3.105)$$

odpowiadających klasie modeli teoretycznych (3.95). Algorytm identyfikacji przyjmuje obecnie następującą postać:

Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu:

Krok 1a. Na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ oblicz oszacowania \hat{a}_{Mn}^p i \hat{b}_{ml}^p według wzorów (3.100).

Krok 1b. Na podstawie pomiarów $f(x_k)_{k=1}^N$ oblicz oszacowania \hat{a}_{Mn}^p i \hat{b}_{ml}^p według wzorów (3.103).

Krok 2a. Wyznacz empiryczny model funkcji $G(x)$ wstawiając obliczone oszacowania \hat{a}_{Mn}^p i \hat{b}_{ml}^p do wzoru (3.101).

Krok 2b. Wyznacz empiryczny model funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ wstawiając obliczone oszacowania \hat{a}_{Mn}^p i \hat{b}_{ml}^p do wzoru (3.104).

Krok 3. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (3.105), z licznikiem (3.101) i mianownikiem (3.104).

Algorytmy ilorazowe z estymacją nieznanej funkcji gęstości wejścia systemu badano m.in. w pracach [43]-[44], [46], [50], [54]-[56], [86] i [107] dla innych układów funkcji ortogonalnych oraz w pracach [49], [70]-[71], [73] i [108]-[109] dla falek.

Analizę własności modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ rozpoczniemy od wyznaczenia warunków średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{f}(x; K; p)$ do funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, a następnie wyznaczmy szybkość tej zbieżności. W oparciu o te wyniki oraz odpowiednie wyniki dotyczące modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, przedstawione w punkcie 3.1.1, wyznaczmy warunki punktowej zbieżności i szybkość zbieżności (według prawdopodobieństwa) modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$.

3.3.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{f}(x; K; p)$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{f}(x; K; p)$

Korzystając z lematu 3.2 (str. 30) dotyczącego średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K; p)$ i podstawiając za $R(x) = I_S(x)$ oraz $z_k = \gamma_k = 0$, otrzymujemy jako wniosek następujący lemat:

Lemat 3.8 Jeśli funkcja gęstości $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x \in S = [a; b]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{f}(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)} = N \rightarrow \infty, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie średniokwadratowo do funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$

$$\text{MSE } \hat{f}(x; K(N); p) = E \int_{-h}^h f(x) - \hat{f}(x; K(N); p) dx \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.106)$$

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{f}(x; K; p)$

Wykorzystując teraz lemat 3.3 (str. 36) dotyczący średniokwadratowej szybkości zbieżności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ i ponownie podstawiając $R(x) = I_S(x)$ (oraz $\tau = 1$) i $z_k = \gamma_k = 0$, otrzymujemy (por. założenie Z7 na str. 34) jego odpowiednik dla modeli empirycznych $\hat{f}(x; K; p)$:

Lemat 3.9 Jeśli $f(x)$ należy do klasy $C^\alpha[a_x; b_x] \subset S$, gdzie

$$a_x = \frac{2^k x - 1}{2^k} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{2^k x + 2p - 1}{2^k}$$

a skala K modeli empirycznych $\hat{f}(x; K; p)$ jest dobierana według wzoru

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2\alpha + 1} \log_2 2\alpha N; \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \min f^\alpha; p \quad (3.107)$$

to w dowolnym punkcie $x \in \left[\frac{b^{2^k} x_C - 1}{2^k}; \frac{b^{2^k} x_C + 1}{2^k} \right]$ asymptotyczny błąd średniokwadratowy tych modeli spełnia nierówność

$$\text{MSE } \hat{f}(x; K_{\text{opt}}(N); p) \leq N^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} C_{\text{MSE}}^{f, \alpha} \quad (3.108)$$

gdzie $C_{\text{MSE}}^{f, \alpha}$ jest dodatnią stałą (zależną od funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ i zastosowanych falek).

3.3.2 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$

Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe w punkcie $x \in S = [a; b]$, to wówczas w tym punkcie, ze wzrostem liczby pomiarów N :

- ² przy spełnionych założeniach lematu 3.2, model empiryczny $\hat{G}(x; K; p)$ zbiega średniokwadratowo do funkcji $G(x)$,
- ² przy spełnionych założeniach lematu 3.8, model empiryczny $\hat{f}(x; K; p)$ zbiega średniokwadratowo do funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Z punktowej zbieżności średniokwadratowej modelu $\hat{G}(x; K; p)$ (licznika w modelu $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$) do funkcji $G(x)$ i modelu $\hat{f}(x; K; p)$ (mianownika w modelu $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$) do $f(x)$ w punkcie x , wynika ich punktowa zbieżność według prawdopodobieństwa do tych funkcji (w tym punkcie). Stąd, przy założeniu Z1 (tj. $f(x) > 0$ dla $x \in S = [a; b]$), model empiryczny $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zbiega, na mocy twierdzenia Świąckiego (zob. np. [123, str. 28]) w tym punkcie do nieliniowości $R(x) (= G(x) = f(x))$ według prawdopodobieństwa (por. wzory (3.1) i (3.105)).

Zachodzi zatem następujące twierdzenie (por. wnioski 3.1 i 3.2).

Twierdzenie 3.13 (Zbieżność punktowa wg prawdopodobieństwa) Jeśli skala K w modelach $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki

$$K = K(N) \rightarrow 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)} = N! \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow 1$$

to dla każdego numeru falkowego p (dowolnej falki Daubechies) modele te zbiegają według prawdopodobieństwa do nieliniowości $R(x)$

$$\hat{R}_{Gf}(x; K(N); p) \xrightarrow{P} R(x) \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow 1$$

w każdym punkcie $x \in S = [a; b]$, w którym nieliniowość $R(x)$ oraz funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe.

Z twierdzenia wnioskujemy, że pomimo nieznaności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (i wynikającej stąd potrzeby jej estymacji w omawianym algorytmie), modele empiryczne $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zbiegają (według prawdopodobieństwa) do nieliniowości $R(x)$ w tych samych punktach, w których przy znanej $f(x)$ zbiegają do niej modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K; p)$.

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$

Wykorzystując teraz twierdzenie [50, twierdzenie 3, str. 449] cytowane w Dodatku B.8, str. 129 otrzymujemy, po podstawieniach $\hat{g}_N(x) = \hat{G}(x; K_{opt}(N); p)$ (z $K_{opt}(N)$ ze wzoru (3.31) na str. 35), $\hat{f}_N(x) = \hat{f}(x; K_{opt}(N); p)$ (z $K_{opt}(N)$ ze wzoru (3.107)) oraz $S_g = 2^\circ = (2^\circ + 1)$ i $S_f = 2^{\Delta} = (2^{\Delta} + 1)$ (zauważmy przy tym, że $^\circ = \min f^{\circ}; \Delta = \min f^{\Delta}$), następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.14 (Szybkość zbieżności punktowej wg prawdopodobieństwa)
Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in C^{\gamma}[a_x; b_x] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^{\beta}[a_x; b_x]; \quad \beta, \gamma > 0; \quad [a_x; b_x] \subset S$$

a skala K w modelach empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ i $\hat{f}(x; K; p)$ (wzory (3.101) i (3.104))
dobierana jest według wzoru

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2^{\beta} + 1} \log_2 2^{\beta} N, \quad \beta = \min\{\beta, \gamma\} \quad (3.109)$$

to dla każdego bezwzględnie tych modeli zachodzi asymptotycznie, w każdym punkcie $x \in S$

$\frac{b^{2^K} - a^{2^K}}{2^K}, \frac{b^{2^{K+1}} - a^{2^{K+1}}}{2^{K+1}}$, następujące oszacowanie:

$$|R(x) - \hat{R}_{Gf}(x; K_{\text{opt}}(N); p)| = O\left(N^{-\frac{\beta}{2^{\beta} + 1}}\right) \quad (3.110)$$

względnie prawdopodobieństwa.

Z twierdzenia tego wynika, że nieznaną funkcję gęstości wejścia systemu $f(x)$ nie zmniejsza (w stosunku do modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ – por. twierdzenie 3.3) asymptotycznej szybkości zbieżności punktowej (według prawdopodobieństwa) modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$.

A zatem, z twierdzeń 3.13 i 3.14 wnioskujemy następujące własności punktowe falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ (por. własności RG1-RG4, RG3a modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ i własności RR1-RR5, RR3a modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ w punktach 3.1.2 i 3.2.1):

- RGf1. Modele $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie przedziału $S = [a; b]$, w którym ta nieliniowość i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe.
- RGf2. Szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ ze wzrostem liczby pomiarów N we wzorach (3.100), (3.104) i (3.110) zależy od lokalnej (w przedziale $[a_x; b_x]$) gęstości nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p) (por. wzory (3.109)-(3.110)).
- RGf3. Jeśli w przedziale $[a_x; b_x]$ funkcja gęstości wejścia $f(x)$ jest gadsza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\beta > \gamma$, a zastosowane w modelach empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ falki mają numer $p > \gamma$, to wówczas szybkość zbieżności tych modeli osiąga rząd $O\left(N^{-\frac{\gamma}{2^{\gamma} + 1}}\right)$.
- RGf4. Wyznaczone w twierdzeniach 3.13-3.14, zbieżność i szybkość zbieżności modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$, nie zależą od struktury i dynamiki systemu (z klasy rozwiązanych systemów), ani też od skorelowania zakłóceń pomiarowych z_k .

Przykłady. Rozpatrzmy ponownie wybrane przypadki identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Niech nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia $f(x)$ będą odrodkami gadskie w $S = [a; b]$ i w przedziałach pomiędzy punktami nieciągłości należą odpowiednio do klas C^{γ}

i C^{∞} . Wówczas falkowe modele empiryczne $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zbiegają w tych przedziałach punktowo do nieliniowości $R(x)$ (twierdzenie 3.13), z gwarantowaną szybkością rzędu $O(N^{-\frac{1}{2^{\circ}+1}})$, $\circ = \min\{f^{\circ}, g^{\circ}\}$ (twierdzenie 3.14).

Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ są ciągłe w przedziale S i spełniają np. warunek Lipschitza (tj. $f^{\circ} = g^{\circ} = 1$), wtedy dla modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$, gwarantowany rząd szybkości zbieżności punktowej według prawdopodobieństwa osiąga poziom $O(N^{-\frac{1}{3}})$ i nie zależy od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (ponieważ $p > 1$ i $\min\{f^{\circ}, g^{\circ}\} = 1$) (por. (3.109)-(3.110)).

Jeśli natomiast $R(x)$ i $f(x)$ są dwukrotnie różniczkowalne (np. obie należą do klasy $C^{2.5}[a; b]$), to wówczas szybkość zbieżności modeli z falkami Haara ($p = 1$) nie ulega zmianie (nadal jest rzędu $O(N^{-\frac{1}{3}})$), natomiast dla modeli z falkami Daubechies o numerze $p > 3$ wzrasta do poziomu $O(N^{-\frac{5}{12}})$.

A. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$

Ponieważ warunki i szybkości punktowej zbieżności (według prawdopodobieństwa) falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ i $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ są takie same, to odpowiednie wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w modelach $\hat{R}_G(x; K; p)$ (przedstawione na str. 66) można bezpośrednio odnieść do modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$.

Podsumowanie

W rozdziale zaproponowaliśmy trzy typy falkowych algorytmów służących do identyfikacji nieliniowości $R(x)$ w systemach zozonowanych o strukturze blokowej (przedstawionych w rozdz. 2) na podstawie pomiarów wejścia-wyjścia całego systemu i zbadaliśmy warunki i szybkości zbieżności wyznaczanych przez te algorytmy falkowych modeli empirycznych w zależności od następujących czynników:

- 2 gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$,
- 2 gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, oraz
- 2 zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p).

Znana funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$. W przypadku znanej funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ przedstawiliśmy i zbadaliśmy dwa typy algorytmów falkowych (ilorazowy – z empirycznym modelem falkowym $\hat{R}_G(x; K; p)$ – zob. punkt 3.1 i bezpośredni – z modelem $\hat{R}_R(x; K; p)$ – zob. punkt 3.2). W odniesieniu do modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ wykazaliśmy, że zbiegają one:

- 2 punktowo (średniokwadratowo i według prawdopodobieństwa) do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie przedziału $S = [a; b]$, w którym ciągłe są zarówno nieliniowość $R(x)$ jak i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$,
- 2 globalnie (średniokwadratowo) do dowolnych nieliniowości $R(x)$ ograniczonych w przedziale $S = [a; b]$ przy dowolnych $f(x)$ ograniczonych i dodatnich w tym przedziale. Pokazaliśmy także, że w przypadku ciągłych $R(x)$ i $f(x)$ modele

$\hat{R}_G(x; K; p)$ mogą zbiegać do nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną szybkością zbieżności, a ponadto wyznaczyliśmy szybkość zbieżności tych modeli do, często spotykanych w praktyce, nieliniowości nieciągłych, odcinkami gładkich.

W odniesieniu do modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ pokazaliśmy natomiast, że poszczególne zbieżności i ich szybkości nie zależą, w porównaniu z modelami $\hat{R}_G(x; K; p)$, od własności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$. A zatem dla $f(x)$ mniej gładkich niż identyfikowana nieliniowość $R(x)$ modele $\hat{R}_R(x; K; p)$ mogą osiągać (przy odpowiednim doborze funkcji falkowych w modelach) większą gwarantowaną szybkość zbieżności w stosunku do modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ (por. twierdzenia 3.2-3.6 i 3.8-3.12; zob. także wyniki badań numerycznych w rozdziale 5).

Nieznana funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$. Dla tego przypadku przedstawiliśmy wersję algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu i pokazaliśmy, że wyznaczane przez algorytm modele empiryczne $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zbiegają punktowo według prawdopodobieństwa do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ przy takich samych warunkach i z taką samą (asymptotycznie) szybkością, przy których zbiegają (w tym sensie) modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K; p)$ wyznaczane przez algorytm ilorazowy w przypadku znanej $f(x)$.

Ponieważ równoważność własności modeli w obu algorytmach zachodzi asymptotycznie (dla dużych liczb pomiarów N) (por. wniosek 3.1 i twierdzenia 3.3 oraz 3.13-3.14), w rozdziale 5 porównujemy ich własności dla małej i umiarkowanej liczby pomiarów na podstawie eksperymentów numerycznych.

Niezależność od struktury systemu i skorelowania zakłóceń. Badane algorytmy posiadają ponadto następujące wspólne cechy:

- ² Warunki i szybkości zbieżności wyznaczanych przez nie modeli nie zależą od:
 - struktury systemów (z rozważanej klasy systemów nieliniowych),
 - ich dynamiki, oraz
 - skorelowania zakłóceń zewnętrznych.

Dobór falek w modelach. Zwróćmy przede wszystkim uwagę na fakt, że zbieżność poszczególnych modeli empirycznych do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ nie zależy od zastosowanych w nich funkcji falkowych, natomiast dobór funkcji falkowych może wpłynąć na szybkość zbieżności tych modeli. W zależności od zakresu wiedzy wstępnej o nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, dobór ten opiera się na następujących ogólnych wskazówkach:

- ² gdy wiedza wstępna nie obejmuje znajomości gładkości $R(x)$ i $f(x)$, to należy, kierując się prostotą realizacji modeli, zastosować w nich falki Haara. Podobnie należy postąpić, gdy wiadomo, że $R(x)$ lub $f(x)$ są nieciągłe, gdyż wtedy gwarantowane prędkości zbieżności globalnej modeli nie zależą od zastosowanych w nich falek (por. twierdzenia 3.6 i 3.12).
- ² gdy wiadomo, że $R(x)$ i $f(x)$ są gładkie, należy zastosować falki o wyższym numerze p , tak aby zagwarantować modelom falkowym większą szybkość zbieżności (zob. np. twierdzenia 3.2, 3.5 oraz 3.8 i 3.11).

Ważności praktyczne algorytmów falkowych. Z praktycznego („użytkowego”) punktu widzenia należy także zwrócić uwagę na następujące cechy prezentowanych falkowych algorytmów identyfikacji:

- ² Algorytmy te wymagają (w celu zapewnienia zbieżności poszczególnym empirycznym modelom falkowym – por. np. warunki zbieżności w twierdzeniach 3.1 i 3.7) jedynie niewielkiej informacji apriorycznej zarówno na temat samej nieliniowości jak i pozostałych elementów identyfikowanego systemu oraz zakłóceń zewnętrznych.

Zauważmy jednakże, że zawarte w twierdzeniach dotyczące szybkości zbieżności modeli empirycznych (zob. np. twierdzenie 3.2), reguły doboru skali K modeli (zapewniające im gwarantowane szybkości zbieżności) wymagają wstępnej znajomości gęstości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, a ponadto mają charakter asymptotyczny. Oba te czynniki mogą stanowić istotne ograniczenie dla zastosowań proponowanych algorytmów (zob. wyniki badań numerycznych dla małych i umiarkowanych liczb pomiarów N w rozdziale 5).

- ² Algorytmy falkowe są proste w implementacji komputerowej. Wykorzystują one jedynie podstawowe operacje arytmetyczne (typu dodawanie i mnożenie – por. wzory (3.7)-(3.9), (3.64)-(3.66) i (3.100)-(3.105)) (dokładniejsze badania dotyczące aspektów obliczeniowych rozwiązanych falkowych algorytmów identyfikacji przedstawiamy w następnym rozdziale),
- ² Falkowe algorytmy identyfikacji mają taką samą postać zarówno dla systemów statycznych jak i dynamicznych oraz dla białych i skorelowanych zakłóceń zewnętrznych.

Na zakończenie zauważmy, że przedstawione powyżej wnioski dotyczące praktycznego zastosowania poszczególnych modeli falkowych opierają się na założeniu, że wartości funkcji falkowych Daubechies $\psi^p(x)$ i $\tilde{A}^p(x)$ mogą być obliczane w dowolnym punkcie x , podczas gdy wartości tych funkcji (dla $p > 2$) można za pomocą znanych algorytmów obliczać jedynie w punktach siatki binarnej (por. ważności funkcji falkowych przedstawione w punkcie 1.1 i zob. przykładowy algorytm w Dodatku A.3, str. 115). Z tego powodu (i ze względu na losowe wejście systemu) falkowe algorytmy identyfikacji nie mogą być bezpośrednio zastosowane w praktyce. Propozycje obliczeniowych (praktycznych) odpowiedników przedstawionych tu (teoretycznych) falkowych algorytmów identyfikacji zawiera następny rozdział.

Rozdział 4

Falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji

W podsumowaniu poprzedniego rozdziału zwróciliśmy uwagę na fakt, że nie jest możliwe bezpośrednio zastosowanie przedstawionych w nim falkowych algorytmów identyfikacji. Składają się na to następujące przyczyny:

1. Dla numerów falkowych $p > 2$ (tj. oprócz funkcji Haara), funkcje falkowe Daubechies nie są dane za pomocą jawnych wzorów ale jako procedury rekurencyjne (zob. np. [26]-[27] i [130]-[131]; por. własności funkcji falkowych przedstawione w punkcie 1.1 w rozdz. 1).
2. Typowe algorytmy pozwalają obliczyć wartości funkcji falkowych jedynie w punktach siatki binarnej $B_H; H > 0$ (por. uwaga 1.2 w rozdz. 1 i algorytm cytowany w Dodatku A.3).
3. W rozwiązany w pracy zadaniu identyfikacji wejście x_k jest losowe (por. założenie Z1 w rozdz. 2), a zatem ogólnie $x_k \notin B_H$. Stąd nie jest możliwe obliczenie współczynników empirycznych w poszczególnych modelach falkowych z wykorzystaniem typowych algorytmów obliczania wartości funkcji falkowych (zob. wzory (3.7), (3.64)-(3.65) i (3.103)), a także, obliczenie wartości wyjść modeli falkowych dla wejść x (z przedziału $S = [a; b]$), leżących poza siatką binarną.

W literaturze dotyczącej falek wskazana wyżej specyfika falkowych algorytmów identyfikacji nie była dotąd szczegółowo rozpatrywana. Pewną próbę rozwiązania problemu, wykorzystującą metodę grupowania pomiarów (ang. binning), przedstawiono jedynie w monografii [65, str. 222] poświęconej zastosowaniom falek w statystyce (proponycja ta jednakże nie została poparta analizą teoretyczną, a tylko zilustrowana przykładem numerycznym).

W obecnym rozdziale proponujemy proste i ogólne rozwiązanie problemu polegające na zastąpieniu w modelach falkowych oryginalnych funkcji falkowych Daubechies ${}^p(x)$ i $\bar{A}^p(x)$ ich schodkowymi (odcinkami stałymi) aproksymacjami ${}^p(x; H)$ i $\bar{A}^p(x; H)$, gdzie $H = 0; 1; \dots$, jest zdecydowanie dalej parametrem skali aproksymacji odpowiadającym za dokładność aproksymacji funkcji falkowych.

Jak pokazemy, otrzymane w ten sposób falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji (obliczeniowe odpowiedniki algorytmów falkowych z rozdz. 3) są łatwe w realizacji komputerowej. Ponadto, badając własności obliczeniowych modeli empirycznych (tj. modeli

otrzymanych według tych algorytmów) wykazemy (na przykładzie algorytmu ilorazowego), że przy zachowaniu prostych reguł dotyczących doboru skali H zachowane zostają asymptotyczne własności (tj. zbieżność i szybkość zbieżności) ich odpowiedników opartych na oryginalnych funkcjach falkowych Daubechies, a więc że modele obliczeniowe i „teoretyczne” modele wykorzystujące oryginalne funkcje falkowe są asymptotycznie równoważne.

W ostatnim punkcie rozdziału badamy zbieżność numerycznych obliczeniowych algorytmów identyfikacji (ponownie biorąc jako przykład algorytm ilorazowy). Przedstawimy tam także szybki (o zbieżności obliczeniowej rzędu $O(N)$) algorytm wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych, gdzie N jest liczbą wykorzystywanych obserwacji.

4.1 Podstawa teoretyczna

4.1.1 Aproksymacja falek

Proponowane aproksymacje $\hat{\varphi}^p(x; H)$ i $\hat{\psi}^p(x; H)$ funkcji falkowych $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ dla $p > 2$ mają postać funkcji odcinkami stałych o skokach w punktach siatki binarnej B_H , $H > 0$ (zob. Rys. 4.1) i są zdefiniowane następująco:

$$\hat{\varphi}^p(x; H) = \varphi^p \left(\frac{\tilde{\varphi}^p(x; H)}{2^H} \right) \quad \text{oraz} \quad \hat{\psi}^p(x; H) = \tilde{\psi}^p \left(\frac{2^H x}{2^H} \right) \quad (4.1)$$

Biorąc pod uwagę definicję i własności funkcji bfc (zob. Dodatek A.1, str. 114), wartości tych aproksymacji dla dowolnego argumentu x są równe wartościom przyjmowanym przez funkcje falkowe Daubechies w punktach siatki binarnej B_H znajdujących się najbliżej tego argumentu z jego lewej strony. Do wyznaczania wartości funkcji falkowych w punktach binarnych można wykorzystać algorytm zaczerpnięty z pracy [131, str. 296] i przedstawiony w Dodatku A.3, str. 115.

Aproksymacje skalowanych i przesuniętych funkcji falkowych definiujemy następująco (por. wzory (1.14) w rozdz. 1):

$$\hat{\varphi}_{M_n}^p(x; H) = 2^{\frac{M}{2}} \hat{\varphi}^p(2^M x - n; H) \quad \text{oraz} \quad \hat{\psi}_{m_l}^p(x; H) = 2^{\frac{m}{2}} \hat{\psi}^p(2^m x - l; H) \quad (4.2)$$

Parametr H nazywać będziemy dalej parametrem skali (krótko: skalą) aproksymacji funkcji falkowych.

4.1.2 Własności aproksymacji funkcji falkowych

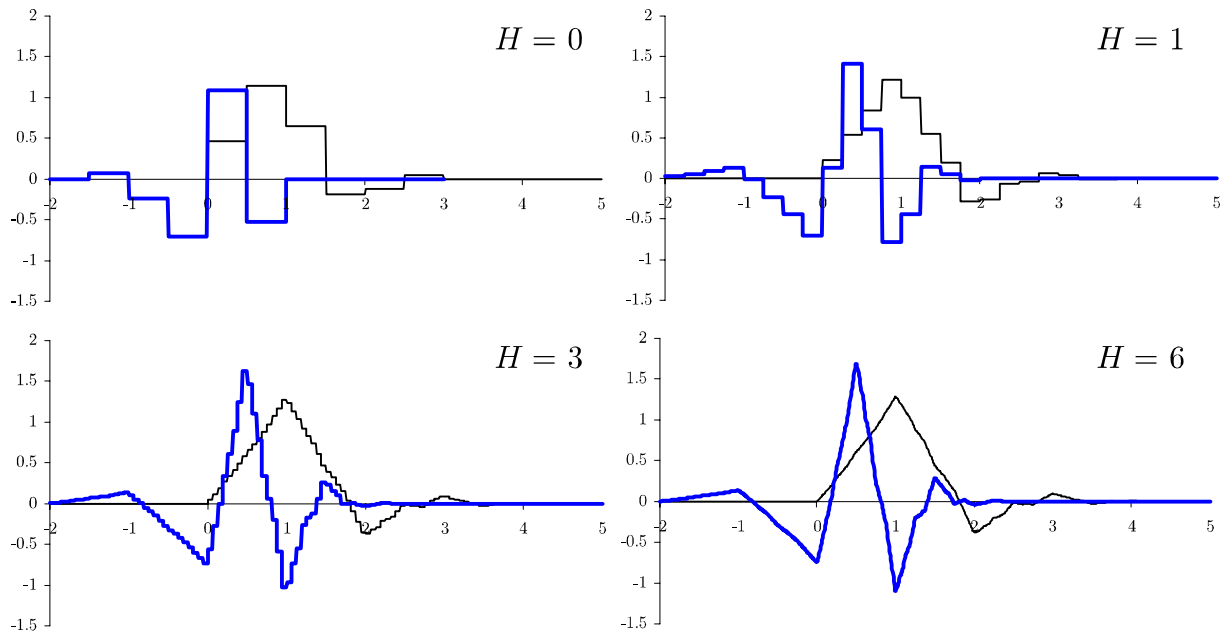
Zaproponowane aproksymacje funkcji falkowych dla $p > 2$ charakteryzują się następującymi własnościami (istotnymi z punktu widzenia dalszej analizy własności modeli wyznaczanych przez algorytmy obliczeniowe):

H1. W punktach siatki binarnej $x_B \in B_q$, $q \in H$, zachodzą równości

$$\hat{\varphi}^p(x_B; H) = \varphi^p(x_B) \quad \text{oraz} \quad \hat{\psi}^p(x_B; H) = \psi^p(x_B) \quad (4.3)$$

H2a. Błędy bezwzględne aproksymacji funkcji falkowych spełniają (dla dużych wartości H) poniższe nierówności

$$|\hat{\varphi}^p(x) - \varphi^p(x; H)| \leq 2^{-i} \epsilon_L \quad \text{oraz} \quad |\hat{\psi}^p(x) - \psi^p(x; H)| \leq 2^{-i} \epsilon_{L_A} \quad (4.4)$$



Rys. 4.1 Aproksymacje funkcji falkowych Daubechies $\psi^3(x)$ (linia cienka) i $\tilde{\psi}^3(x)$ (linia gruba) dla parametrów skali $H = 0; 1; 3; 6$

gdzie

$$\frac{1}{2} = \begin{cases} \gg 0.55 & \text{dla } p = 2 \\ 1 & \text{dla } p > 2 \end{cases}$$

dla każdego x , gdzie $L, L_{\tilde{\psi}}$ są dodatnimi stałymi niezależnymi od numeru falkowego p (zob. wzory (C.4)-(C.5) w Dodatku C.1).

H2b. Bezpośrednie aproksymacje skalowanych i przesuniętych funkcji falkowych (por. wzór (4.2) i wzór (1.14) w rozdz. 1) spełniają następujące nierówności

$$|j_{Mn}^p(x) - j_{Mn}^p(x; H)| \leq 2^{\frac{M}{2}} 2^{iH} L \quad \text{oraz} \quad |\tilde{A}_{ml}^p(x) - \tilde{A}_{ml}^p(x; H)| \leq 2^{\frac{m}{2}} 2^{iH} L_{\tilde{\psi}} \quad (4.5)$$

dla każdego x . Zwróćmy uwagę, że oszacowania błędów rosną ze wzrostem wartości skal M i m funkcji falkowych (zob. wzory (C.6)-(C.7) w Dodatku C.1).

H3. W danej skali H aproksymacje $j_{Mn}^p(x; H)$ i $\tilde{A}_{ml}^p(x; H)$ posiadają zwarte nośniki dane następującymi wzorami

$$\begin{aligned} \text{supp } j_{Mn}^p(x; H) &= \left[\frac{1}{2^H} + \frac{n}{2^M}; \frac{n + (2p - 1)}{2^M} \right] \\ \text{supp } \tilde{A}_{ml}^p(x; H) &= \left[\frac{1}{2^H} + \frac{l + (1 - p)}{2^m}; \frac{l + p}{2^m} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

A zatem asymptotycznie (tj. przy $H \rightarrow 1$) osiągną długości nośników odpowiednich funkcji falkowych $j_{Mn}^p(x)$ i $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ (por. wzór (1.11), w rozdziale 1).

4.1.3 Falkowe modele obliczeniowe

Bezpośrednie zastąpienie funkcji falkowych ich aproksymacjami prowadzi do uzyskania następujących klas (dla różnych p) falkowych modeli obliczeniowych, odpowiadających klasom falkowych modeli teoretycznych z rozdz. 3.

Modele $\hat{R}_G(x; K; H; p)$. Klasie modeli teoretycznych $R_G(x; K; p)$ odpowiadają modele obliczeniowe o postaci (por. wzór (3.2))

$$\hat{R}_G(x; K; H; p) = \frac{\hat{G}(x; K; H; p)}{f(x)} \quad (4.7)$$

w których $\hat{G}(x; K; H; p)$ jest obliczeniowym odpowiednikiem modelu teoretycznego $G(x; K; p)$ (por. wzór (3.3))

$$\hat{G}(x; K; H; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \mathbb{G}_{Mn}^p \mathfrak{r}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} {}^1p_{ml} \hat{A}_{ml}^p(x; H) \quad (4.8)$$

o współczynnikach (por. wzory w (3.4))

$$\mathbb{G}_{Mn}^p = \frac{\int \frac{n+(2p_i-1)}{2^M} G(x) \mathfrak{r}_{Mn}^p(x; H) dx}{\frac{n}{2^M}} \quad \text{oraz} \quad {}^1p_{ml} = \frac{\int \frac{l+p}{2^{ml}} G(x) \hat{A}_{ml}^p(x; H) dx}{\frac{l+(1+p)}{2^{ml}}} \quad (4.9)$$

Granice sumowań $n_{\min}(M; p)$, $n_{\max}(M; p)$ oraz $l_{\min}(m; p)$ i $l_{\max}(m; p)$ w modelach obliczeniowych (4.8) są równe granicom w modelach teoretycznych (zob. wzory w (3.5)).

Modele $\hat{R}_R(x; K; H; p)$. Klasie falkowych modeli teoretycznych $R_R(x; K; p)$ odpowiada następująca klasa modeli obliczeniowych (por. wzory (3.60) i (3.62))

$$\hat{R}_R(x; K; H; p) = \sum_{n=n_{\min}^0(M;p)}^{n_{\max}^0(M;p)} \mathbb{G}_{Mn}^{p0} \mathfrak{r}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}^0(m;p)}^{l_{\max}^0(m;p)} {}^1p_{ml}^{p0} \hat{A}_{ml}^p(x; H) \quad (4.10)$$

ze współczynnikami (por. wzory w (3.61))

$$\mathbb{G}_{Mn}^{p0} = \frac{\int \frac{n+(2p_i-1)}{2^M} R(x) \mathfrak{r}_{Mn}^p(x; H) dx}{\frac{n}{2^M}} \quad \text{oraz} \quad {}^1p_{ml}^{p0} = \frac{\int \frac{l+p}{2^{ml}} R(x) \hat{A}_{ml}^p(x; H) dx}{\frac{l+(1+p)}{2^{ml}}} \quad (4.11)$$

Modele $\hat{R}_{Gf}(x; K; H; p)$. Modele teoretyczne $R_{Gf}(x; K; p)$ mają swoje odpowiedniki obliczeniowe w postaci (por. wzór (3.95))

$$\hat{R}_{Gf}(x; K; H; p) = \frac{\hat{G}(x; K; H; p)}{\hat{f}(x; K; H; p)} \quad (4.12)$$

z licznikiem takim samym jak w modelu $\hat{R}_G(x; K; H; p)$ (wzór (4.8)) i mianownikiem danym wzorem (por. wzory (3.97) i (3.99))

$$\hat{f}(x; K; H; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \mathfrak{a}_{Mn}^p \mathfrak{r}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \mathfrak{b}_{ml}^p \hat{A}_{ml}^p(x; H) \quad (4.13)$$

gdzie (por. wzory w (3.98))

$$\mathfrak{a}_{Mn}^p = \frac{\int \frac{n+(2p_i-1)}{2^M} f(x) \mathfrak{r}_{Mn}^p(x; H) dx}{\frac{n}{2^M}} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{b}_{ml}^p = \frac{\int \frac{l+p}{2^{ml}} f(x) \hat{A}_{ml}^p(x; H) dx}{\frac{l+(1+p)}{2^{ml}}} \quad (4.14)$$

Należy podkreślić, że wzory (4.9), (4.11) i (4.14) na współczynniki falkowych modeli obliczeniowych otrzymano przez mechaniczne zastąpienie funkcji falkowych ich aproksymacjami w odpowiednich wzorach na współczynniki falkowych modeli teoretycznych.

4.2 Empiryczne modele obliczeniowe. Algorytmy obliczeniowe identyfikacji

Poszczególnym klasom (dla różnych p) falkowych modeli empirycznych odpowiadają z kolei klasy obliczeniowych modeli empirycznych, opartych na aproksymacjach funkcji falkowych.

Modele $R_G(x; K; H; p)$. Obliczeniowe odpowiedniki falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K; p)$ wyznaczanych przez algorytm ilorazowy mają postać (por. wzory (3.8) i (4.7))

$$R_G(x; K; H; p) = \frac{G(x; K; H; p)}{f(x)} \quad (4.15)$$

gdzie (por. wzory (3.9) i (4.8))

$$G(x; K; H; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{\alpha}_{Mn}^p \eta_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} \hat{\alpha}_{ml}^p \hat{A}_{ml}^p(x; H) \quad (4.16)$$

a współczynniki empiryczne $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ wynoszą (por. wzory w (3.7) i (4.9))

$$\hat{\alpha}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \eta_{Mn}^p(x_k; H) \quad \text{oraz} \quad \hat{\alpha}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \hat{A}_{ml}^p(x_k; H) \quad (4.17)$$

Modele $R_R(x; K; H; p)$. Falkowym modelom empirycznym $\hat{R}_R(x; K; p)$ wyznaczanym przez algorytm bezpośredni odpowiadają następujące empiryczne modele obliczeniowe (por. wzory (3.60) i (4.10))

$$R_R(x; K; H; p) = \sum_{n=n_{\min}^0(M;p)}^{n_{\max}^0(M;p)} \hat{\alpha}_{Mn}^{p0} \eta_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}^0(m;p)}^{l_{\max}^0(m;p)} \hat{\alpha}_{ml}^{p0} \hat{A}_{ml}^p(x; H) \quad (4.18)$$

w których współczynniki $\hat{\alpha}_{Mn}^{p0}$ i $\hat{\alpha}_{ml}^{p0}$ są wyliczane ze wzorów (por. wzory w (3.64) oraz (4.11))

$$\hat{\alpha}_{Mn}^{p0} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \eta_{Mn}^{p0}(x_k; H) \quad \text{oraz} \quad \hat{\alpha}_{ml}^{p0} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \hat{A}_{ml}^{p0}(x_k; H) \quad (4.19)$$

gdzie (por. wzory w (3.65))

$$\eta_{Mn}^{p0}(x_k; H) = \frac{\eta_{Mn}^p(x_k; H)}{f(x)} \quad \text{oraz} \quad \hat{A}_{ml}^{p0}(x_k; H) = \frac{\hat{A}_{ml}^p(x_k; H)}{f(x)} \quad (4.20)$$

Modele $R_{Gf}(x; K; H; p)$. Odpowiednikami falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ (wyznaczanych przez algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu) są poniższe empiryczne modele obliczeniowe (por. wzory (3.105) i (4.12))

$$R_{Gf}(x; K; H; p) = \frac{G(x; K; H; p)}{\hat{f}(x; K; H; p)} \quad (4.21)$$

z licznikiem danym wzorem (4.16) i mianownikiem będącym obliczeniowym modelem empirycznym nieznanego gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.104) i (4.13))

$$\hat{f}(x; K; H; p) = \sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} a_{Mn}^p \hat{r}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{\infty} b_{ml}^p \hat{A}_{ml}^p(x; H) \quad (4.22)$$

o współczynnikach a_{Mn}^p i b_{ml}^p postaci (por. wzory w (3.103) i (4.14))

$$a_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{r}_{Mn}^p(x_k; H) \quad \text{oraz} \quad b_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{A}_{ml}^p(x_k; H) \quad (4.23)$$

Obliczeniowe algorytmy identyfikacji. Obliczeniowe wersje poszczególnych falkowych algorytmów identyfikacji z rozdz. 3 przyjmują zatem następującą postać:

Algorytm ilorazowy (wersja obliczeniowa):

Krok 1. Na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k) g_{k=1}^N$ oblicz oszacowania \hat{a}_{Mn}^p oraz \hat{b}_{ml}^p według wzorów (4.17) oraz (4.2).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (4.15), z licznikiem danym przez (4.16) i wzór (4.2).

Algorytm bezpośredni (wersja obliczeniowa):

Krok 1. Na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k) g_{k=1}^N$ oblicz oszacowania \hat{a}_{Mn}^{p0} oraz \hat{b}_{ml}^{p0} według wzorów (4.19)-(4.20) oraz (4.2).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$ wstawiając obliczone oszacowania do wzoru (4.18).

Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu (wersja obliczeniowa):

Krok 1a. Na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k) g_{k=1}^N$ oblicz oszacowania \hat{a}_{Mn}^p oraz \hat{b}_{ml}^p według wzorów (4.17) oraz (4.2).

Krok 1b. Na podstawie pomiarów $f(x_k) g_{k=1}^N$ oblicz oszacowania \hat{a}_{Mn}^p oraz \hat{b}_{ml}^p według wzorów (4.23) oraz (4.2).

Krok 2a. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy funkcji $G(x)$ wstawiając obliczone oszacowania \hat{a}_{Mn}^p oraz \hat{b}_{ml}^p do wzoru (4.16).

Krok 2b. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ wstawiając obliczone oszacowania \hat{a}_{Mn}^p oraz \hat{b}_{ml}^p do wzoru (4.22).

Krok 3. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (4.21), z licznikiem (4.16) i mianownikiem (4.22), uwzględniając wzory (4.2).

Zwracamy uwagę na pełną analogię (z dokładnością do zastosowanej aproksymacji falek) algorytmów falkowych w rozdz. 3 oraz ich powyższych wersji obliczeniowych. Zauważmy także, że posługiwanie się w praktyce aproksymacjami $\hat{r}_{Mn}^p(x; H)$ i $\hat{A}_{ml}^p(x; H)$ (wzory (4.2)) można uprościć poprzez wstępne wyznaczenie wartości tych aproksymacji w wybranej skali H , a następnie ich stabilizację (i przechowanie w pamięci komputera).

Dzięki temu używanie aproksymacji $\hat{\alpha}_{Mn}^p(x; H)$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p(x; H)$ w powyższych algorytmach identyfikacji nie wymaga każdorazowego obliczania ich wartości.

4.3 Przykładowa analiza falkowego algorytmu obliczeniowego identyfikacji (algorytm ilorazowy)

Dla przykładu zbadamy teraz własności obliczeniowych modeli empirycznych $R_G(x; K; H; p)$ wyznaczanych przez obliczeniową wersję algorytmu ilorazowego. Analiza własności modeli otrzymywanych za pomocą pozostałych algorytmów obliczeniowych (prowadzona według poniższego schematu) będzie przedmiotem osobnych opracowań. Dla modeli obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$ analiza ta sprowadza się do zbadania własności modeli $G(x; K; H; p)$ stanowiących ich licznik (zob. wzór (4.15); por. z analizą własności modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie 3.1.1).

4.3.1 Analiza własności empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$

Zbieżność oszacowań $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$

Zauważmy, że na mocy założeń Z3-Z5, współczynniki empiryczne $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ dane wzorem (4.17) są nieobciążonymi estymatorami współczynników α_{Mn}^p i α_{ml}^p modeli $G(x; K; H; p)$ (zob. wzory (4.9) i (4.8))

$$E \hat{\alpha}_{Mn}^p = \alpha_{Mn}^p \quad \text{oraz} \quad E \hat{\alpha}_{ml}^p = \alpha_{ml}^p \quad (4.24)$$

Dodatkowo ich wariancje spełniają nierówności

$$\text{var} \hat{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{var} \hat{\alpha}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \quad (4.25)$$

gdzie dodatnie stałe A_{var} , A_{cov} oraz B_{var} , B_{cov} zależą od części dynamicznej systemu i zewnętrznych zakłóceń z_k oraz parametru skali H (zob. wzory (C.8) i (C.13)-(C.14) w Dodatku C.2, str. 134). Stąd wnioskujemy, że (por. lemat 3.1):

Lemat 4.10 Współczynniki $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ zbiegają średniokwadratowo do współczynników α_{Mn}^p i α_{ml}^p modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ wraz z rosnącą liczbą pomiarów N . Ponadto dla ich błędów średniokwadratowych zachodzą następujące nierówności

$$\text{MSE} \hat{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{MSE} \hat{\alpha}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}})$$

Widzimy zatem, że współczynniki $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ obliczeniowych modeli empirycznych posiadają własności V1-V3 (zob. str. 29), analogiczne do własności współczynników α_{Mn}^p i α_{ml}^p odpowiednich modeli empirycznych z rozdz. 3. Ponadto ich szybkość zbieżności (rzędu $O(N^{-1})$) nie zależy od parametru skali aproksymacji funkcji falkowych H i numeru falkowego p .

A. Analiza zbieżności punktowej modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$

Średniokwadratowy błąd empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ w odniesieniu do $G(x)$ w ustalonym punkcie x można zdekomponować na składniki obciążenia i wariancji wyjścia tych modeli

$$\text{MSE } G(x; K; H; p) = E \left[G(x) - G(x; K; H; p) \right]^2 = \text{bias}^2 G(x; K; H; p) + \text{var } G(x; K; H; p)$$

gdzie

$$\text{bias}^2 G(x; K; H; p) = \left[G(x) - E G(x; K; H; p) \right]^2 \quad (4.26)$$

$$\text{var } G(x; K; H; p) = E \left[E G(x; K; H; p) - G(x; K; H; p) \right]^2 \quad (4.27)$$

Wariancja wyjścia modelu $\text{var } G(x; K; H; p)$. Z własności (4.24) współczynników \hat{G}_{Mn}^p i \hat{G}_{ml}^p wynika, że wyjścia obliczeniowych modeli empirycznych $G(x; K; H; p)$ są nieobciążonymi estymatorami wyjść modeli obliczeniowych $\hat{G}(x; K; H; p)$ (por. wzór (3.13))

$$E G(x; K; H; p) = \hat{G}(x; K; H; p) \quad (4.28)$$

Korzystając z tej własności w obliczeniach przeprowadzonych w Dodatku C.3 (str. 135), otrzymujemy następujące oszacowanie wariancji wyjścia obliczeniowego modelu empirycznego dla każdego $x \in S = [a; b]$ (por. wzór (4.27))

$$\text{var } G(x; K; H; p) = E \left[\hat{G}(x; K; H; p) - G(x; K; H; p) \right]^2 \approx \frac{2^k}{N} \hat{C}_{\text{var}} \quad (4.29)$$

gdzie \hat{C}_{var} jest dodatnią stałą (zależną od dynamiki systemu i zakłóceń zewnętrznych z_k). Zwróćmy uwagę, że uzyskane oszacowanie jest równe co do rzędu oszacowaniu wariancji wyjścia falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ (wzór (3.14) w rozdz. 3).

Obciążenie $\text{bias}^2 G(x; K; H; p)$. Składniki obciążenia empirycznych modeli obliczeniowych można, w oparciu o poniższy wzór (por. własność (4.28) i wzór (4.26))

$$\begin{aligned} \text{bias } G(x; K; H; p) &= G(x) - E G(x; K; H; p) \\ &= [G(x) - G(x; K; p)] + E G(x; K; p) - G(x; K; H; p) \end{aligned}$$

oszacować następująco (por. np. [115, str. 284])

$$\text{bias}^2 G(x; K; H; p) \stackrel{\text{def}}{\approx} \frac{2}{h} [G(x) - G(x; K; p)]^2 + 2 E G(x; K; p) - G(x; K; H; p) \stackrel{\text{def}}{\approx} 2 \text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) + \overline{\text{bias}^2} G(x; K; H; p) \quad (4.30)$$

Pierwszy w nawiasie składnik tego oszacowania stanowi obciążenie falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ (z oryginalnymi falkami Daubechies), por. wzór (3.28) w rozdz. 3. Drugi człon oszacowania jest białym wynikiem z zastosowania w modelach obliczeniowych $\hat{G}(x; K; H; p)$ aproksymacji funkcji falkowych. Jak pokazuje się w Dodatku C.4 (str. 135) dla biału tego, w ustalonym x z przedziału $S = [a; b]$, zachodzi nierówność

$$\overline{\text{bias}^2} G(x; K; H; p) \leq 2^{2H} K^2 \hat{C}_{\text{bias}} \quad (4.31)$$

gdzie C_{bias} jest dodatnią stałą zależną od nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych funkcji falkowych (numeru p) i gdzie K jest skalą empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$, H jest parametrem skali w zastosowanych w tych modelach aproksymacjach funkcji falkowych (por. wzór (4.16)), natomiast wykładnik $\frac{1}{2}$ jest dodatnią stałą zależną od numeru falkowego p tych funkcji (por. wzór (4.4)).

Zbieżność punktowa modeli $G(x; K; H; p)$. Badając w rozdz. 3 warunki zbieżności falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ stwierdziliśmy, że skądowa obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p)$ tych modeli maleje do zera ze wzrostem skali K w punktach ciągłości identyfikowanej charakterystyki $G(x)$ (por. str. 30). Zauważmy jednak, że (według oszacowania (4.31)) w modelach obliczeniowych wzrost skali K (przy ustalonym H) powoduje zwiększenie skądowej błądu $\text{bias}^2 G(x; K; H; p)$, a w konsekwencji też wzrost całego błądu obciążenia (4.30)

$$\text{bias}^2 G(x; K; H; p) \sim 1 \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty; H = \text{const} \quad (4.32)$$

Z kolei, dla ustalonego K wzrost skali aproksymacji H powoduje wykładnicze zmniejszanie się skądowej błądu $\text{bias}^2 G(x; K; H; p)$, a stąd

$$\text{bias}^2 G(x; K; H; p) \sim \text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) \quad \text{dla} \quad H \rightarrow \infty; K = \text{const} \quad (4.33)$$

Uzależniając zatem skalę H aproksymacji funkcji falkowych od skali K modeli obliczeniowych tak, aby przy warunkach zbieżności modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ (por. wzory (3.19), str. 30) spełnione były dodatkowo poniższe warunki wynikające ze wzorów (4.32)-(4.33):

$$H = H(K) \sim 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{i \cdot 2^{2H(K)}} K^2 \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty \quad (4.34)$$

otrzymujemy lemat (por. lemat 3.2).

Lemat 4.11 Jeśli spełnione są założenia lematu 3.2 i skala H użyta w aproksymacjach $\hat{G}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$ zastosowanych w obliczeniowych modelach empirycznych $G(x; K; H; p)$ zależy od skali K tych modeli tak, że spełnione są warunki we wzorze (4.34), to dla dowolnego numeru falkowego p modele te zbiegają średniokwadratowo do identyfikowanej funkcji $G(x)$ w tych samych punktach, w których zbiegają ich odpowiedniki $\hat{G}(x; K; p)$ oparte o oryginalne funkcje falkowe Daubechies $\hat{G}^p(x)$ i $\hat{A}^p(x)$.

Szybkość zbieżności punktowej modeli $G(x; K; H; p)$. W rozdz. 3, w punkcie poświęconym analizie szybkości zbieżności skądowej obciążenia falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, pokazaliśmy, że przy założeniu Z7 (dotyczącym lokalnej ciągłości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ – zob. str. 34), zachodzi następujące oszacowanie (por. wzór (3.28)):

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) \leq 2^{i \cdot 2^{\circ K}} C_{\text{bias}}; \quad \circ = \min f^{\circ}; \quad \text{pg} \quad (4.35)$$

A zatem, biorąc pod uwagę wzory (4.29), (4.30), (4.31) i (4.35), otrzymujemy (w ustalonym punkcie x) oszacowanie błądu średniokwadratowego MSE empirycznych modeli obliczeniowych o postaci (por. wzór (3.30))

$$\text{MSE } G(x; K; H; p) \leq 2^{i \cdot 2^{\circ K}} + 2^{i \cdot 2^{2H}} K^2 + \frac{2^{\circ K}}{N} C_{\text{MSE}} \quad (4.36)$$

gdzie $\hat{C}_{MSE} = \max \{ 2C_{bias}, 2C_{var} \}$. Jeśli zatem w modelach obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ będziemy stosować takie skale aproksymacji H , przy których skądowa $2^{i \cdot 2^{1/2} H} K^2$ jest nie większa od skądowej $2^{i \cdot 2^{\circ} K}$, tj. spełniona jest nierówność (por. wzory (4.34) i (4.35))

$$2^{i \cdot 2^{\circ} K} > 2^{i \cdot 2^{1/2} H} K^2 \quad (4.37)$$

to zagwarantujemy, że oszacowanie błędów średniokwadratowych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ będzie asymptotycznie równe co do rzędu oszacowaniu błędów średniokwadratowych modeli $\hat{G}(x; K; p)$ (por. wzór (3.32) w rozdz. 3).

Rozwiązując nierówność (4.37) otrzymujemy następującą regułę doboru skali aproksymacji H w modelach obliczeniowych $G(x; K; H; p)$, gwarantującą powyższą asymptotyczną równowagę modeli $G(x; K; H; p)$ i $\hat{G}(x; K; p)$:

$$H > H_{min}(K) = \frac{\circ K + \log_2 K^{1/4}}{1/2} \quad (4.38)$$

gdzie (por. wzór (3.32) w rozdz. 3 i wzór (4.4))

$$\circ = \min_{f \in \mathcal{F}} f'' \quad \text{oraz} \quad 1/2 = \begin{cases} \gg 0.55 & \text{dla } p = 2 \\ 1 & \text{dla } p > 2 \end{cases} \quad (4.39)$$

i gdzie K jest skalą modelu falkowego (wzory (3.9) i (4.16)).

Zauważmy, że wymagana skala aproksymacji zależy od przyjętych w modelu funkcji falkowych (ze względu na parametry \circ i $1/2$ – zob. wzór (4.39)) oraz skali modelu K , a zatem (biorąc pod uwagę fakt, że skala ta jest dobierana według reguły (3.31)) także od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, przy czym:

GH1. Ze wzrostem gładkości $R(x)$ i $f(x)$ oraz przy wzroście numeru falkowego p , rośnie także wymagana skala aproksymacji $H_{min}(K)$ (por. wzór (4.39)).

GH2. Dla aproksymacji funkcji falkowych o numerze $p = 2$ wymagana skala aproksymacji $H_{min}(K)$ jest większa niż dla funkcji falkowych z numerem $p > 2$, (por. wzór (4.39)).

Wynika to z faktu, że w przypadku gdy $p = 2$, wartość wykładnika $1/2$ w nierówności (4.37) wynosi $\gg 0.55$ (por. wzór (4.39)) i ze wzrostem skali aproksymacji H błąd po prawej stronie tej nierówności (proporcjonalny do skądowej obciążenia wynikającej z zastosowania aproksymacji funkcji falkowych) maleje z prędkością rzędu $O(2^{i \cdot 1.1H})$, podczas gdy dla falek o numerach $p > 2$ rząd ten wynosi $O(2^{i \cdot 2H})$ (ponieważ $1/2 = 1$; zob. wzór (4.39)).

GH3. Wzrost skali K w modelach powoduje odpowiedni (według wzoru (4.38)) wzrost wymaganej skali aproksymacji $H_{min}(K)$.

Powyższe rozważania prowadzą do następującego lematu.

Lemat 4.12 Jeśli spełnione są założenia lematu 3.3, a skala aproksymacji H w $\mathcal{H}^p(x; H)$ i $\hat{\mathcal{A}}^p(x; H)$ zastosowanych w obliczeniowych modelach empirycznych $G(x; K; H; p)$ jest dobierana według reguły (4.38), to asymptotycznie ich szybkość zbieżności punktowej (w sensie błędów MSE) do nieliniowości $G(x)$ jest taka sama jak falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, dla danej reguły doboru skali K (por. lemat 3.3).

B. Analiza zbieżności całkowej modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$

Dekomponując całkowy błąd średniokwadratowy MISE obliczeniowych modeli empirycznych $G(x; K; H; p)$ otrzymujemy, że

$$\text{MISE } G(x; K; H; p) = E \int_S G(x)_i G(x; K; H; p) dx = \text{ISB } G(x; K; H; p) + \text{IV} G(x; K; H; p)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{ISB } G(x; K; H; p) &= \int_S G(x)_i E G(x; K; H; p) dx \\ \text{IV } G(x; K; H; p) &= E \int_S E G(x; K; H; p)_i G(x; K; H; p) dx \end{aligned}$$

Wariancja $\text{IV } G(x; K; H; p)$. Oszacowanie zintegrowanej wariancji modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ możemy wyznaczyć korzystając z oszacowania punktowej wariancji wyjścia tych modeli we wzorze (4.29)

$$\text{IV } G(x; K; H; p) = \int_S \text{var } G(x; K; H; p) dx \leq \frac{2^K}{N} \hat{C}_{IV} \quad (4.40)$$

gdzie $\hat{C}_{IV} = (b_i - a) \hat{C}_{var}$. Oszacowanie to jest równe (z dokładnością do stałej) oszacowaniu zintegrowanej wariancji falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ wykorzystujących oryginalne funkcje falkowe (por. wzór (3.34)).

Obciążenie $\text{ISB } G(x; K; H; p)$: W oparciu o poniższy wzór (zob. własność (4.28) i odpowiednie wzory na str. 76)

$$\begin{aligned} \text{ISB } G(x; K; H; p) &= \int_S G(x)_i \hat{G}(x; K; H; p) dx = \\ &= \int_S [G(x)_i - G(x; K; p)] + G(x; K; p) \hat{G}(x; K; H; p) dx \end{aligned}$$

błąd całkowego obciążenia empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ można oszacować w następujący sposób (por. wzór (4.30))

$$\begin{aligned} \text{ISB } G(x; K; H; p) &\leq 2 \int_S [G(x)_i - G(x; K; p)]^2 dx + 2 \int_S G(x; K; p) \hat{G}(x; K; H; p) dx = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \text{ISB } \hat{G}(x; K; p) + \overline{\text{ISB}} G(x; K; H; p) \end{aligned}$$

Pierwszy w nawiasie człon oszacowania stanowi zintegrowane obciążenie falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ (por. wzór (3.33) w rozdz. 3). Natomiast drugi składnik jest błędem wynikającym z zastosowania w modelach obliczeniowych aproksymacji funkcji falkowych. Biorąc pod uwagę, że dla dowolnego przedziału $S^0 \subset S$ zachodzi

$$\overline{\text{ISB}} G(x; K; H; p) = \int_{S^0} \overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p) dx$$

składnik ten możemy oszacować korzystając z oszacowania składowej $\overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p)$ obciążenia błędem punktowego MSE modeli obliczeniowych, danego we wzorze (4.31):

$$\overline{\text{ISB}} G(x; K; H; p) = \int_S \overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p) dx \leq 2^{2/H} K^2 \hat{C}_{\text{ISB}} \quad (4.41)$$

gdzie $\hat{C}_{\text{ISB}} = (b_i - a) \hat{C}_{\text{bias}}$.

Zbieżność całkowa modeli $G(x; K; H; p)$. Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do przedstawionego podczas badania średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $G(x; K; H; p)$ otrzymujemy następujący lemat charakteryzujący warunki całkowej zbieżności średniokwadratowej modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ (por. wzory (4.40)-(4.41) ze wzorami (4.29) i (4.31) i zob. lemat 4.11).

Lemat 4.13 Jeśli spełnione są założenia lematu 3.4, a skala aproksymacji H w $\mathcal{H}^p(x; H)$ i $\hat{\mathcal{A}}^p(x; H)$ użytych w obliczeniowych modelach empirycznych $G(x; K; H; p)$ zależy od skali K tych modeli, tak że spełnione są warunki ze wzoru (4.34), to dla każdego p modele te zbiegają do identyfikowanej funkcji $G(x)$ w sensie średniokwadratowego błędów całkowego.

Szybkość zbieżności całkowej modeli $G(x; K; H; p)$. Dla całkowego błędów średniokwadratowych obliczeniowych modeli empirycznych $G(x; K; H; p)$ zachodzi następujące oszacowanie

$$\text{MISE } G(x; K; H; p) \leq 2^{i-2} K + 2^{i-2H} K^2 + \frac{2^{K-i}}{N} \hat{C}_{\text{MISE}} \quad (4.42)$$

z wykładnikiem i wynoszącym (por. wzory (3.40) i (3.45) w rozdz. 3)

$$i = \min \{ \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil; \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil \} \quad \text{oraz} \quad i = \min \{ \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil; \frac{1}{2} \} \quad (= \%) \quad (4.43)$$

odpowiednio dla funkcji $G(x)$ ciągłych i nieciągłych w przedziale $S = [a; b]$ i ze stałymi $\hat{C}_{\text{MISE}} = \max \{ 2C_{\text{bias}}(b_G^0; a_G^0); 2C_{\text{ISB}}; 2\hat{C}_{\text{ISB}}; \hat{C}_{\text{IV}} \}$ (kolejne stałe w definicji \hat{C}_{MISE} są definiowane we wzorach (3.28) i (3.41), (3.45), (4.40) i (4.41) dotyczących oszacowań odpowiednich składowych błędów we wzorze (4.42)).

Stąd, by zapewnić modelom obliczeniowym $G(x; K; H; p)$ rzęd szybkości zbieżności całkowej równy gwarantowanym rzędom szybkości zbieżności całkowej modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ należy tak dobierać skalę aproksymacji H w $\mathcal{H}^p(x; H)$ i $\hat{\mathcal{A}}^p(x; H)$, aby spełniona była poniższa nierówność (por. z nierównościami (4.37))

$$2^{i-2} K > 2^{i-2H} K^2$$

Rozwiązanie tej nierówności dla poszczególnych i ze wzoru (4.43) prowadzi do następującego lematu (por. lemat 4.12).

Lemat 4.14 Jeśli skala aproksymacji H w $\mathcal{H}^p(x; H)$ i $\hat{\mathcal{A}}^p(x; H)$ stosowanych w empirycznych modelach obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ zależy od skali K modeli falkowych i dobierana jest według regu-

$$H > H_{\min}(K) = \frac{\lceil \log_2 K \rceil + \log_2 K}{\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

dla funkcji $G(x)$ ciągłych w przedziale $S = [a; b]$, oraz

$$H > H_{\min}(K) = \frac{\lceil \log_2 K \rceil + \log_2 K}{\frac{1}{2}} \quad (4.45)$$

dla $G(x)$ nieciągłych, to asymptotycznie ich szybkości zbieżności całkowej (w sensie błędów MISE) do nieliniowości $G(x)$ są takie same jak szybkości falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$, gwarantowe dla danego wyboru skali K (por. lematy 3.5 i 3.6 w rozdz. 3).

4.3.2 Analiza wrażliwości empirycznych modeli obliczeniowych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$

Wykorzystując zależności (3.49) i (3.55) (w rozdz. 3) oraz opierając się na lematach 4.11-4.14 i twierdzeniu 2.19 cytowanym w Dodatku B.8 (dotyczącym szybkości zbieżności wg prawdopodobieństwa), otrzymujemy następujące twierdzenia charakteryzujące warunki i szybkości zbieżności obliczeniowych modeli empirycznych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$ (por. twierdzenia 3.1-3.6 z rozdz. 3):

Twierdzenie 4.15 (Zbieżność modeli obliczeniowych) Jeśli skala H użyta w aproksymacjach $\hat{r}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$ zastosowanych w empirycznych modelach obliczeniowych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$ spełnia warunki ze wzoru (4.34), to wówczas modele te zbiegają do nieliniowości $R(x)$ przy tych samych założeniach (i w tym samym sensie), przy których zbiegają do niej falkowe modele empiryczne $\hat{\mathbb{R}}_G(x; K; p)$ (zob. twierdzenia 3.1 i 3.4 oraz wniosek 3.1 w rozdz. 3; por. lematy 4.11 i 4.13).

Twierdzenie 4.16 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej) Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.2, a skala aproksymacji H w $\hat{r}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$ zastosowanych w obliczeniowych modelach empirycznych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$ jest dobierana według reguły (4.38), to asymptotycznie ich szybkość zbieżności punktowej (w sensie błędów MSE) do nieliniowości $R(x)$ jest taka sama jak falkowych modeli empirycznych $\hat{\mathbb{R}}_G(x; K; p)$, dla danej reguły doboru skali K (zob. wzór (3.52) i twierdzenie 3.2 w rozdz. 3; por. lemat 4.12).

Z powyższego twierdzenia oraz twierdzenia 2.19 (Dodatek B.8) wynika, że empiryczne modele obliczeniowe zbiegają punktowo według prawdopodobieństwa z szybkością asymptotycznie równą szybkości zbieżności w tym sensie empirycznych modeli falkowych $\hat{\mathbb{R}}_G(x; K; p)$ (zob. twierdzenie 3.3 w rozdz. 3).

Twierdzenie 4.17 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej) Jeśli skala aproksymacji H w $\hat{r}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$ stosowanych w empirycznych modelach obliczeniowych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$ zależy od skali K modeli falkowych i dobierana jest według reguły (4.44) dla nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ ciągłych w przedziale $S = [a; b]$, oraz według reguły (4.45) dla $R(x)$ i (lub) $f(x)$ nieciągłych, to asymptotycznie ich szybkości zbieżności całkowej (w sensie błędów MISE) do nieliniowości $R(x)$ są takie same jak szybkości falkowych modeli empirycznych $\hat{\mathbb{R}}_G(x; K; p)$, gwarantowane dla danego wyboru skali K (zob. wzory (3.56) i (3.58) i twierdzenia 3.5 i 3.6 w rozdz. 3; por. lemat 4.14).

Z powyższych twierdzeń wynikają następujące wnioski dotyczące wrażliwości empirycznych modeli obliczeniowych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$:

RGH1. Wrażliwy (zgodny z regułami (4.44) i (4.45)) dobór skali H w aproksymacjach funkcji falkowych $\hat{r}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$, pozwala obliczeniowym modelom empirycznym $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$ zachować (asymptotycznie) wrażliwości falkowych modeli empirycznych $\hat{\mathbb{R}}_G(x; K; p)$. W szczególności zatem, w odniesieniu do modeli obliczeniowych $\mathbb{R}_G(x; K; H; p)$ znajdują zastosowanie reguły doboru skal K opracowane dla empirycznych modeli falkowych $\hat{\mathbb{R}}_G(x; K; p)$ (por. wzory (3.56) i (3.58) z rozdz. 3).

RGH2. Dobór wartości skali aproksymacji H funkcji falkowych zależy od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych funkcji falkowych (numeru falkowego p) (por. wzory (4.38)-(4.39), (4.44)-(4.45) oraz własności GH1-GH2).

RGH3. Wzrost skali K falkowych modeli empirycznych powoduje (zgodnie z regułami (4.44)-(4.45)) odpowiedni wzrost wymaganej skali aproksymacji $H_{\min}(K)$ (zob. własność GH3).

Przykłady. Rozpatrzmy teraz przykładowe przypadki identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Niech $R(x)$ i $f(x)$ będą odrodkami stałe w przedziale $S = [a; b]$. Wówczas $\rho = 1=2$ i modele obliczeniowe $R_G(x; K; H; p)$ osiągają asymptotycznie szybkość zbieżności $O(N^{-1=2})$ modeli falkowych $\hat{R}(x; K; p)$ w sensie całkowitego błęd średniokwadratowego, o ile skala aproksymacji H spełnia warunki (por. wzór (4.45) i definicję ρ we wzorze (4.4))

$$H > H_{\min}(K) = \begin{cases} \frac{1}{2} K + 2 \log_2 K & \text{dla } p = 2 \\ \frac{K}{2} + \log_2 K & \text{dla } p > 2 \end{cases}$$

a skala K modeli falkowych dobierana jest według reguły (3.58) w rozdz. 3. Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ spełniają warunek Lipschitza ($\rho = 1=1$), to wówczas $\rho = 1$ i modele obliczeniowe osiągają asymptotycznie szybkość zbieżności $O(N^{-2=3})$ w sensie średniokwadratowego błęd całkowitego, przy skalach aproksymacji H dobieranych według reguły (por. wzór (4.4))

$$H > H_{\min}(K) = \begin{cases} \frac{1}{2} 2(K + \log_2 K) & \text{dla } p = 2 \\ K + \log_2 K & \text{dla } p > 2 \end{cases}$$

i skalach K modeli falkowych wyznaczanych zgodnie ze wzorem (3.56)). Ponieważ dla $p = 2$, minimalna wymagana skala H jest dwukrotnie większa niż dla $p > 2$ (por. własność GH2, str. 78), to zastosowanie w modelach funkcji falkowych o tym numerze wymaga uzyskania dwukrotnie dokładniejszych aproksymacji takich funkcji falkowych.

A. Dobór skali H w aproksymacjach funkcji falkowych $R^p(x; H)$ i $\hat{R}^p(x; H)$

Zwróćmy uwagę, że warunek (4.34) oraz reguły (4.44)-(4.45) doboru minimalnej skali aproksymacji $H_{\min}(K)$ funkcji falkowych gwarantują jedynie asymptotycznie równoważność empirycznych modeli obliczeniowych i empirycznych modeli falkowych wykorzystujących oryginalne („dokładne”) falki. Zatem w praktycznych zastosowaniach, aby zminimalizować wpływ dodatkowego błęd wynikającego ze stosowania aproksymacji $R^p(x; H)$ i $\hat{R}^p(x; H)$ w miejsce oryginalnych falek, należy obliczać je z jak największą rozdzielczością (w jak największej skali $H > H_{\min}(K)$) (por. wzory (4.36) i (4.42)).

Ze względu na asymptotyczny charakter uzyskanych wyników (prawdziwych dla dużych wartości H – a zatem też dużych skal K i, w konsekwencji, także dla dużych liczb pomiarów N – por. wzory (3.56) i (3.58)), w rozdziale 5 przedstawiamy wyniki badań numerycznych dotyczących wpływu dokładności aproksymacji funkcji falkowych na własności modeli obliczeniowych dla umiarkowanych skal $H; K$ i umiarkowanych liczb pomiarów N .

4.4 Szybkie algorytmy wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych

Z obliczeniowego punktu widzenia, problem identyfikacji nieliniowości $R(x)$ sprowadza się do wyznaczenia współczynników w obliczeniowych modelach empirycznych na podstawie danych ze zbioru pomiarowego $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$. Na przykładzie obliczeniowego algorytmu ilorazowego pokazemy, że bezpośrednio wykorzystanie w tym celu wzorów wynikających z rozważań teoretycznych (tj. zastosowanie w obliczeniach wprost wzorów (4.17)) prowadzi do algorytmów o złożoności obliczeniowej rzędu $O(N^\circ)$, gdzie wykładnik \circ zawiera się w przedziale $(1; 2)$ i zależy od gęstości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych w modelach funkcji falkowych (numeru p). Następnie zaproponujemy „szybki” algorytm wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych i wykazemy, że złożoność tego algorytmu wynosi $O(N)$ i, ponadto, nie zależy od gęstości $R(x)$ oraz $f(x)$.

Złożoność obliczeniowa algorytmu ilorazowego

Analizując złożoność obliczeniową algorytmu będziemy posługiwać się pojęciem $opms$ – jednostkowej operacji arytmetycznej polegającej na wymnożeniu (podzieleniu) dwóch liczb i dodaniu (odjęciu) uzyskanego wyniku do innej liczby (zob. np. [81, str. 81]).

Niech $C_G(N; K; p)$ oznacza liczbę operacji $opms$ potrzebnych do wyznaczenia modelu $R_G(x; K; H; p)$. Ponieważ do obliczenia każdego współczynnika tego modelu potrzeba N $opms$ (por. wzory w (4.17)), stąd

$$C_G(N; K; p) = N \cdot P_G(M; K)$$

gdzie $P_G(M; K)$ oznacza liczbę współczynników w modelu obliczeniowym $R_G(x; K; H; p)$ (równą liczbie współczynników w modelu $G(x; K; H; p)$). Liczbę tę można oszacować następująco (zob. wzór (C.23) w Dodatku C.6)

$$P_G(M; K) < 2^K [(b_i - a) + 2p] \tag{4.46}$$

Wyznaczając skalę K modeli na podstawie reguł (3.56) i (3.58) z rozdz. 3 (tj. w zależności od gęstości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych w modelach funkcji falkowych) otrzymujemy, że

$$C_G(N; K; p) < N \cdot 2^{b \frac{1}{2^\circ + 1} \log_2 2^\circ N C} [(b_i - a) + 2p] \in N^{\frac{2^\circ + 2}{2^\circ + 1}} \cdot C_0$$

gdzie $C_0 = (2^\circ)^{1 - (2^\circ + 1)} [(b_i - a) + 2p]$ oraz

$$C_G(N; K; p) < N^{\frac{2^\circ + 2}{2^\circ + 1}} \cdot C_\%$$

gdzie $C_\% = (2^\circ)^{1 - (2^\circ + 1)} [(b_i - a) + 2p]$ dla, odpowiednio, ciągłych i nieciągłych $R(x)$ i $f(x)$. Stąd, ponieważ $\circ > 0$ oraz $\% \in (0; 1 = 2]$, to z powyższych oszacowań wynika następujący lemat.

Lemat 4.15 Złożoność obliczeniowa algorytmu ilorazowego opartego na wzorach (4.17) jest rzędu

$$C_G(N; K; p) = O(N^\circ); \quad \text{gdzie} \quad \circ = \frac{2^\circ + 2}{2^\circ + 1} \in (1; 2) \tag{4.47}$$

dla ciągłych, oraz

$$C_G(N; K; p) = O(N^\circ); \quad \text{gdzie} \quad \circ = \frac{2\% + 2}{2\% + 1} 2^{\frac{3}{2}}; 2^{\frac{1}{2}} \quad (4.48)$$

dla nieciągłych nieliniowości $R(x)$ i (lub) funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Zauważmy, że ze wzrostem gładkości $R(x)$ i $f(x)$ (tj. ze wzrostem \bar{c} i \bar{g}) i przy jednoczesnym wzroście numeru falkowego p , rośnie wartość parametru $\circ (= \min\{\bar{c}; \bar{g}\} / pg)$ (por. wzór (3.56) w rozdz. 3), wykładnik \circ we wzorze (4.47) dąży do wartości 1 i, w konsekwencji, złożoność obliczeniowa algorytmu zbliża się do poziomu $O(N)$. Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ są nieciągłe (i odcinkami gładkie), to minimalna złożoność algorytmu zachodzi dla $\% = 1=2$ (por. wzór (3.58) w rozdz. 3) i jest rzędu $O(N^{3=2})$ (wzór (4.48)).

Przykłady. Dla $R(x)$ i $f(x)$ nieciągłych, odcinkami stałych mamy $\bar{c} = \bar{g} = 1$, a zatem $\% = 1=2$ (por. wzór (3.58)) oraz $\circ = 2=2$ (zob. wzór (4.48)) i złożoność obliczeniowego algorytmu ilorazowego wynosi $O(N^{3=2})$.

Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ spełniają warunek Lipschitza ($\bar{c} = \bar{g} = 1$), to wówczas (por. (3.56)) $\circ = 1$ i złożoność algorytmu maleje do poziomu $O(N^{4=3})$ (zob. wzór (4.47)).

Natomiast, dla bardzo gładkich $R(x)$ i $f(x)$ (gdzie $\min\{\bar{c}; \bar{g}\} \gg p$ i $\circ = p$) złożoność algorytmu zależy jedynie od przyjętych funkcji falkowych: dla $p = 2$ wynosi $O(N^{6=5})$ i ze wzrostem p zbliża się do rzędu $O(N)$ (wzór (4.47)).

4.4.1 Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy

Podstawa teoretyczna. Proponowany algorytm składa się z dwóch kroków. Pierwszy krok polega na wyznaczeniu w skali K współczynników empirycznych $\hat{g}_{K,n}^p$, $n = n_{\min}(K; p) :::: n_{\max}(K; p)$ (współczynników początkowych w algorytmie szybkiej transformaty falkowej FWT – zob. punkt 1.3) na podstawie pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ i opiera się na następujących spostrzeżeniach:

- 2 Ze względu na zwartość nośnika aproksymacji $\hat{g}_{K,n}^p(x; H)$ (wzór (4.6)), każda para pomiarów $(x_k; y_k)$ wpływa na wartości co najwyżej $2p_i + 1$ współczynników $\hat{g}_{K,n}^p$ – odpowiadających tym aproksymacjom $\hat{g}_{K,n}^p(x; H)$ funkcji skalujących $\hat{g}_{K,n}^p(x)$, których nośniki zawierają pomiar x_k – zob. Rys. 4.2 (por. z dyskusją w punkcie 3.1.1, poświęconą analizie szybkości zbieżności punktowej falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ i zob. wzór (3.26) oraz Rys. 3.3).
- 2 Dla danej skali aproksymacji H skądowa wejściowa x_k pary pomiarów $(x_k; y_k)$ należy do przedziału nośnika aproksymacji $\hat{g}_{K,n}^p(x; H)$, to wówczas zachodzi następująca nierówność (por. wzór (4.6))

$$\frac{1}{2^H} + \frac{n}{2^K} > x_k > \frac{n + (2p_i - 1)}{2^K}$$

na podstawie której można wyznaczyć indeksy przesunięć n „aktywnych” – dla danej pary pomiarów $(x_k; y_k)$ – aproksymacji $\hat{g}_{K,n}^p(x; H)$. Z praktycznego punktu

widzenia wygodniej jest jednak wyznaczać te indeksy według poniższej nierówności (wynikającej z postaci nośnika funkcji skalującej $\varphi_{K_n}^p(x)$ – por. wzory (1.11) i (4.6))

$$\frac{n}{2^K} > x_k > \frac{n + (2p_i - 1)}{2^K} \tag{4.49}$$

dzięki czemu szybki algorytm obliczeniowy staje się niezależny od skali aproksymacji H .

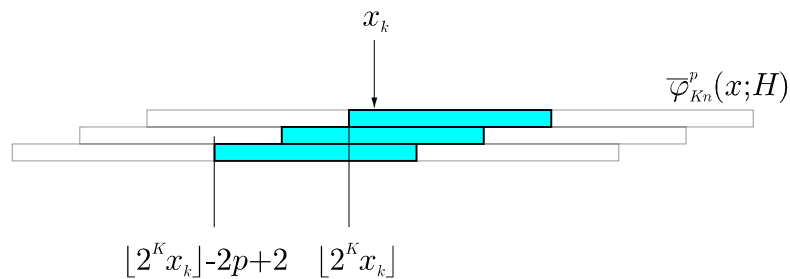
Z powyższych obserwacji wnioskujemy, że indeksy przesunięcia n odpowiadające „aktywnym” aproksymacjom $\varphi_{K_n}^p(x; H)$ możemy (z nierówności (4.49)) wyznaczyć za pomocą następującego wzoru

$$n = \sum_{i=1}^K 2^{K-i} x_k \cdot i; \quad i = 0; \dots; 2p_i - 2 \tag{4.50}$$

Obliczanie wartości współczynników $\alpha_{K_n}^p$ o tych indeksach można zrealizować przy użyciu prostej reguły

$$\alpha_{K_n; (k)}^p = \alpha_{K_n; (k-1)}^p + \frac{y_k}{N} \left(2^{\frac{K}{2} - 1 - p} \cdot 2^{K-i} x_k \cdot i; n; H \right) \quad \text{gdzie} \quad \alpha_{K_n; (0)}^p = 0 \tag{4.51}$$

stanowiącej rekurencyjną wersję odpowiedniego wzoru w (4.17) (dla skali K).



Rys. 4.2 Każda para pomiarów $(x_k; y_k)$ wpływa tylko na wartości współczynników $\alpha_{K_n}^p$ odpowiadających tym aproksymacjom $\varphi_{K_n}^p(x; H)$ funkcji skalujących, których nośniki zawierają pomiar x_k (rysunek ilustruje przypadek, gdy numer falkowy $p = 2$)

Drugi krok algorytmu polega na wyznaczeniu współczynników $\alpha_{M_n}^p$ i $\approx_{m_l}^p$ empirycznych modeli obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$ w oparciu o obliczone w pierwszym kroku współczynniki początkowe $\alpha_{K_n}^p$ (w skali K), z użyciem poniższych wzorów (wzorowanych na algorytmie szybkiej transformaty falkowej – zob. np. [92], [130] i [131], por. wzór (1.27) w rozdz. 1; zob. Dodatek C.7, str. 139)

$$\alpha_{m_n}^p = \sum_{t=0}^{2^i - 1} c_t \alpha_{m+1; 2n+t}^p \quad \text{oraz} \quad \approx_{m_l}^p = \sum_{t=i-2(p_i-1)}^i (i-1)^t c_{1_i t} \alpha_{m+1; 2l+t}^p \tag{4.52}$$

w kolejnych skalach $m = K + 1; \dots; M$.

Szybki obliczeniowy algorytm identyfikacji

Z powyższych rozważań otrzymujemy następujący szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy:

Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy:

Krok 1a. Dla każdej pary pomiarów $(x_k; y_k)$, $k = 1; \dots; N$ wyznacz indeksy translacji n aproksymacji ${}^n P_{K_n}(x; H)$ według wzoru (4.50), a następnie oblicz wartości odpowiadających im oszacowań ${}^n P_{K_n}$ za pomocą wzorów (4.51) i (4.2).

Krok 1b. Oblicz oszacowania ${}^n P_{M_n}$ i ${}^n P_{m_l}$ za pomocą wzorów w (4.52).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy $R_G(x; K; H; p)$ nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (4.15) z licznikiem danym przez (4.16) i wzór (4.2).

Złożoność obliczeniowa szybkiego algorytmu obliczeniowego

Oznaczmy przez $C_G^F(N; K; p)$ liczbę operacji $opms$ potrzebnych do wyznaczenia modeli $R_G(x; K; H; p)$ za pomocą algorytmu (4.50)-(4.52).

Dla każdej pary pomiarów $(x_k; y_k)$ wyznaczenie indeksów n według wzoru (4.50) wymaga $(2p + 1)$ operacji typu $opms$. Z kolei, dla każdego z indeksów n , poszczególne operacje we wzorze (4.51) wymagają 3 $opms$. Stąd na jeden pomiar przypada $4(2p + 1)$ $opms$. A zatem, przy liczbie pomiarów N , w pierwszym kroku algorytmu wykonywane jest $4N(2p + 1)$ $opms$.

Zwróćmy uwagę, że wielkość ta nie zależy od liczby współczynników ${}^n P_{K_n}$ w skali K , a zatem pośrednio (ponieważ skala K modeli jest wyznaczana za pomocą reguły (3.56) i (3.58)) również od gęstości $R(x)$ i $f(x)$.

W drugim kroku algorytmu do obliczenia każdego ze współczynników ${}^n P_{m_n}$ i ${}^n P_{m_l}$ według wzorów w (4.52) potrzeba $(2p + 1)$ $opms$. Liczby obliczanych współczynników wynoszą odpowiednio (por. wzór (4.16))

$$\sum_{m=M}^{n_{\max}} [n_{\max}(m; p) + 1] \quad \text{oraz} \quad \sum_{m=M}^{l_{\max}} [l_{\max}(m; p) + 1]$$

a zatem (por. wzory w (3.5) w rozdz. 3 i wzór (C.22) w Dodatku C.6) są nie większe niż liczba $P_G(M; K)$ współczynników w empirycznym modelu obliczeniowym $R_G(x; K; H; p)$. Stąd całkowita liczba operacji w tym kroku jest nie większa niż (por. wzór (C.23))

$$2^K \leq 2(2p + 1)[(b + a) + 2p]$$

Po zastosowaniu odpowiedniej (w zależności od gęstości $R(x)$ i $f(x)$ – zob. wzory (3.56) lub (3.58)) reguły doboru skali K modeli otrzymujemy, że (por. oszacowania we wzorach (4.47)-(4.48))

$$C_G^F(N; K; p) < 4N(2p + 1) + N^{\frac{1}{2\%+1}} \leq 2(2p + 1)[(b + a) + 2p]$$

dla ciągłych, oraz

$$C_G^F(N; K; p) < 4N(2p + 1) + N^{\frac{1}{2\%+1}} \leq 2(2p + 1)[(b + a) + 2p]$$

dla nieciągłych $R(x)$ i (lub) $f(x)$.

Stąd, ponieważ $\% > 0$ (por. wzory (3.56) i (3.58)), to skądniki $N^{1=(2\%+1)}$ i $N^{1=(2\%+1)}$ w powyższych oszacowaniach rosną wolniej niż liniowo ze wzrostem N . Otrzymaliśmy zatem twierdzenie (por. lemat 4.15).

Twierdzenie 4.18 Złożoność szybkiego algorytmu (4.50)-(4.52) wyznaczania empirycznych modeli obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$ jest rzędu

$$C_G^F(N; K; p) = O(N)$$

dla ciągłych i nieciągłych nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Podsumowanie

W rozdziale zaproponowaliśmy obliczeniowe (praktyczne) odpowiedniki falkowych algorytmów identyfikacji przedstawionych i badanych w rozdziale 3. Na przykładzie algorytmu ilorazowego pokazaliśmy, że konieczne, ze względu na specyfikę funkcji falkowych Daubechies i założone warunki identyfikacji, modyfikacje algorytmów polegające na zastąpieniu w nich funkcji falkowych Daubechies $\hat{A}^p(x)$ i $\tilde{A}^p(x)$ przez ich proste obliczeniowo aproksymacje schodkowe $\hat{A}^p(x; H)$ i $\tilde{A}^p(x; H)$, pozwalają (przy łatwych do realizacji warunkach (4.44)-(4.45)) zachować przez odpowiednie modele obliczeniowe asymptotyczne własności odpowiednich modeli falkowych z oryginalnymi funkcjami falkowymi. Wpływ dokładności aproksymacji funkcji falkowych na zachowanie modeli obliczeniowych dla małych skal H i K badamy numerycznie w rozdziale 5.

Zaproponowaliśmy również szybki algorytm wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych i pokazaliśmy, że jego złożoność jest rzędu $O(N)$, tj. że liczba obliczeń potrzebnych do wyznaczenia tych modeli rośnie jedynie liniowo ze wzrostem liczby pomiarów N (w Dodatku C.8, na str. 140 przedstawiamy procedury komputerowe implementujące ten algorytm).

Rozdział 5

Badania numeryczne falkowych algorytmów identyfikacji

Przedstawione w rozdziałach 3 i 4 własności modeli falkowych i ich obliczeniowych wersji wyznaczanych za pomocą odpowiednich algorytmów identyfikacji mają charakter asymptotyczny, tj. zachodzą dla dużych liczb pomiarów N , dużych wartości skal K w modelach falkowych i dużych skal aproksymacji H w modelach obliczeniowych. Z punktu widzenia zastosowań interesujące jest zachowanie się tych modeli w przypadku, gdy do dyspozycji mamy małą lub umiarkowaną liczbę pomiarów, a skale K i H są niewielkie. Aby uzyskać orientację w tym zakresie, przeprowadzono szereg eksperymentów numerycznych, które, podobnie jak przeprowadzone wcześniej badania teoretyczne, miały na celu zbadanie wpływu:

- ² gęstości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$,
- ² gęstości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, oraz
- ² zastosowanych w modelach funkcji falkowych,

na wielkość i szybkość zmniejszania się błędów modeli obliczeniowych ze wzrostem liczby pomiarów N w przypadkach systemu statycznego i systemu Hammersteina, przy skorelowanych zakłóceniach z_k . Badania obejmowały także:

- ² Porównanie empirycznych modeli obliczeniowych $\hat{R}_G(x; K; H; p)$, $\hat{R}_R(x; K; H; p)$ i $\hat{R}_{Gf}(x; K; H; p)$, przedstawionych w punkcie 4.2 w rozdz. 4
- ² Weryfikację przydatności teoretycznych reguł doboru skali modeli K określonych wzorami (3.56) i (3.58), na przykładzie modeli obliczeniowych $\hat{R}_G(x; K; H; p)$.
- ² Zbadanie wpływu skali aproksymacji H (tj. dokładności stosowanych aproksymacji funkcji falkowych) na zachowanie się modeli obliczeniowych.

W ramach badań empirycznych porównano także algorytmy falkowe z algorytmami trygonometrycznymi (tj. opartymi na klasycznym trygonometrycznym układzie ortogonalnym).

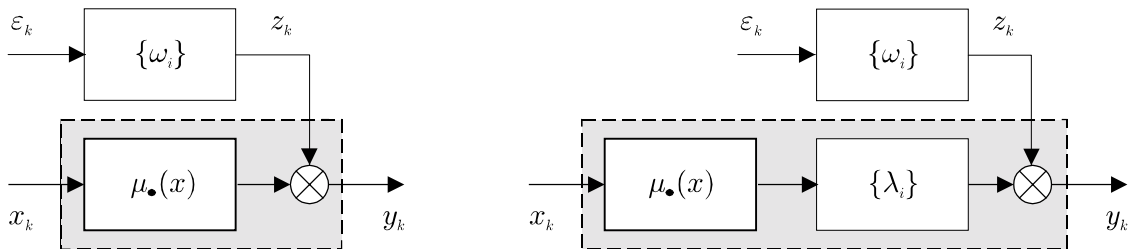
Ponizej przedstawiamy warunki w jakich przeprowadzono eksperymenty, a następnie omówimy wybrane wyniki.

5.1 Warunki eksperymentów

Empiryczne modele obliczeniowe. Algorytmy identyfikacji. W trakcie eksperymentów zbadaliśmy w szczególności rozwiązania w pracy trzech empirycznych modeli obliczeniowych:

$$R_2(x; K; H; p) = \begin{matrix} \text{>} & R_G(x; K; H; p) & \text{danych wzorami} & (4.15) - (4.17) \\ \text{>} & R_R(x; K; H; p) & & (4.18) - (4.19) \\ \text{>} & R_{Gf}(x; K; H; p) & & (4.21) - (4.23) \end{matrix}$$

wyznaczanych odpowiednio według obliczeniowych wersji algorytmu ilorazowego, bezpośredniego oraz algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, przedstawionych w rozdz. 4. W dalszej części rozdziału będziemy stosować skróconą notację i poszczególne modele oznaczać symbolami R_G , R_R oraz R_{Gf} (a ogólnie, za pomocą symbolu R_2).



Identyfikowane systemy. Badania przeprowadziliśmy dla dwóch typów systemów (zob. rysunek powyżej, por. przykłady podane w punkcie 2.3):

- 2 systemu statycznego, oraz
- 2 systemu Hammersteina z liniowym elementem dynamicznym o następującej odpowiedzi impulsowej $f_{s,i} g_{i=0}^6$ (por. zażyczenie Z3 w rozdz. 2):

$$s_0 = 1; \quad s_i = 2^i (i-1); \quad i = 1; \dots; 6 \tag{5.1}$$

Funkcje gęstości wejścia systemu $f(x)$. Wejścia systemów były pobudzane sygnałami pseudolosowymi o następujących funkcjach gęstości (zob. Rys. 5.1, por. zażyczenie Z1 w rozdz. 2):

$$f_1(x) = I_{[0;1]}(x) \quad \text{-- gęstość (gładka) rozkładu równomiernego } U[0; 1]$$

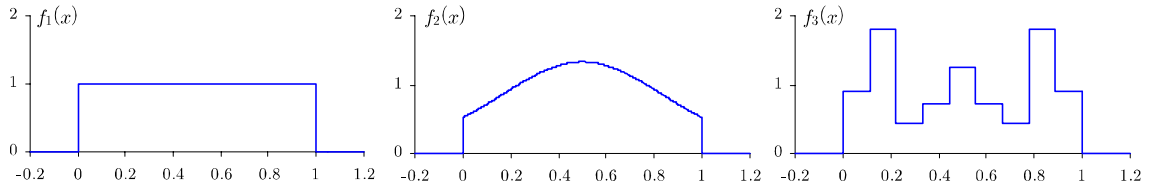
$$f_2(x) = I_{[0;1]}(x) \left(e^{-\frac{3}{24}x} e^{\frac{9}{2}(x-\frac{1}{2})^2} + C_f \right) \quad \text{-- gęstość rozkładu normalnego } N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ ograniczonego do przedziału } [0; 1]$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^6 \frac{h_i}{2} I_{[0; \frac{1}{9}]}(x) \quad \text{-- przykładowa nieciągła funkcja gęstości}$$

$$\tag{5.2}$$

Stała C_f w definicji gęstości $f_2(x)$ dobrano tak aby $\int_0^1 f_2(x) dx = 1$. Współczynniki h_i gęstości $f_3(x)$ wynoszą

$$h_i = f_0:1; 0:1; j_0:15; 0:03; 0:06; j_0:06; j_0:03; 0:15; j_0:1g$$



Rys. 5.1 Funkcje gęstości wejścia systemu stosowane w eksperymentach

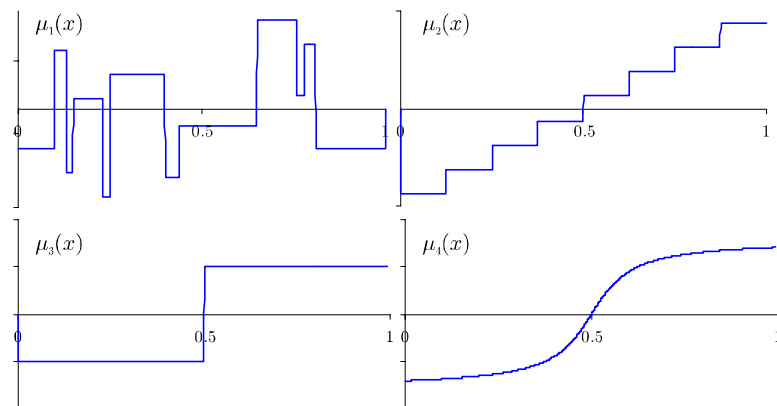
Identyfikowane charakterystyki. W trakcie eksperymentów przyjęto w systemach następujące charakterystyki nieliniowe (zob. Rys. 5.2, zob. zażyczenie Z2 w rozdz. 2 i zażyczenia Z7 (Z7⁰), Z7a (Z7a⁰) w rozdz. 3):

$$\begin{aligned}
 \mu_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i \cdot I_{[0;t_i]}(x) + C_1 && \text{-- charakterystyka nieciągła} \\
 \mu_2(x) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n 8x_i \cdot \frac{1}{2} && \text{-- przykładowa charakterystyka} \\
 &&& \text{kwantyzatora} \\
 \mu_3(x) &= I_{[\frac{1}{2};1]}(x) \cdot I_{[0;\frac{1}{2}]}(x) && \text{-- przykładowa charakterystyka} \\
 &&& \text{przełącznika dwupoziomego} \\
 \mu_4(x) &= \arctan(4x - 2) && \text{-- gładka charakterystyka sigmoidalna}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Uwaga 5.10 Charakterystyka $\mu_1(x)$ z poniższymi współczynnikami t_i i g_i :

$$\begin{aligned}
 t_i &= 0; 1; 0; 13; 0; 15; 0; 23; 0; 25; 0; 40; 0; 44; 0; 65; 0; 76; 0; 78; 0; 81 \\
 g_i &= 4; 5; 3; 4; 5; 4; 2; 2; 1; 4; 3; 3; 1; 2; 1; 4; 2
 \end{aligned}$$

jest stosowana jako funkcja testowa w badaniach własności algorytmów falkowych, por. np. [15], [31]-[32]; pozostałe typy charakterystyk można spotkać w rzeczywistych systemach (zob. np. [41], [143] i [151]).



Rys. 5.2 Identyfikowane charakterystyki

Stała C_1 w definicji charakterystyki $\mu_1(x)$ była dobierana w trakcie eksperymentów zależnie od zastosowanej funkcji gęstości wejścia systemu $f_2(x)$ tak, aby spełniona była

równość $E^{-1}(x_1) = 0$ dzięki czemu, we wzorze (2.8) definiującym postać faktycznie identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w systemie Hammersteina znika przesunięcie z tej nieliniowości względem charakterystyki $E^{-1}(x)$. Dla pozostałych nieliniowości równość ta zachodzi ze względu na ich nieparzystość względem środka przedziału $[0; 1]$ i symetrię poszczególnych funkcji gęstości wejścia systemu w tym przedziale. Stąd (oraz z faktu, że $\sigma_0 = 1$ – por. wzór (5.1)) dla systemu Hammersteina wynika równość pomiędzy identyfikowanymi nieliniowościami $R_2(x)$ a odpowiednimi charakterystykami nieliniowymi $E^{-1}_2(x)$ danymi wzorami w (5.3) (por. uwaga 2.4 w rozdz. 2):

$$R_2(x) = E^{-1}_2(x)$$

Zauważmy, że przy funkcjach gęstości wejścia systemu zdefiniowanych we wzorze (5.1), nieliniowości $R_2(x)$ są identyfikowane w przedziale $S = [0; 1]$ (por. zażyczenie Z1 w rozdz. 2).

Zakłócenia zewnętrzne z_k . Wyjście obu systemów było zakłócające skorelowanym szumem z_k o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną w którym (por. zażyczenie Z4 w rozdz. 2):

- 2 wariacje zakłóceń, $\sigma_z^2 = \text{var } z_k$, dobierane były tak, aby dla każdej z nieliniowości $R_2(x)$, zdefiniowany poniżej stosunek szumu do sygnału

$$\text{NSR} [\%] = \frac{3\sigma_z}{M_R}$$

przyjmowały wartości 0; 5; ...; 30% (M_R jest górnym ograniczeniem modułu identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, zob. zażyczenie Z2 w rozdz. 2).

- 2 współczynniki $f_i, i=0, \dots, 7$ odpowiedzi impulsowej układu dynamicznego, odpowiadającego za skorelowanie zakłóceń z_k , zostały dobrane według poniższego wzoru

$$f_i = \frac{8 - i}{8}; \quad i = 0; \dots; 7$$

Kryterium oceny jakości modeli. W każdym eksperymencie współczynniki badanego modelu falkowego R_2 obliczano w punktach $k = 1; 2; \dots; q$ ($q = 1000$), dla P -krotnie ($P = 50$) generowanych zestawów danych pomiarowych $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$. Jako kryterium jakości modeli przyjęliśmy następujący, unormowany średni błąd

$$\text{MISE}_{\text{emp}} R_2(\zeta; K; H; p) = \frac{\frac{1}{P} \sum_{r=1}^P \left(\frac{1}{q} \sum_{k=1}^q R_{2;(r)}\left(\frac{k}{q}; K; H; p\right) - \int_0^1 R_2^2(x) dx \right)^2}{Z_1} \quad (5.4)$$

gdzie $R_{2;(r)}\left(\frac{k}{q}; K; H; p\right)$ oznacza wartość wyjścia badanego modelu w punkcie $k=q$ dla r -tego zestawu danych.

Liczba pomiarów N była dobierana w zależności od przeprowadzanego eksperymentu.

5.2 Wybrane wyniki badań numerycznych

Wpływ dynamiki systemu i poziomu zakłóceń zewnętrznych z_k . Badając teoretyczne własności empirycznych modeli falkowych i obliczeniowych pokazaliśmy, że zarówno istnienie w identyfikowanym systemie dynamiki jak i obecność skorelowanych zakłóceń zewnętrznych wpływa tylko na wielkości stałych w oszacowaniach rzędu wariancji tych modeli (por. np. wzory w (3.11) i własności V_1 - V_3 , wzory (3.14) i (3.34) w rozdz. 3 oraz wzory (4.25) i (4.29) w rozdz. 4), a zatem nie zmienia ich własności asymptotycznych (tj. dla dużych liczb pomiarów N).

Oddziaływanie tych czynników na zachowanie modeli R_{GF} dla umiarkowanej liczby pomiarów N przedstawiamy na Rys. 5.5-5.6. Zwróćmy uwagę na niewielki wpływ poziomu zakłóceń zewnętrznych z_k na błędy modeli. Wzrost błędów w przypadku systemu Hammersteina wynika ze znacznie „trudniejszych” warunków identyfikacji (większego poziomu faktycznych zakłóceń na jego wyjściu wywołanego obecnością sygnału u_k pochodzącego od dynamiki systemu (por. Rys. 5.3 i 5.4 i wzory (2.5), (2.6) i (2.7) w rozdz. 2).

Wpływ gładkości nieliniowości $R(x)$. Z rozważań teoretycznych wynika, że szybkość zmniejszania się błędów empirycznych modeli obliczeniowych rośnie wraz ze wzrostem gładkości nieliniowości $R(x)$ (przy odpowiednio gładkich $f(x)$ i dużych numerach falkowych p – por. wzory (3.57) i (3.59), (3.91) i (3.94) oraz (3.110) w rozdz. 3).

Porównując pod tym kątem wyniki badań dla modeli obliczeniowych R_G przedstawione na Rys. 5.7 można stwierdzić, że największy wpływ na poziom błędów ma położenie punktów nieciągłości nieliniowości poza siatką binarną. Natomiast sam fakt istnienia nieciągłości nie jest już tak istotny (błędy dla nieciągłych nieliniowości $R_2(x)$ i $R_3(x)$ są znacznie mniejsze niż odpowiadające im błędy dla nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$ i porównywalne z błędami otrzymanymi dla gładkiej $R_4(x)$). Modele R_G oparte o funkcje Haara nadają się zatem do identyfikacji nieliniowości nieciągłych, gdy punkty nieciągłości (skoków) leżą na siatce binarnej (por. też dyskusję na ten temat w [108, str. 956]).

Warto też zauważyć, że za wyjątkiem nieliniowości $R_1(x)$ (zob. Rys. 5.5-5.7), już powyżej liczby pomiarów $N \gg 150$, błędy modeli obliczeniowych stają się bardzo małe, niezależnie od typu identyfikowanego systemu.

Wpływ gładkości funkcji gęstości wejścia $f(x)$. Porównując w rozdz. 3 własności asymptotyczne modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K; p)$ oraz $\hat{R}_R(x; K; p)$ stwierdziliśmy, że szybkość zbieżności tych ostatnich nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.57) i (3.91) oraz (3.59) i (3.94) w rozdz. 3). Wykresy na Rys. 5.8 wskazują, że własność ta zachodzi również dla odpowiadających im modeli obliczeniowych R_G , przy umiarkowanej liczbie pomiarów N .

Wpływ zastosowanych funkcji falkowych. Z analizy własności asymptotycznych empirycznych modeli obliczeniowych wynika, że przyjęcie w nich funkcji falkowych o wyższych numerach p powoduje (przy odpowiednio gładkich $R(x)$ i $f(x)$) wzrost szybkości zbieżności tych modeli (wzrost szybkości zmniejszania się ich błędów – por. wzory (3.57) i (3.59), (3.91) i (3.94) oraz (3.110) i zob. dyskusję na temat doboru numeru falkowego p przeprowadzoną dla modeli falkowych w rozdz. 3). Zauważmy jednak (zob. Rys. 5.9 i 5.10), że w zakresie $N < 500$ pomiarów (przy gładkiej nieliniowości $R_4(x)$ i funkcji gęstości wejścia $f_1(x)$) szybkości zmniejszania się błędów modeli R_G i R_R nie zależą od przyjętych

funkcji falkowych. Zwróćmy także uwagę, że od zastosowanych funkcji falkowych zależy wierność modeli R_{Gf} (zob. Rys. 5.11), jednakże przyjęcie w nich funkcji falkowych o numerze $p > 1$ powoduje zwiększenie ich błędów. Aby wskazać możliwą przyczynę takiego zachowania porównajmy postacie modeli R_G i R_{Gf} (zob. wzory (4.15) i (4.21) w rozdz. 4):

$$R_G(x; K; H; p) = \frac{G(x; K; H; p)}{f(x)} \quad \text{oraz} \quad R_{Gf}(x; K; H; p) = \frac{G(x; K; H; p)}{f(x; K; H; p)}$$

i zauważmy, że w modelach R_{Gf} mianownik (empiryczny model obliczeniowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$) może (dla $p > 1$) przybierać wartości ujemne (por. np. Rys. 4.1) powodując zmianę znaku na wyjściu całego modelu, a tym samym, znaczne zwiększenie się jego błędów w stosunku do identyfikowanej nieliniowości.

5.2.1 Stosowalność reguły doboru skali modeli

Jak wykazaliśmy w poprzednich rozdziałach, aby zapewnić modelom obliczeniowym zbieżność do identyfikowanych nieliniowości $R(x)$ należy spełnić odpowiednie ogólne warunki podane np. we wzorach (3.37) i (3.89), dotyczące skal modeli K . Jednakże, jak pokazują wykresy na Rys. 5.12-5.14, w przypadku umiarkowanej liczby pomiarów $N < 500$, niedbany dobór skal K w modelach obliczeniowych istotnie zwiększa wartości ich błędów.

Porównanie wyników badań przeprowadzonych dla modeli obliczeniowych R_G (zob. Rys. 5.15 wskazuje na nieznaczne różnice pomiędzy skalami modeli K , wyznaczanymi za pomocą teoretycznych reguł (3.56) i (3.58) a optymalnymi (względem błędów (5.4)) skalami tych modeli wyznaczonymi numerycznie w trakcie eksperymentów i świadczy o przydatności tych reguł również przy umiarkowanej liczbie pomiarów z zakresu $N = 100; \dots; 500$. Zauważmy jednak, że pewnym ograniczeniem możliwości zastosowania ich w praktyce jest wymaganie znajomości gładkości identyfikowanych nieliniowości oraz gładkości funkcji gęstości wejścia systemu – por. Rys. 5.12).

Wskazemy teraz przyczynę różnic pomiędzy tymi skalami, biorąc jako przykład empiryczny model falkowy $\hat{R}_G(x; K; p)$ (korzystając z jego równoważności z badanym modelem obliczeniowym R_G). Podstawą rozważań będzie poniższe oszacowanie błędów MISE modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ (por. wzory (3.30), (3.41) oraz (3.45) w rozdz. 3):

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K; p) \leq 2^{i-2} K^2 C_{ISB} + \frac{2^K}{N} C_{IV} \quad (5.5)$$

gdzie $\cdot = \circ$ (zob. np. wzór (3.56)) dla nieliniowości $G(x)$ ciągłych w przedziale $[0; 1]$ oraz $\cdot = \%$ (dla $G(x)$ nieciągłych – zob. wzór (3.58)). Stała C_{ISB} zależy od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych w modelu funkcji falkowych (por. np. wzór (3.45)), natomiast C_{IV} jest stałą zależną od wierności części dynamicznej systemu oraz zakłóceń zewnętrznych (zob. odpowiednie oszacowania w Dodatkach B.1-B.2).

Minimalizując oszacowanie (5.5) względem parametru skali K otrzymujemy teraz, że

$$K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2 \cdot + 1} \log_2 2 \cdot N + \Phi = bK_{\text{opt}}(N) + \Phi_c, \quad \text{gdzie} \quad \Phi = \frac{1}{2 \cdot + 1} \log_2 \frac{C_{ISB}}{C_{IV}} \quad (5.6)$$

Zauważmy, że zastosowanie w modelach $\hat{R}_G(x; K; p)$ powyższego wzoru jako reguły doboru skali K w miejsce odpowiedniej reguły (3.56) (gdy $\cdot = \circ$) lub (3.58) (gdy $\cdot = \%$)

nie zmienia asymptotycznych szybkości zbieżności tych modeli (danych, odpowiednio, wzorami (3.57) i (3.59)). Tym niemniej, przy skończonej liczbie pomiarów N postać dodatkowego składowika Φ wskazuje, że:

- ² W sytuacji, gdy stała C_{ISB} jest większa niż C_{IV} (np. przy niewielkich zakłóceniach i w przypadku nieliniowości nieciągłych typu $R_1(x)$), ze wzoru (5.6) wynika, że optymalna skala modeli K może być większa (ponieważ $\frac{C_{ISB}}{C_{IV}} > 1$ i $\Phi > 0$) niż wyznaczona przez regułę (3.58) (por. wykres z lewej strony Rys. 5.15).
- ² Jeśli we wzorze (5.5) dominująca stała jest C_{IV} (np. podczas identyfikacji nieliniowości w systemie Hammersteina lub w obecności zakłóceń z_k o dużej amplitudzie, czy też w przypadku gładkich nieliniowości $R_4(x)$), to wówczas $\frac{C_{ISB}}{C_{IV}} < 1$, $\Phi < 0$ i, w konsekwencji, optymalna skala K modeli może być mniejsza od skali dobranej na podstawie reguły (3.56) (por. wykres z prawej strony Rys. 5.15).

5.2.2 Wpływ skali aproksymacji falek na zachowanie modeli obliczeniowych

W rozdziale 4 wykazaliśmy, że warunkiem asymptotycznej równoważności modeli falkowych i ich obliczeniowych odpowiedników jest właściwy dobór skali aproksymacji H (zob. np. wzory (4.44)-(4.45)).

Wykresy przedstawione na Rys. 5.16 potwierdzają wpływ skali aproksymacji H na wielkość błędów modeli obliczeniowych R_G (zauważmy tam, że dla H bliskich zeru, wzrost skali modeli K nie powoduje zmniejszania się błędów tych modeli – por. np. oszacowania (4.36) i (4.42)).

Kolejny wykres (zob. Rys. 5.17) wskazuje ponadto, że w modelach R_G , za błędem wynikającym z zastosowania w nich aproksymacji funkcji falkowych odpowiada głównie zjawisko akumulacji błędów aproksymacji z poszczególnych skal $m = M; \dots; K; 1$ tych modeli (zob. uwaga 3.12 w Dodatku C.4). Na wykresie tym widzimy bowiem, że dla skal M bliskich K , zastosowanie nawet bardzo „zgrubnych” aproksymacji funkcji falkowych (przyjęcie mniejszej skali $H = 0; 1; 2$) tylko nieznacznie zwiększa błąd modeli obliczeniowych R_G . Wynik ten stanowi przesłankę za stosowaniem w praktyce modeli obliczeniowych złożonych tylko z aproksymacji funkcji skalujących (tj. takich w których zachodzi równość $M = K$).

5.2.3 Porównanie algorytmu falkowego z algorytmem trygonometrycznym

Modele oparte na układowie trygonometrycznym. Warunki eksperymentów. W trakcie eksperymentów porównawczych przyjęliśmy, że funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest nieznana. Stało się to powodem do porównania właściwości algorytmów falkowych z algorytmami opartymi na szeregach trygonometrycznych wybraliśmy (wyznaczany według algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu) empiryczny model obliczeniowy R_{GF} oraz następujący empiryczny model trygonometryczny otrzymywany według algo-

rytmu podanego m.in. w [44] lub [50])

$$\hat{R}_F(x; L) = \frac{\sum_{j=-L}^L \hat{a}_m e^{imx}}{\sum_{j=-L}^L \hat{a}_m e^{imx}} \quad \text{gdzie} \quad \hat{a}_m = \sum_{k=1}^K y_k e^{i m x_k} \quad (5.7)$$

Eksperymenty przeprowadziliśmy dla charakterystyk i funkcji gęstości wejścia systemu podanych we wzorach (5.2) i (5.3). Parametr L modeli trygonometrycznych $\hat{R}_F(x; L)$ (oznaczanych dalej krótko: \hat{R}_F), podobnie jak skala K modeli obliczeniowych R_{GF} , dobieraliśmy numerycznie tak, aby dla danej liczby pomiarów $N = 5; \dots; 500$, wyznaczony model miał najmniejszy błąd (5.4).

Wyniki porównania. Kolejne wykresy na Rys. 5.18-5.21 przedstawiają porównanie wielkości i szybkości zmniejszania się błędów modeli obliczeniowych R_{GF} (dla numerów falkowych $p = 1; 2$) i modeli trygonometrycznych R_F ze wzrostem liczby pomiarów N . Zauważmy, że jakkolwiek różnice pomiędzy błędami porównywanych modeli dla są niewielkie, to jednakże, w sposób naturalny, modele oparte o falki Haara ($p = 1$) znacznie lepiej odtwarzają kształty nieliniowości w przypadkach gdy są one nieciągłe. Zwracamy także uwagę na tendencję do „wygładzania” identyfikowanych nieliniowości przez modele trygonometryczne oraz modele obliczeniowe z falkami numerze $p = 2$ (zob. Rys. 5.19-5.20), a także bardzo niekorzystne (z punktu widzenia zachowania „kształtu” identyfikowanej nieliniowości) zachowanie się tych ostatnich w przypadku nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$ (zob. Rys. 5.18).

Wykresy na Rys. 5.22 przedstawiają porównanie wpływu gęstości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ na błędy modeli obu typów. Zauważmy, że wspólną cechą modeli obliczeniowych z numerem falkowym $p = 2$ i modeli trygonometrycznych są ich duże błędy dla liczb pomiarów N rzędu 100. Zachowanie to można wytłumaczyć za pomocą argumentacji analogicznej do przedstawionej w dyskusji na temat wpływu numeru falkowego p na modele obliczeniowe R_{GF} , str. 92).

Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych można stwierdzić, że przy umiarkowanej liczbie pomiarów N :

- ² Wpływ (nawet znacznego – NSR $\leq 30\%$) poziomu zakłóceń zewnętrznych z_k na błędy modeli jest praktycznie pomijalny.
- ² Błędy modeli nie ulegają także istotnemu zwiększeniu w przypadku, gdy identyfikowana nieliniowość jest elementem systemu Hammersteina.
- ² Modele falkowe są „wrażliwe” na położenie punktów nieciągłości w identyfikowanych nieliniowościach, natomiast mniejszy wpływ na ich zachowanie ma sam fakt obecności nieciągłości w tych nieliniowościach.

- ² Dobór funkcji falkowych w modelach R_G i R_R (tj. w przypadku znanej funkcji gęstości wejścia systemu) ma także niewielki wpływ na szybkość zmniejszania się błędów tych modeli wraz ze wzrostem liczby pomiarów.

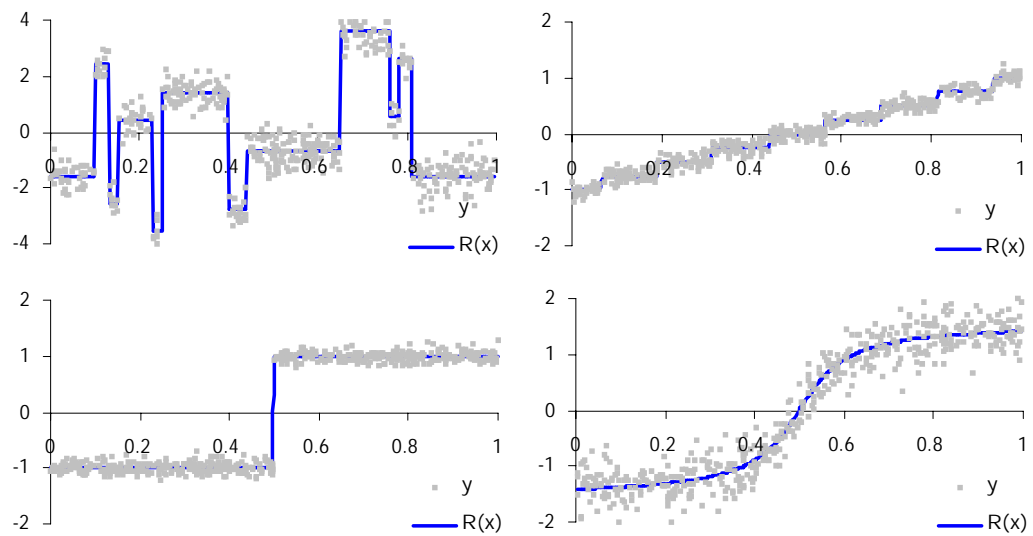
Zaobserwowaliśmy także, że:

- ² Znaczny wpływ na zachowanie modeli ma prawidłowy dobór skali K i stwierdziliśmy pewną przydatność „teoretycznych” reguł doboru tej skali. Analiza wyników eksperymentów wskazuje także na potrzebę znalezienia precyzyjniejszych reguł, przydatnych zwłaszcza przy braku informacji wstępnej na temat gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.
- ² Zachowanie empirycznych modeli obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$, $R_R(x; K; H; p)$ oraz $R_{GF}(x; K; H; p)$ dla liczb pomiarów N rzędu kilkuset jest podobne. Natomiast przy małych liczbach pomiarów ($N < 100$) modele $R_{GF}(x; K; H; p)$, poza przypadkiem gdy $p = 1$, stają się nieprzydatne.
- ² Wpływ skali H w aproksymacjach $\hat{A}^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$ zastosowanych w modelach obliczeniowych na jakość tych modeli zależy głównie od różnicy pomiędzy ich skalami M i K , i jest najmniejszy gdy skale te są równe (tj. gdy empiryczne modele obliczeniowe składają się tylko z aproksymacji funkcji skalujących).

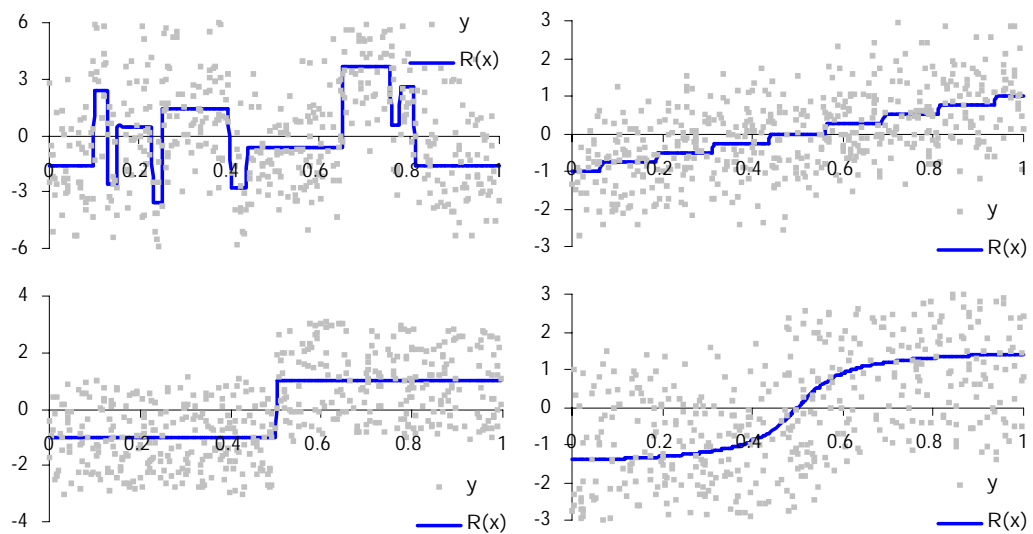
Po porównaniu własności modeli otrzymywanych według algorytmu falkowego i algorytmu trygonometrycznego należy stwierdzić, że w zakresie liczb pomiarów $N < 500$:

- ² Oba typy modeli są porównywalne z punktu widzenia wielkości i szybkości zmniejszania się ich błędów ze wzrostem liczby pomiarów N , tak dla ciągłych jak i nieciągłych nieliniowości $R(x)$.
- ² Przewaga modeli falkowych ma miejsce jedynie w przypadku modeli z funkcjami Haara, które pozwalają (ze swej natury), wierniej niż modele trygonometryczne, odtwarzać nieliniowości nieciągłe.

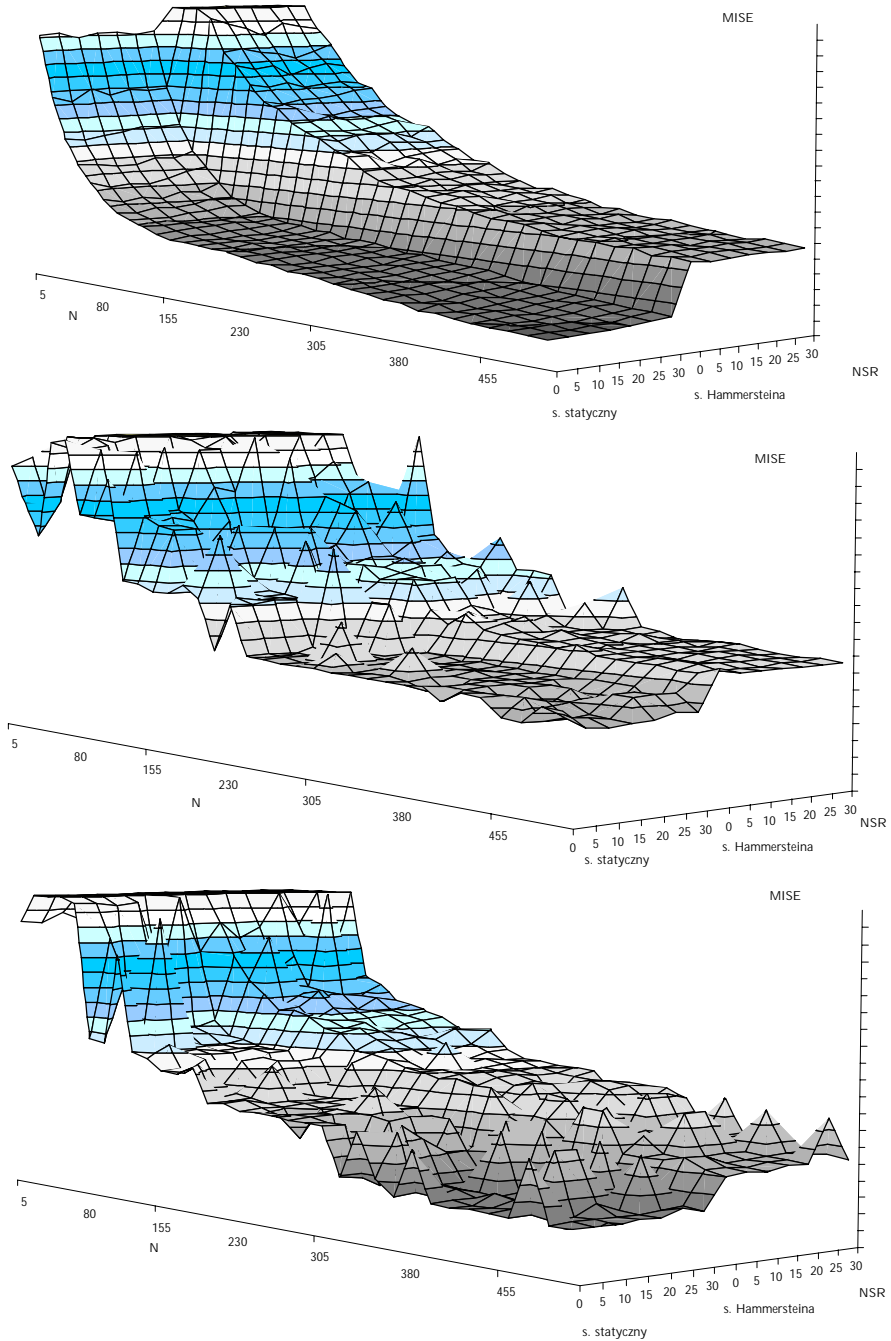
Rezultaty badań numerycznych – wykresy



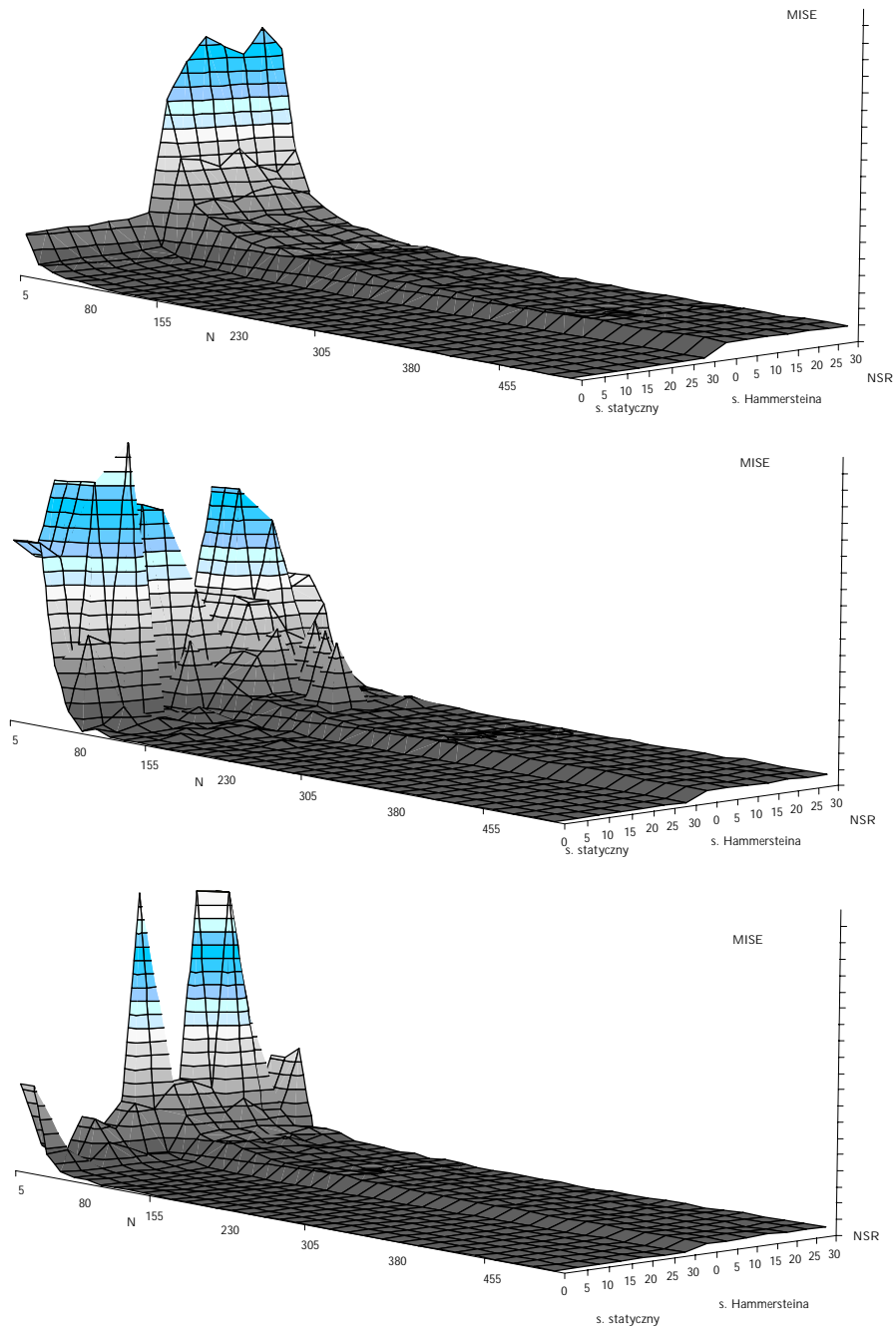
Rys. 5.3 W systemach statycznych wyjście zakłócone jest skorelowanym szumem z_k (na rysunku NSR = 10%)



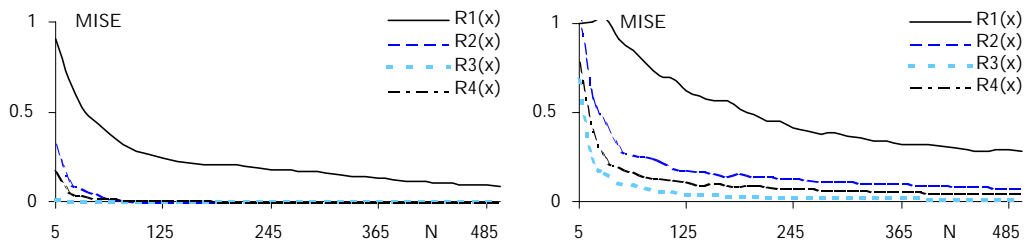
Rys. 5.4 Obecność w systemach Hammersteina dodatkowych zakłóceń w_k pochodzących od systemu znacznie pogarsza warunki identyfikacji (NSR = 10%)



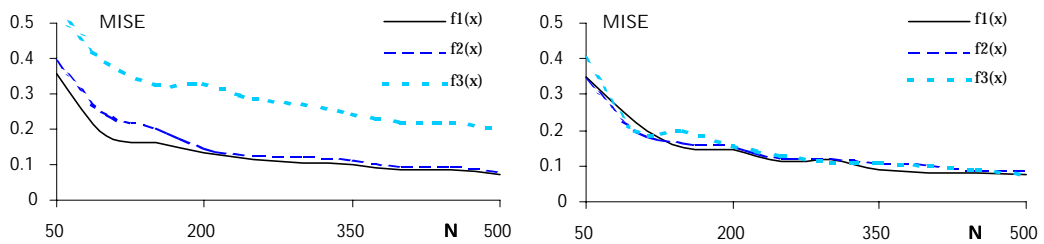
Rys. 5.5 Wpływ poziomu zakłóceń pomiarowych z_k i typu systemu na błąd empirycznych modeli obliczeniowych R_{Gf} ($p = 1; 3; 6$) (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$)



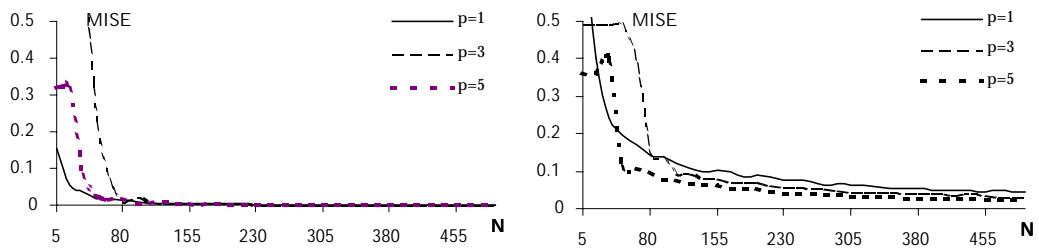
Rys. 5.6 Wpływ poziomu zakłóceń pomiarowych z_k i typu systemu na błąd empirycznych modeli obliczeniowych R_{Gf} ($p = 1; 3; 6$) (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$)



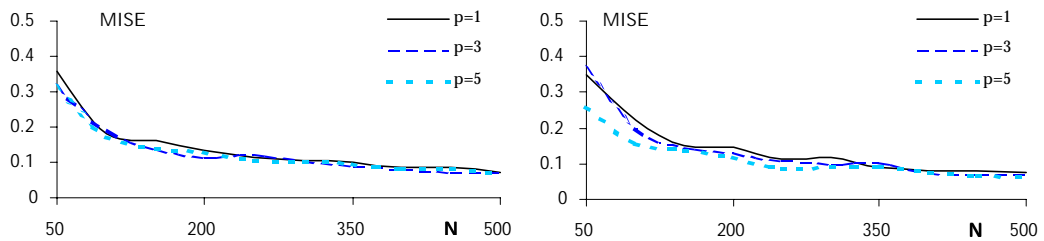
Rys. 5.7 Porównanie błędów modeli obliczeniowych R_G dla systemu statycznego (z lewej) i systemu Hammersteina (z prawej) (nieliniowość gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, NSR = 25%)



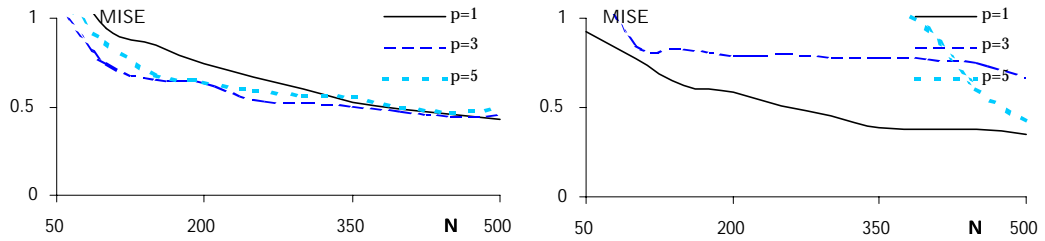
Rys. 5.8 Wpływ gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ na błędy modeli obliczeniowych R_G i R_R (nieliniowość gładka $R_4(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



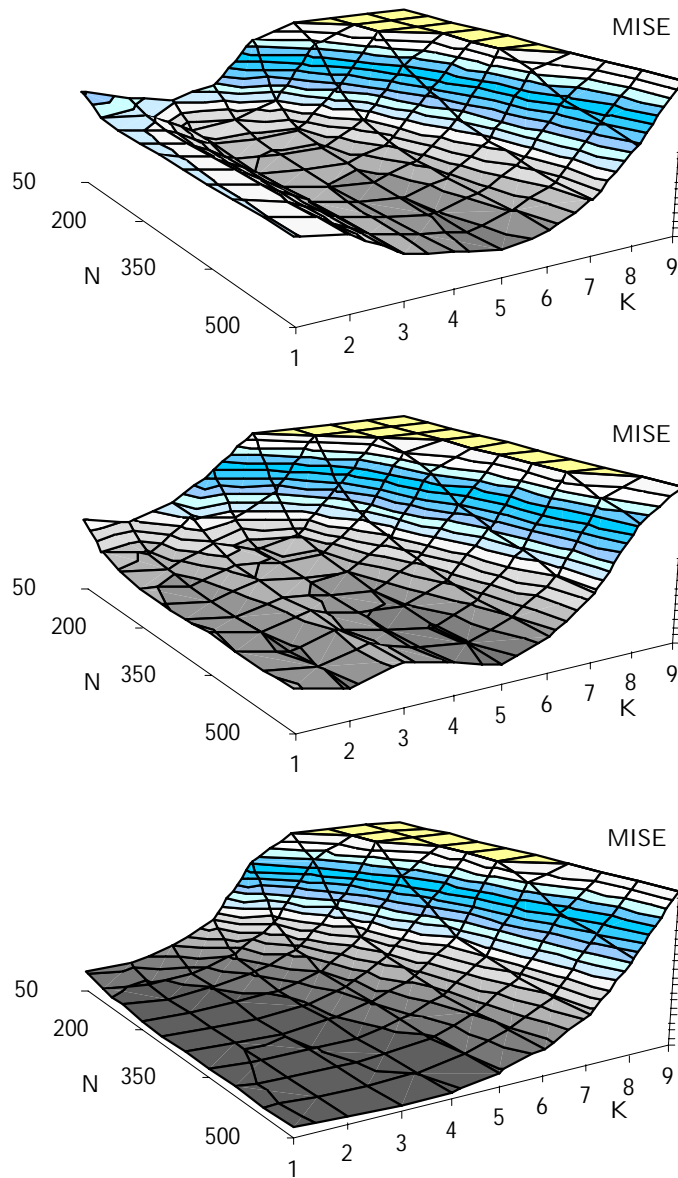
Rys. 5.9 Wpływ przyjętych funkcji falkowych na błędy modelu obliczeniowego R_G dla systemu statycznego (z lewej) i systemu Hammersteina (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, NSR = 25%)



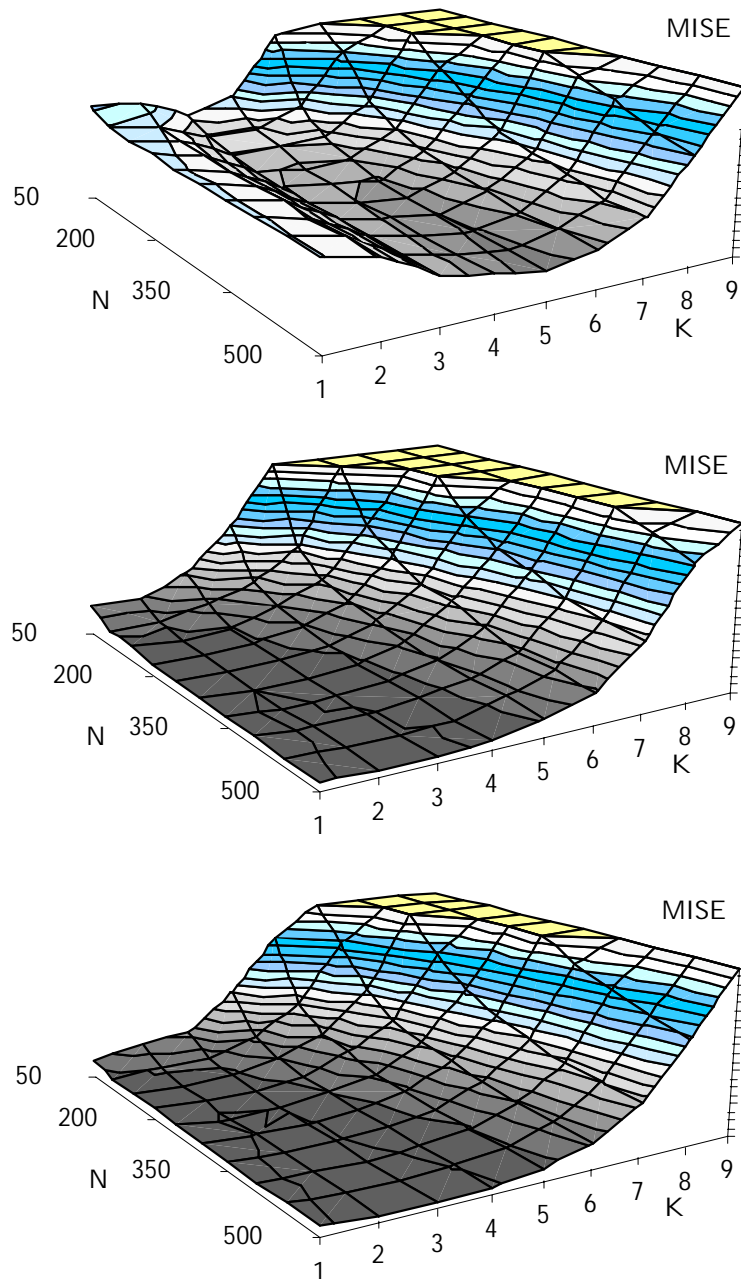
Rys. 5.10 Zależność błędów modeli R_G i R_R od przyjętych w nich funkcji falkowych (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



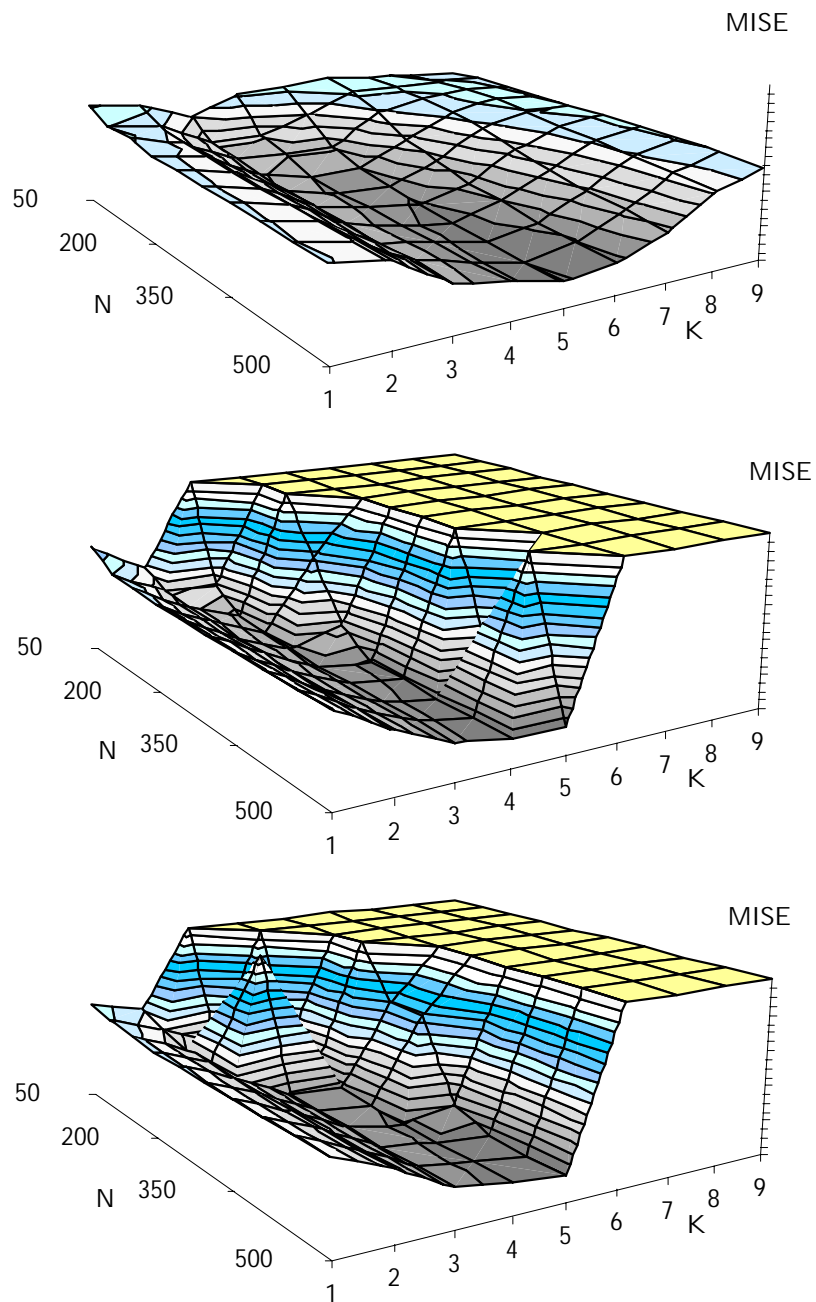
Rys. 5.11 Zależność błędów modeli R_G i R_{Gf} od przyjętych w nich funkcji falkowych (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



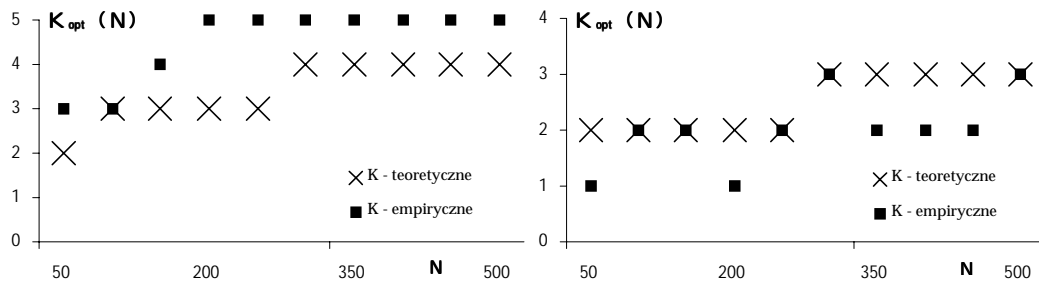
Rys. 5.12 Zależność błędów modeli obliczeniowych R_G od ich skali K i liczby pomiarów N (od góry: nieliniowość nieciągła $R_1(x)$ i nieciągła funkcja gęstości systemu $f_3(x)$, następnie $R_4(x)$ i $f_3(x)$ oraz $R_4(x)$ i $f_1(x)$); system Hammersteina, NSR = 25%). Porównanie potwierdza, że własności modeli R_G zależą od gładkości $R(x)$ oraz $f(x)$



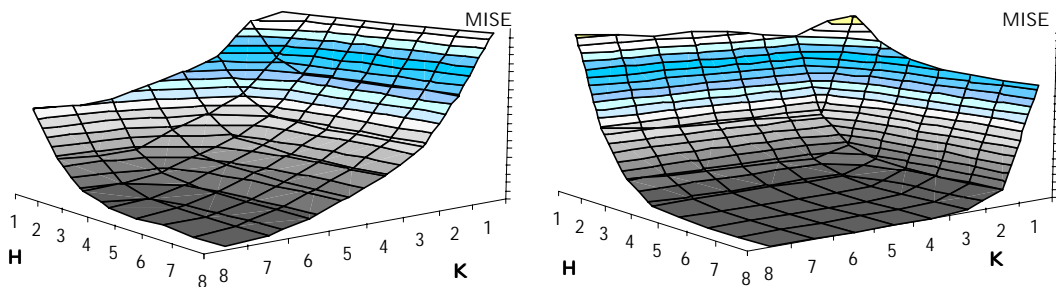
Rys. 5.13 Zależność błędów modeli obliczeniowych R_R od ich skali K i liczby pomiarów N (od góry: nieliniowość nieciągła $R_1(x)$ i gładka funkcja gęstości systemu $f_1(x)$, następnie gładka $R_4(x)$ i nieciągła $f_3(x)$, na dole $R_4(x)$ i $f_1(x)$; system Hammersteina, $NSR = 25\%$). Porównanie potwierdza, że wartości modeli R_R zależą jedynie od gładkości nieliniowości $R(x)$ (por. rysunek 5.12 na poprzedniej stronie)



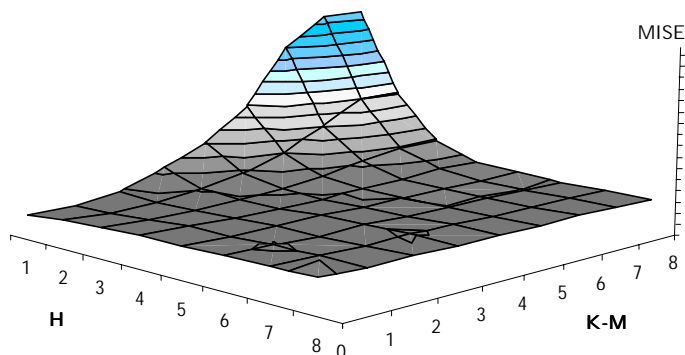
Rys. 5.14 Zależność błędów modeli obliczeniowych R_{Gf} od ich skali K i liczby pomiarów N dla $p = 1; 2; 6$, (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%). Zauważmy, że poza przypadkiem gdy $p = 1$ (wykres górny) zwiększenie skali K modelu nawet o 1 może spowodować „lawinowy” wzrost błędów modelu (por. dyskusja w tekście)



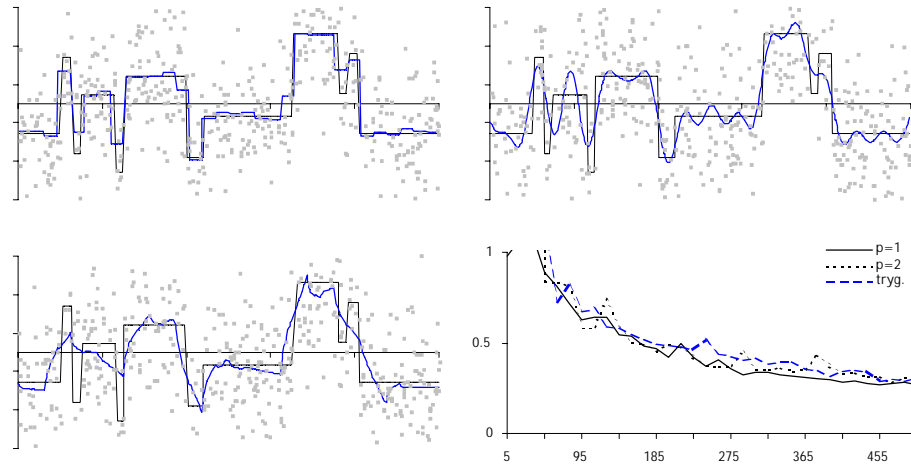
Rys. 5.15 Różnice pomiędzy skalami K modeli wyznaczonymi za pomocą reguły doboru skali (3:56) i (3:58) a optymalnymi skalami obliczonymi numerycznie. Lewy wykres odnosi się do nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$, prawy do gładkiej $R_4(x)$ (model R_G z funkcjami falkowymi o numerze $p = 1$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



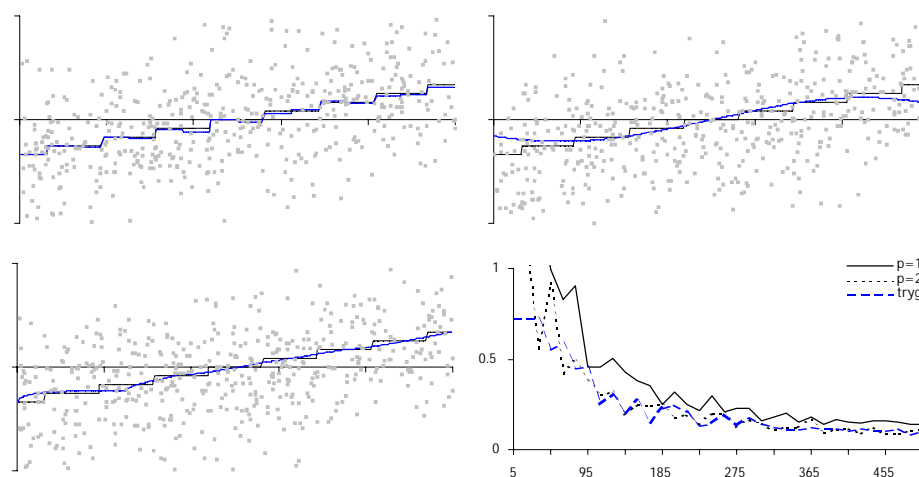
Rys. 5.16 Zależność błędów modeli obliczeniowych R_G od skali aproksymacji H (z lewej nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, z prawej gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system statyczny, $N = 5000$, NSR = 0%, $p = 2$)



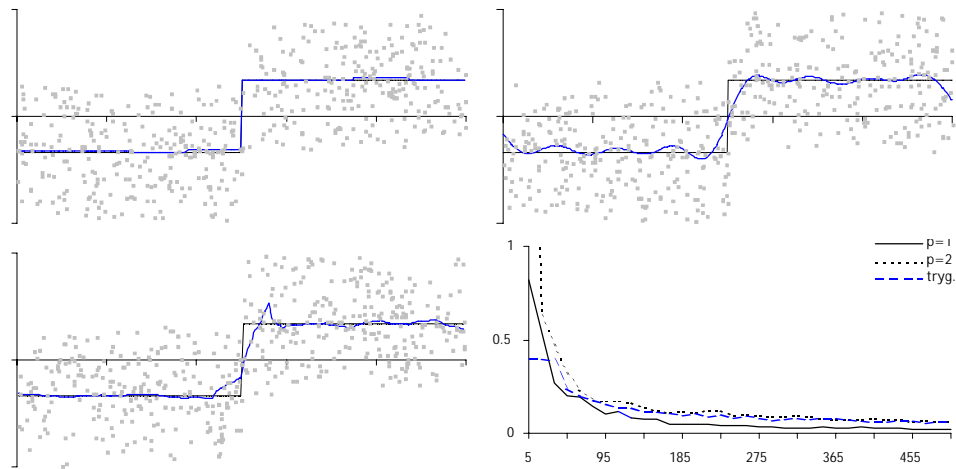
Rys. 5.17 Zależność błędów modeli obliczeniowych R_G od skali aproksymacji H oraz różnicy pomiędzy skalami M i K w modelu (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system statyczny, $N = 5000$, NSR = 0%, $p = 2$)



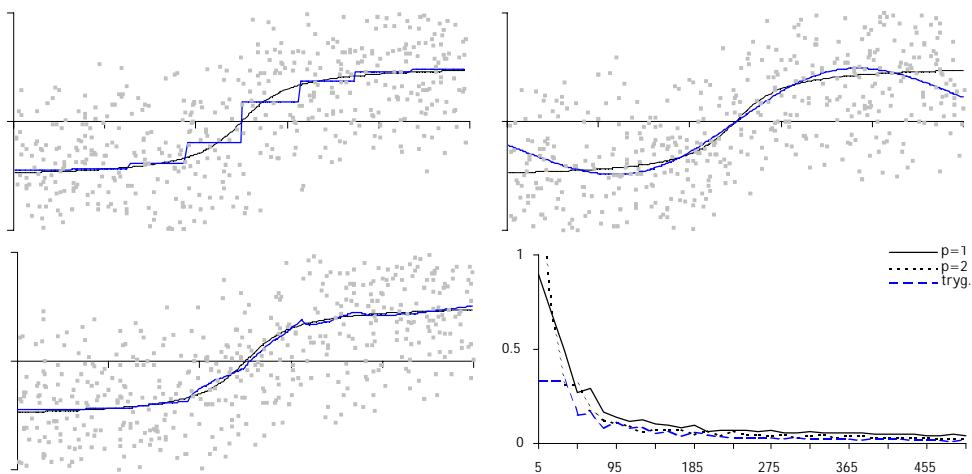
Rys. 5.18 Porównanie modeli falkowych R_{Gf} z modelami R_F opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele R_{Gf} z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



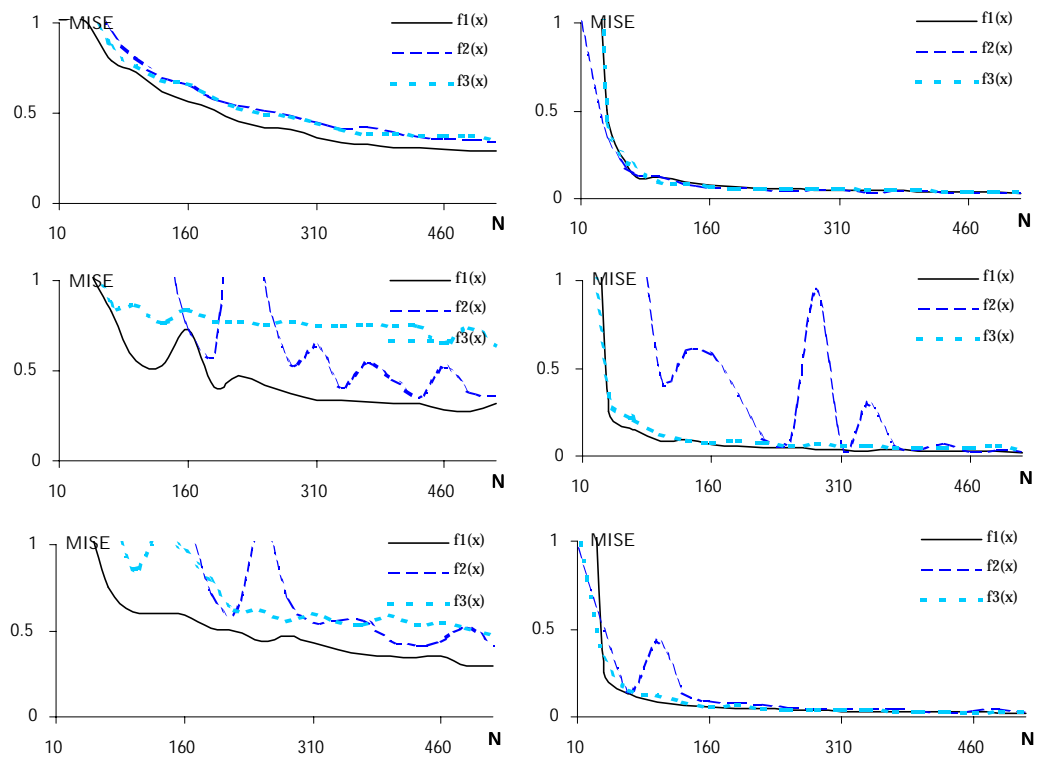
Rys. 5.19 Porównanie modeli falkowych R_{Gf} z modelami R_F opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele R_{Gf} z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość nieciągła $R_2(x)$ typu kwantyzator, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



Rys. 5.20 Porównanie modeli falkowych \mathbb{R}_{Gf} z modelami $\hat{\mathbb{R}}_F$ opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele \mathbb{R}_{Gf} z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość nieciągła $R_3(x)$ typu przekątnikowego, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



Rys. 5.21 Porównanie modeli falkowych \mathbb{R}_{Gf} z modelami $\hat{\mathbb{R}}_F$ opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele \mathbb{R}_{Gf} z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



Rys. 5.22 Wpływ gęstości wejścia systemu $f_2(x)$ na błędy modeli falkowych \hat{R}_{Gf} i modelu trygonometrycznego \hat{R}_F . Od góry modele \hat{R}_{Gf} dla $p = 1$ i $p = 2$ oraz model \hat{R}_F . Wykresy z lewej strony dotyczą nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$, z prawej – gładkiej $R_4(x)$ (gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)

Zakończenie

W pracy zaproponowano i zbadano falkowe algorytmy identyfikacji nieliniowych charakterystyk elementów statycznych będących częścią składową zozonowanych systemów dynamicznych o strukturze blokowej (rozdz. 2). Charakterystyki identyfikuje się w skończonym przedziale S , w oparciu o zbiór pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$ wejścia i wyjścia całego systemu i przy niewielkiej informacji wstępnej dotyczącej zarówno samej charakterystyki jak i pozostałych elementów systemu. Przyjmuje się, że identyfikacja (eksperyment pomiarowy) ma przebiegać w trakcie normalnej pracy systemu oraz w warunkach losowych, tj. przy losowym wejściu x_k systemu i losowych zakłóceniach z_k oddziaływujących na jego wyjście.

Ze względu na zozonowaną strukturę systemu (zawierającego element statyczny z identyfikowaną charakterystyką nieliniową) oraz z powodu przyjętych ograniczeń pomiarowych (możliwość pomiaru jedynie wejścia i wyjścia całego systemu), obiektem identyfikacji jest nieliniowość stanowiąca w ogólności przesunięcia i przeskalowaną wersję oryginalnej charakterystyki nieliniowej systemu (por. rozdz. 2).

Wyniki otrzymane w pracy ¹

Falkowe algorytmy identyfikacji

Opierając się na idei wykorzystania rozwinięć ortogonalnych w identyfikacji charakterystyk nieliniowych systemów (przedstawionej pierwotnie w pracy [43]), zaproponowano trzy typy falkowych algorytmów identyfikacji nieliniowości $R(x)$: dwa dla przypadku znanej funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ i trzeci dla gęstości nieznannej. Zaproponowane algorytmy wykorzystują falki ortogonalne Daubechies o zwartym nośniku. Asymptotyczne własności (warunki i szybkość zbieżności) empirycznych modeli falkowych otrzymywanych za pomocą tych algorytmów zbadano w zależności od następujących czynników:

- ² gęstości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$,
- ² gęstości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$,
- ² zastosowanej rodziny funkcji falkowych Daubechies (numeru falkowego p),
- ² rodzaju zakłóceń (białych lub skorelowanych), oraz
- ² typu systemu (z klasy rozwiązywanego w pracy systemów o strukturze blokowej).

¹ Część przedstawionych w pracy wyników została opublikowana w formie referatów, na konferencjach naukowych (zob. [72]-[73], [135]-[142]).

Algorytm ilorazowy. Pokazaliśmy, że empiryczne modele falkowe $\hat{R}_G(x; K; p)$ otrzymywane według algorytmu ilorazowego zbiegają punktowo (średniokwadratowo i według prawdopodobieństwa) do dowolnych, ograniczonych nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie przedziału $S = [a; b]$, w którym te nieliniowości są ciągłe, a funkcje gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe i dodatnie. Ponadto wykazaliśmy, że w sensie całkowego błędu średniokwadratowego modele te zbiegają do dowolnych nieliniowości $R(x)$, ograniczonych w przedziale S , przy dowolnych, ograniczonych i dodatnich w tym przedziale, funkcjach gęstości wejścia systemu $f(x)$. Stwierdziliśmy również, że:

- ² Szybkość zbieżności empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K; p)$ zależy od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru p).
- ² Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe, to modele $\hat{R}_G(x; K; p)$ mogą zbiegać do nieliniowości $R(x)$ średniokwadratowo (punktowo i globalnie) z asymptotycznie optymalną szybkością zbieżności.
- ² Jeśli $R(x)$ i (lub) $f(x)$ są nieciągłe (ze skończoną liczbą nieciągłości typu skok), to empiryczne modele falkowe $\hat{R}_G(x; K; p)$, w większości praktycznych przypadków, zbiegają do nieliniowości $R(x)$ z szybkością $O(N^{-1-2\epsilon})$ w sensie całkowego błędu średniokwadratowego.

Algorytm bezpośredni. Badając własności empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K; p)$ wyznaczanych według tego algorytmu wykazaliśmy ich przewagę w stosunku do modeli $\hat{R}_G(x; K; p)$ polegającą na tym, że ani fakt zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ do nieliniowości $R(x)$, ani jej szybkość nie zależą od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$. W szczególności własność ta pozwala modelom $\hat{R}_R(x; K; p)$ zbiegać do ciągłych nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną szybkością zbieżności średniokwadratowej nawet w przypadku nieciągłych $f(x)$.

Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu. W tym przypadku (tj. przy nieznannej funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$) pokazaliśmy, że empiryczne modele falkowe $\hat{R}_{Gf}(x; K; p)$ zbiegają (według prawdopodobieństwa) do dowolnych, ograniczonych nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie przedziału $S = [a; b]$, w którym nieliniowość $R(x)$ jest ciągła a funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest ciągła i dodatnia. Ponadto wykazaliśmy, że szybkość zbieżności punktowej tych modeli według prawdopodobieństwa jest równa szybkości zbieżności w tym sensie empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K; p)$ otrzymywanych według algorytmu ilorazowego (a zatem przy znanej $f(x)$).

Niezależność od struktury i skorelowania zakłóceń. Dla wszystkich trzech typów algorytmów pokazaliśmy także, że zbieżność i szybkości zbieżności do nieliniowości $R(x)$ wyznaczanych przez nie empirycznych modeli falkowych nie zależą od następujących czynników (por. [56], [108]):

- ² struktury i dynamiki rozpatrywanych w pracy systemów nieliniowych, oraz
- ² od skorelowania zakłóceń zewnętrznych z_k .

Falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji

Stwierdziliśmy, że ze względu na specyficzną funkcji falkowych Daubechies, wynikającą z braku jawnej postaci wzorów tych funkcji dla numerów falkowych $p > 2$, oraz z powodu przyjętych warunków identyfikacji (losowe wejście systemu x_k), bezpośrednie zastosowanie badanych w pracy falkowych algorytmów identyfikacji (i odpowiadających im empirycznych modeli falkowych) jest niemożliwe i zaproponowaliśmy sprawne i proste w realizacji obliczeniowe odpowiedniki tych algorytmów oparte o schodkowe aproksymacje oryginalnych funkcji falkowych.

Na przykładzie obliczeniowej wersji algorytmu ilorazowego pokazaliśmy, że przy spełnieniu warunków (dotyczących skali aproksymacji H), zachodzi asymptotyczna równoważność pomiędzy wyznaczanymi według tych algorytmów empirycznymi modelami obliczeniowymi $R_G(x; K; H; p)$, a ich falkowymi pierwowzorami $\hat{R}_G(x; K; p)$ z „dokładnymi” funkcjami falkowymi.

Szybkie algorytmy obliczeniowe. Zaproponowaliśmy także szybki algorytm obliczeniowy wyznaczający empiryczne modele obliczeniowe. Na przykładzie szybkiego algorytmu ilorazowego pokazaliśmy, że jego złożoność numeryczna jest rzędu $O(N)$, a zatem rośnie jedynie liniowo ze wzrostem liczby pomiarów N (zob. [142] i por. [139]). Zaprezentowaliśmy także procedury komputerowe realizujące ten algorytm.

Badania numeryczne. Przeprowadziliśmy także badania numeryczne empirycznych modeli obliczeniowych w celu zbadania ich wierności dla umiarkowanej liczby pomiarów N i małych („praktycznych”) skal K i H . Stwierdziliśmy, że:

- ² Wpływ poziomu zakłóceń i dynamiki systemu na zachowanie modeli jest niewielki.
- ² Dobór funkcji falkowych w modelach obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$ i $R_R(x; K; H; p)$ nie wpływa istotnie na wielkość i szybkość zmniejszania się błędów tych modeli.
- ² W przypadku nieznanego gęstości wejścia systemu $f(x)$, praktyczne znaczenie (w badanym zakresie liczb pomiarów N) mają jedynie modele $R_{Gf}(x; K; H; p)$ oparte o funkcje falkowe Haara.
- ² Wielkość i szybkość zmniejszania się błędów modeli zależą głównie od położenia punktów nieciągłości w identyfikowanych nieliniowościach, natomiast w mniejszym stopniu od samego faktu istnienia tych nieciągłości.
- ² Bardzo istotne znaczenie na jakość modeli ma odpowiedni dobór ich skali K . Reguły doboru tej skali wynikające z rozważań teoretycznych mogą być stosowane w zakresie umiarkowanych liczb pomiarów, wymagają jednak znajomości gęstości identyfikowanej nieliniowości.
- ² Wpływ skali H , w stosowanych w modelach obliczeniowych aproksymacjach $R^p(x; H)$ i $\hat{R}^p(x; H)$, na zachowanie tych modeli zależy od przyjętych w modelach wartości skal M i K , i jest najmniejszy, gdy skale te są równe.

Porównując numerycznie algorytmy falkowe z algorytmami trygonometrycznymi, zaobserwowaliśmy podobne zachowanie modeli wyznaczanych przez oba typy algorytmów. Lepsze wierności modeli falkowych zanotowaliśmy jedynie dla modeli opartych o falki Haara w przypadku nieciągłych nieliniowości $R(x)$.

Dlaczego falki?

Uwzględniając wymienione wyżej rezultaty można stwierdzić, że za zastosowaniem do identyfikacji charakterystyk nieliniowych systemów algorytmów opartych o funkcje falkowe Daubechies przemawiają w szczególności ich następujące cechy:

1. Korzystne własności teoretyczne. Modele falkowe mogą osiągać asymptotycznie optymalne szybkości zbieżności średniokwadratowej dla ciągłych nieliniowości $R(x)$, a więc są nie gorsze od klasycznych modeli „ortogonalnych” (por. wzory (3.53), (3.57), (3.83), (3.91) w rozdz. 3 i zob. np. [43]-[44], [46], [50], [54]-[56], [86] i [107]), a ponadto charakteryzują się „dobrą” gwarantowaną szybkością kwadratowej zbieżności do nieliniowości nieciągłych, odcinkami gładkich (por. wzory (3.59) i (3.94)).
2. Możliwość „dopasowania” funkcji falkowych do identyfikowanej nieliniowości. Zależność własności modeli falkowych od numeru falkowego p pozwala dobrać odpowiedni model do gładkości identyfikowanej charakterystyki, a tym samym efektywnie wykorzystać ewentualną informację aprioryczną na jej temat (por. np. wzory (3.57) i (3.59), (3.91) i (3.94) oraz (3.110) oraz dyskusję na temat doboru numeru falkowego w rozdz. 3 na str. 45).
3. Prostota algorytmów. Zaproponowane falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji umożliwiają ominięcie w praktyce trudności związanych z brakiem jawnych postaci funkcji falkowych Daubechies dla $p > 2$ i dają możliwość łatwego wykorzystania standardowych algorytmów obliczania wartości falek opracowanych w literaturze (por. rozdz. 4). Prostota algorytmów falkowych wynika także z wykorzystania w nich tylko podstawowych operacji arytmetycznych (typu $+$; $-$; \cdot ; $=$), podobnie jak w przypadku innych algorytmów „ortogonalnych” (zob. np. [44]-[45]).
4. Asymptotyczna równoważność algorytmów obliczeniowych i „teoretycznych”. Dzięki tej równoważności „praktyczne” falkowe algorytmy obliczeniowe charakteryzują się korzystnymi własnościami ich teoretycznych odpowiedników (pod warunkiem odpowiedniego doboru skali aproksymacji H – por. wzory (4.44)-(4.45) w rozdz. 4).
5. Szybkie algorytmy obliczeniowe. Algorytmy te pozwalają wyznaczać empiryczne modele obliczeniowe ze złożonością numeryczną rzędu $O(N)$, a więc są obliczeniowo oszczędniejsze od innych algorytmów „ortogonalnych”, które charakteryzują się złożonością obliczeniową rzędu co najmniej $O(N \log_2 N)$ (zob. np. [57]).

Należy również wspomnieć o własnościach algorytmów falkowych identyfikacji wspólnych z innymi algorytmami „ortogonalnymi” (por. np. [56]):

1. Zbieżność otrzymywanych modeli falkowych do szerokiej klasy charakterystyk. Daje to możliwość efektywnego wykorzystania falkowych algorytmów identyfikacji przy niewielkiej informacji apriorycznej o identyfikowanych charakterystykach, a zatem gwarantuje szeroki zakres możliwych zastosowań tych algorytmów.
2. Jednolita postać ogólna algorytmów falkowych. Algorytmy falkowe identyfikacji zachowują tę samą postać ogólną zarówno dla systemów statycznych jak i

dynamicznych (z omawianej klasy systemów), a także dla białych i skorelowanych zakłóceń zewnętrznych z_k .

3. „Kompresja” danych pomiarowych. Korzystanie z gotowych modeli falkowych wymaga pamiętania tylko wartości ich współczynników, a więc uwalnia od potrzeby przechowywania, zwykle o wiele większego (por. np. wzory (4.46) i (3.56), (3.58)), zbioru pomiarów $f(x_k; y_k)_{k=1}^N$.

Uzyskane wyniki stanowią zatem podstawę do sformułowania następującej tezy:

Falkowe algorytmy identyfikacji są narzędziem umożliwiającym efektywną zarówno w sensie szybkości zbieżności jak i pod względem prostoty algorytmów obliczeniowych, identyfikację charakterystyk nieliniowych systemów w warunkach probabilistycznych, przy niewielkiej informacji wstępnej na temat własności tych charakterystyk.

Otwarte problemy badawcze

Przeprowadzone badania wskazują na następujące otwarte zagadnienia, dotyczące falkowych algorytmów identyfikacji:

- 2 Falkowa identyfikacja systemów o wielu wejściach i wyjściach.
- 2 Analiza i opracowanie szybkich algorytmów obliczeniowych do falkowej identyfikacji systemów metodą najmniejszych kwadratów. Dotychczasowe badania pokazały, że w przypadku zastosowania w algorytmach falek o numerach $p > 1$ metoda ta prowadzi do skomplikowanych problemów analitycznych i obliczeniowych, których przyczyną jest losowość wejścia systemu (dla deterministycznego wejścia, metodą najmniejszych kwadratów zastosowano w pracy [113] dla dowolnych szeregów ortogonalnych). Proste i efektywne algorytmy identyfikacji oparte o metodę najmniejszych kwadratów uzyskano dotychczas jedynie dla falek Haara ($p = 1$), zob. [137]).
- 2 Detekcja punktów nieciągłości w charakterystykach nieliniowych systemów dynamicznych.
- 2 Utworzenie pakietów oprogramowania do falkowej identyfikacji systemów nieliniowych oraz do badań numerycznych falkowych algorytmów identyfikacji; udostępnienie ich w sieci Internet w celu umożliwienia prowadzenia badań porównawczych (ang. reproducible research; zob. [21]).

Progowanie. Jak zauważono w pracy [109], dalszym istotnym zagadnieniem jest także opracowanie falkowych algorytmów identyfikacji systemów opartych na (zapropozowanej w pracy [31]) idei odrzucania z empirycznych modeli falkowych „nieistotnych”, tj. mniejszych od zadanej wartości progu, współczynników Δ_{ml}^p . Jak pokazano m.in. w pracach [14]-[15] i [30]-[35], algorytmy takie prowadzą do mniejszych (oszczędniejszych) modeli falkowych dla szerokiej klasy charakterystyk nieliniowych (zarówno ciągłych jak i nieciągłych – odcinkami gładkich). Odpowiednia klasa empirycznych modeli falkowych otrzymywanych według opartej na takiej idei algorytmów identyfikacji przyjmuje następującą

ogólną postać (por. np. wzór (3.105) na str. 62 i zob. [109])

$$\hat{R}_T(x; K; p) = \frac{\sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{a}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{M-1} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} E_z(\Delta_{ml}^p; \zeta) \hat{A}_{ml}^p(x)}{\sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{n_{\max}(M;p)} \hat{a}_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{M-1} \sum_{l=l_{\min}(m;p)}^{l_{\max}(m;p)} E_z(\delta_{ml}^p; \zeta) \hat{A}_{ml}^p(x)}$$

gdzie $E_z(\cdot; \zeta)$ jest wybraną funkcją progującą (ang. threshold function). Najczęściej stosowanymi są funkcje postaci (por. np. [13])

$$E_H(\Delta_{ml}^p; \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \Delta_{ml}^p < \zeta \\ 1 & \text{gdy } \Delta_{ml}^p > \zeta \end{cases}$$

$$E_S(\Delta_{ml}^p; \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \Delta_{ml}^p < \zeta \\ \text{sgn}(\Delta_{ml}^p - \zeta) & \text{gdy } \Delta_{ml}^p > \zeta \end{cases}$$

(gdzie $\zeta > 0$ jest odpowiednio wyznaczoną wartością progową) stanowiące podstawę tzw. algorytmów twardego i miękkiego progowania (ang. hard i soft thresholding). Proponowane w cytowanych pracach algorytmy dotyczą jednakże, z punktu widzenia zadania identyfikacji, wyłącznie systemów statycznych z deterministycznym wejściem, zakłóconych dodatkowo białym szumem o rozkładzie normalnym. Analizę własności takich algorytmów dla zakłóceń innych niż normalne i białe, zawiera praca [79] opublikowana dopiero w minionym roku, a ich zastosowanie dla systemów dynamicznych znaleziono jedynie w pracy [150] (przykłady zastosowania algorytmów z progowaniem do detekcji krawędzi i eliminacji zakłóceń w sygnałach znajdują się m.in. w pracach [17], [85] i [121]).

Alternatywną propozycją eliminacji współczynników empirycznych Δ_{ml}^p w oparciu o testy istotności statystycznej (por. np. [35]) dla losowych wejść i białych zakłóceń o dowolnym rozkładzie w odniesieniu do systemów statycznych przedstawił autor w pracach [136] i [138].

Na zakończenie zwracamy uwagę na następujące istotne zagadnienia związane z algorytmami identyfikacji systemów za pomocą falek, których nie poruszono w niniejszej pracy:

- 2 Zbadanie własności algorytmów identyfikacji systemów opartych o rodziny ortogonalnych falek wielokrotnych (ang. multiwavelets) [22], [34], [132]-[133].
- 2 Rekurencyjne falkowe algorytmy identyfikacji systemów (identyfikujące nieliniowość $R(x)$ na podstawie napływających nowych pomiarów (por. np. [53] i [141])).
- 2 Falkowa identyfikacja elementów nieliniowych w systemach Wienera (w których, odwrotnie niż w systemach Hammersteina, nieliniowy element statyczny znajduje się za liniowym systemem dynamicznym) – zob. np. [47], gdzie zaproponowano i zbadano algorytmy identyfikacji oparte o szeregi Fouriera, Hermite’a i Legendre’a oraz [71], gdzie zaprezentowano odpowiedni algorytm falkowy.

Są to także zagadnienia wymagające dalszych badań.

Dodatek A

Uzupełnienia do rozdziału 1

A.1 Funkcje bxc i dxe

Definicja 1.2 Funkcje bxc i dxe , nazywane podłoga i sułt (lub też, odpowiednio, dolna i górna całość z x) zdefiniowane są następująco (zob. [42, str. 87]):

$$\begin{aligned} \text{podłoga} &: bxc = \text{największa liczba całkowita mniejsza lub równa } x \\ \text{sułt} &: dxe = \text{najmniejsza liczba całkowita większa lub równa } x \end{aligned}$$

Własności funkcji bxc i dxe . Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą następujące związki

$$x + 1 > dxe > x > bxc > x - 1 \quad (\text{A.1})$$

a zatem

$$1 > dxe - x > 0 \quad \text{oraz} \quad 1 > x - bxc > 0 \quad (\text{A.2})$$

Dla x niecałkowitych prawdziwe są ponadto równości

$$dxe - 1 = bxc \quad (\text{czyli równowaznie } dxe = bxc + 1) \quad (\text{A.3})$$

Natomiast dla każdej całkowitej liczby n mamy

$$dne = n = bnc \quad (\text{A.4})$$

i dla dowolnego x

$$dx + ne = dxe + n \quad \text{oraz} \quad bx + nc = bxc + n \quad (\text{A.5})$$

Uwaga 1.11 Funkcja podłoga jest równa funkcji entier (oznaczanej zwykle symbolem $[x]$).

A.2 Siatka binarna B_H

Definicja 1.3 Zbiór B_H (siatka binarna) jest zbiorem punktów, których część ułamkowa może być przedstawiona w postaci skończonego rozwinięcia binarnego (dwójkowego) o $h \in H$ wyrazach, $h = 0; 1; \dots; H - 1$; np. punkty $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{2n-1}{2}; n; \dots$; $n > 2$, należą do zbioru B_1 . Ogólnie, punkty o postaci $\frac{n}{2^H}$, $n \in \mathbb{Z}$, należą do zbioru B_H .

A.3 Algorytm wyznaczania wartości funkcji falkowych

Przedstawiony opis opiera się na artykule [131].

Algorytm wykorzystuje znajomość wartości funkcji falkowych dla argumentów całkowitych ($x = 0; 1; \dots; 2p_j - 2$), która pozwala, w oparciu o wzór (1.14) w rozdz. 1 (w odniesieniu do funkcji skalującej $'^p(x)$) wyznaczyć jej wartości w punktach $x = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \dots; \frac{4p_j - 1}{2}$. Sukcesywne stosowanie wzoru w (1.14) pozwala zatem obliczyć wartości funkcji $'^p$ dla dowolnych argumentów $b; b + 1; \dots; b + 2p_j - 2$, $b \in (0; 1)$, leżących na siatce binarnej B_H ; $H > 1$.

Oznaczmy przez $'^p(b)$ wektor o rozmiarze $(2p_j - 1)$ złożony z wartości funkcji skalującej $'^p(b)$ w punktach $b; b + 1; \dots; b + (2p_j - 2)$

$$'^p(b) = \begin{pmatrix} '^p(b) & '^p(b+1) & \dots & '^p(b+2p_j-2) \end{pmatrix}^T$$

W pracy [131, str. 296] zaproponowano następujący algorytm jednoczesnego wyznaczania wartości elementów wektora $'^p(b)$ (wartości funkcji skalującej $'^p$ w punktach $b; b + 1; \dots; b + (2p_j - 2)$):

$$'^p(b) = \prod_{h=1}^p [(1 \quad b_h) A + b_h B] '^p(0) \quad (\text{A.6})$$

gdzie $b_h \in \{0; 1\}$ są kolejnymi wyrazami rozwinięcia binarnego argumentu b , a A i B są macierzami kwadratowymi o rozmiarze $(2p_j - 1) \in (2p_j - 1)$, zdefiniowanymi za pomocą współczynników Daubechies f_{c_i} (zob. Tabele C.1-C.2 w Dodatku C.5, str. 137):

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}] = c_{2i-j} & ; & \quad i, j = 0; 1; \dots; 2p_j - 2 \\ B &= [b_{ij}] = c_{2i-j+1} \end{aligned}$$

Przykład 1.1 Dla falk Daubechies o numerze $p = 2$ macierze A i B mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}; \quad '^2(0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{0}{\sqrt{3}} \\ 1 + \frac{p}{\sqrt{3}} \\ 1 + \frac{p}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Niech $b = 0:3125_{10} = \frac{5}{2^4} \in B_4$, wówczas $b = 0:0101_2$, a stąd

$$'^2(0:3125) = \begin{pmatrix} '^2(0:3125) \\ '^2(1:3125) \\ '^2(2:3125) \end{pmatrix} = '^2(0:0101) = ABAB'^2(0) = \begin{pmatrix} \frac{43+25\sqrt{3}}{256} \\ \frac{9+7\sqrt{3}}{128} \\ \frac{67+39\sqrt{3}}{256} \end{pmatrix}$$

Dodatek B

Uzupełnienia do rozdziału 3

B.1 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{\beta}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^{\Delta p}$ modeli $\hat{G}(x; K; p)$

Współczynniki empiryczne $\hat{\beta}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^{\Delta p}$ w algorytmie ilorazowym w rozdz. 3 na str. 28 (zob. wzór (3.7)), można, po uwzględnieniu równania wyjścia identyfikowanego systemu (por. wzory (2.1) i (2.5) w rozdz. 2):

$$y_k = R(x_k) + \varepsilon_k + z_k \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_k = \sum_{i=1}^p \varepsilon_{ki} \quad \text{i} \quad z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{ki}^{\Delta}$$

zapisać w następującej formie

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{Mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \beta_{Mn}^p(x_k) [R(x_k) + \varepsilon_k + z_k] \\ \hat{\beta}_{ml}^{\Delta p} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ml}^{\Delta p}(x_k) [R(x_k) + \varepsilon_k + z_k] \end{aligned} \quad (B.1)$$

W celu skrócenia zapisu będziemy dalej stosować uproszczone oznaczenia β_k , $\tilde{\beta}_k$, R_k i ε_k w miejsce $\beta_{Mn}^p(x_k)$, $\tilde{\beta}_{ml}^{\Delta p}(x_k)$, $R(x_k)$ i $\varepsilon(x_k)$.

Z definicji wariancji sumy skorelowanych zmiennych losowych otrzymujemy następujące wyrażenie na wariancje współczynników $\hat{\beta}_{Mn}^p$:

$$\begin{aligned} \text{var} \hat{\beta}_{Mn}^p &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \text{var} [\beta_k (R_k + \varepsilon_k + z_k)] + \\ &+ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \text{cov} [\beta_i (R_i + \varepsilon_i + z_i); \beta_j (R_j + \varepsilon_j + z_j)] \end{aligned} \quad (B.2)$$

Wykorzystując teraz fakt, że

$$\text{var} [\beta_k (R_k + \varepsilon_k + z_k)] \leq E [\beta_k (R_k + \varepsilon_k + z_k)]^2$$

oraz stosując nierówność (B.40) otrzymujemy, na mocy stacjonarności procesów $x_k; z_k$ i \varkappa_k (zachodzącej przy założeniach Z1-Z5 z rozdz. 2, por. uwaga 2.3 w punkcie 2.2), że

$$\begin{aligned} \text{var } \mathbb{E}_{M_n}^p &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (R_i + \varkappa_i + z_i)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{j=2}^n \frac{1}{N} \text{cov} \left[\sum_{i=1}^n (R_i + \varkappa_i + z_i); \sum_{i=j}^n (R_i + \varkappa_i + z_i) \right] \\ &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (R_i + \varkappa_i + z_i)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{j=2}^n \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (R_i + \varkappa_i + z_i) \sum_{i=j}^n (R_i + \varkappa_i + z_i) \right] \leq \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} (A_V + A_C) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

W dalszych przekształceniach korzystamy z poniższych nierówności obowiązujących na mocy założeń Z1-Z3

$$f(x) \in M_f; \quad |jR(x)| \in M_R \quad \text{oraz} \quad |j^3(x)| \in M_3 \quad \text{dla} \quad x \in S = [a; b]; \quad (\text{B.4})$$

z unormowania (ortonormalności) funkcji falkowych

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [f_{M_n}^p(x)]^2 dx = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{\frac{1+(1-p)}{2^m}}^{\frac{1+p}{2^m}} [\tilde{A}_{m_l}^p(x)]^2 dx = 1 \quad (\text{B.5})$$

oraz z ich ograniczoności, która dla funkcji falkowych Haara wynika z ich definicji (por. (1.10), str. 11), natomiast dla pozostałych funkcji falkowych Daubechies ($p > 2$) z ich ciągłości i zwartości ich nośników:

$$|f^p(x)| \in M_f \quad \text{oraz} \quad |\tilde{A}^p(x)| \in M_{\tilde{A}}; \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.6})$$

gdzie M_f i $M_{\tilde{A}}$ są dodatnimi stałymi, niezależnymi od numeru falkowego p . Na podstawie własności (B.4)-(B.6) oraz definicji (1.14) w rozdz. 1 prawdziwe są następujące nierówności:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \right] = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [f_{M_n}^p(x)]^2 f(x) dx \leq M_f \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n R_i^2 \right] = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [f_{M_n}^p(x) R(x)]^2 f(x) dx \leq M_R^2 M_f \quad (\text{B.8})$$

$$j \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \right] = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [f_{M_n}^p(x) f(x)] dx \leq 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M_f M_f \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} j \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n R_i^3 \right] &= \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} R(x)^3 [f_{M_n}^p(x) f(x)] dx \leq \\ &\leq 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M_R M_3 M_f M_f \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Oszacowanie składnika A_V . Rozważmy pierwszy składnik wariancji w (B.3):

$$\begin{aligned} A_V &= E \left[\sum_{i=1}^n R_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i R_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Z_i Z_j + 2 \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n R_j + 2 \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n Z_j + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i Z_j \right] = \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n R_i^2 + E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i R_j + E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Z_i Z_j + \right. \\ &\quad \left. + 2 E \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n R_j + 2 E \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n Z_j + 2 E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i Z_j \right] \end{aligned}$$

W powyższym wykorzystano, że na mocy założeń Z3-Z4-Z5 zmienne losowe $R_i, \sum_{j=1}^n R_j$ i Z_i są wzajemnie niezależne. Ponieważ $\sum_{j=1}^n R_j$ i Z_i mają także zerowe wartości oczekiwane, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe 0. Podstawiając w pozostałych wyrażeniach oszacowania (B.7) i (B.8) otrzymujemy (na mocy założeń Z2-Z4), że

$$A_V \leq M_f^2 M_R^2 + \text{var} \sum_{j=1}^n R_j + \text{var} Z_1 < 1 \quad (\text{B.11})$$

Oszacowanie składnika A_C . Oszacujmy teraz składnik kowariancyjny w (B.3):

$$\begin{aligned} A_C &= E \left[\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^n (R_i + \sum_{j=1}^n R_j + Z_j) R_j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^n (R_i + \sum_{j=1}^n R_j + Z_j) Z_j \right] = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=2}^n [A_1(j) + A_2(j)] \end{aligned}$$

Wymnazając elementy w $A_1(j)$ i wykorzystując wspomnianą wyżej niezależność zmiennych losowych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_1(j) &= E \left[\sum_{i=1}^n R_i R_j + R_j \sum_{i=1}^n R_i + Z_j (\sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^n Z_i) R_j + (\sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^n Z_i) R_j + Z_j (\sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^n Z_i) \right] = \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n R_i R_j + E \sum_{i=1}^n R_i R_j + E \sum_{i=1}^n R_i R_j + Z_j E (\sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^n Z_i) + \right. \\ &\quad \left. + E \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n R_j + \sum_{i=1}^n Z_j + Z_1 \sum_{j=1}^n R_j + Z_1 Z_j \right] \end{aligned}$$

a po przekształceniach i uporządkowaniu wyrazów

$$\begin{aligned} A_1(j) &= E \left(\sum_{i=1}^n R_i \right) E \left(\sum_{j=1}^n R_j \right) + \\ &\quad + E \sum_{j=1}^n R_j \sum_{i=1}^n R_i + E \sum_{j=1}^n R_j \sum_{i=1}^n Z_i + E \sum_{j=1}^n Z_j \sum_{i=1}^n R_i + E \sum_{j=1}^n Z_j \sum_{i=1}^n Z_i + \\ &\quad + E \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n R_j + E \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n Z_j + E \sum_{i=1}^n Z_i \sum_{j=1}^n R_j + E \sum_{i=1}^n Z_i \sum_{j=1}^n Z_j = \\ &= A_{11} + \\ &\quad + A_{12}(j) + A_{13}(j) + A_{14}(j) + \\ &\quad + A_{15} + A_{16} + \\ &\quad + A_{17} + A_{18} + A_{19} \end{aligned}$$

Na mocy założeń Z3-Z4 mamy $A_{15} = A_{16} = A_{17} = A_{18} = A_{19} = 0$. Ponadto (por. wzory (3.1) i (3.4) na str. 27)

$$A_{11} = E^2 \left(\sum_{i=1}^n R_i \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n+(2p_i-1)}{2M} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n R(x) R(x) f(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} R(x) f(x) dx \right)^2$$

Analizujac kolejne skadniki, $A_{12}(j)$ i $A_{14}(j)$, wykorzystujemy stacjonarność procesów f^3_{kg} i f^u_{kg} oraz fakt, ze $E^3_{1i} = E^3_{1i} = 0$ (por. za:ozenia Z3-Z4). Mamy

$$\begin{aligned}
 A_{12}(j) &= E^3_j E^3_{1i} \dots = E^3_j E^3_{1i} \dots = \\
 &= E^3_j E^3_{1i} \dots + E^3_j E^3_{1i} \dots = \\
 &= A_{12}^0(j) + A_{12}^{00}(j)
 \end{aligned}$$

i otrzymujemy, ze (por. za:ozenie Z3)

$$A_{12}^0(j) = E^3_{1i} \text{var}^3_{1i} \dots$$

Analizujac skadnik $A_{12}^{00}(j)$ otrzymujemy natomiast, ze

$$A_{12}^{00}(j) = E^3_j E^3_{1i} \dots = E^3_j E^3_{1i} \dots$$

Poniewaz, na mocy za:ozen Z1-Z3 w rozdz. 2, dla $l \in i + j - 1$, zmienne losowe $^3_{1i}$ i $^3_{ji}$ sa niezalezne, a dla dowolnego $i = 1; 2; \dots$, niezalezne sa takze zmienne losowe $^3_{1i}$ i $^3_{1i}$, zatem, wobec za:ozenia Z3, ze $E^3_{1i} = E^3_{1i} = 0$ dostajemy

$$A_{12}^{00}(j) = E^3_j E^3_{1i} \dots = 0$$

Stad

$$A_{12}(j) = A_{12}^0(j) = E^3_{1i} \text{var}^3_{1i} \dots$$

W podobny sposob mozna pokazac, ze (por. za:ozenie Z4)

$$A_{14}(j) = E^3_{1i} \text{var}^3_{1i} \dots$$

Ponadto

$$A_{13}(j) = E^3_{1i} E^3_{1i} \dots = E^3_{1i} E^3_{1i} \dots$$

Zauwazajac jeszcze, ze

$$A_2 = E^2 [{}^3_{1i} (R_1 + \dots + z_1)] = E^2 ({}^3_{1i} R_1) = A_{11} = (\otimes_{Mn}^p)^2$$

dla skadnika kowariancyjnego w (B.3) otrzymujemy oszacowanie

$$A_C \approx \sum_{j=2} A_{12}(j) + \sum_{j=2} A_{13}(j) + \sum_{j=2} A_{14}(j)$$

Zachodzą następujące nierówności (por. (B.9) i (B.10))

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} A_{12}(j) &\leq 2^{iM} (2p_i - 1)^2 M^2 M_f^2 \text{var}^3_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} j_{s,i+j} < 1 \\ \sum_{j=2}^{\infty} A_{13}(j) &\leq 2^{iM} (2p_i - 1)^2 M^2 M_f^2 M_R M_s \sum_{j=1}^{\infty} j_{s,j} < 1 \\ \sum_{j=2}^{\infty} A_{14}(j) &\leq 2^{iM} (2p_i - 1)^2 M^2 M_f^2 \text{var}^2_1 \sum_{j=1}^{\infty} j! \sum_{i=0}^{\infty} j_{s,i+j} < 1 \end{aligned}$$

w których poszczególne szeregi są bezwzględnie zbieżne na mocy założeń Z3-Z4 o asymptotycznej stabilności elementów dynamicznych identyfikowanego systemu (por. (B.39), str. 130). W rezultacie

$$A_C \leq 2^{iM} M^2 (2p_i - 1)^2 C_C < 1 \tag{B.12}$$

gdzie

$$C_C = M_f^2 \text{var}^3_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} j_{s,i+j} + M_R M_s \sum_{j=1}^{\infty} j_{s,j} + \text{var}^2_1 \sum_{j=1}^{\infty} j! \sum_{i=0}^{\infty} j_{s,i+j}$$

jest stała zależna od gęstości wejścia systemu $f(x)$, nieliniowości $R(x)$ oraz jego elementów dynamicznych (por. (B.4) i założenia Z3-Z4).

Oszacowanie wariancji współczynników θ_{Mn}^p i Δ_{ml}^p . Ze wzorów (B.3), (B.11) oraz (B.12) wynika, że

$$\text{var}^{\theta_{Mn}^p} \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \tag{B.13}$$

gdzie stałe (por. (B.11) i (B.12))

$$A_{\text{var}} = M_f^2 M_R^2 + \text{var}^3_1 + \text{var}^2_1 \quad \text{oraz} \quad A_{\text{cov}} = 2^{iM} M^2 (2p_i - 1)^2 C_C$$

nie zależą od parametru przesunięcia funkcji skalującej n . Przeprowadzając podobne oszacowania dla współczynników empirycznych Δ_{ml}^p otrzymujemy, że

$$\text{var}^{\Delta_{ml}^p} \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \tag{B.14}$$

gdzie stałe

$$B_{\text{var}} = M_f^2 M_R^2 + \text{var}^3_1 + \text{var}^2_1 \quad \text{oraz} \quad B_{\text{cov}} = 2^{im} M_A^2 (2p_i - 1)^2 C_C$$

nie zależą od parametru przesunięcia l falki. Pokazaliśmy w ten sposób, że wariancje współczynników empirycznych θ_{Mn}^p i Δ_{ml}^p modelu $\hat{G}(x; K; p)$ spełniają nierówności ze wzoru (3.11) w rozdz. 3.

B.2 Oszacowanie wariancji wyjścia $\hat{G}(x; K; p)$

Zauważmy, że (por. wzory (3.3), (3.9) i (3.13) w rozdz. 3)

$$\begin{aligned} \text{var} \hat{G}(x; K; p) &= E \left[\hat{G}(x; K; p) - \bar{G}(x; K; p) \right]^2 = \\ &= E \left[\sum_{n=n_{\min}(M;p)}^{\infty} \sum_{m=M-l}^{l_{\max}(m;p)} \theta_{Mn}^p(x) (\theta_{Mn}^p - \bar{\theta}_{Mn}^p) + \sum_{m=M-l}^{l_{\max}(m;p)} \Delta_{ml}^p(x) (\Delta_{ml}^p - \bar{\Delta}_{ml}^p) \right]^2 \end{aligned}$$

Korzystając teraz z faktu, że w dowolnym, ustalonym punkcie x wpływ na wyjście modelu (teoretycznego i empirycznego) mają tylko te funkcje falkowe $\tilde{A}_{Mn}^p(x)$ i $\tilde{A}_{ml}^p(x)$, których nośniki zawierają punkt x (pozostałe funkcje falkowe są bowiem w punkcie x równe 0 – por. z dyskusją w rozdziale 3 na str. 32), możemy podany wyżej wzór zredukować do równowaznej postaci:

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{G}(x; K; p) &= \sum_{n=n_{\min}(x; M; p)}^{n_{\max}(x; M; p)} \sum_{m=M}^{l_{\max}(x; m; p)} \sum_{l=l_{\min}(x; m; p)}^3 \tilde{A}_{Mn}^p(x) (\otimes_{Mn}^p \otimes_{Mn}^p) + \sum_{m=M}^{l_{\max}(x; m; p)} \sum_{l=l_{\min}(x; m; p)}^3 \tilde{A}_{ml}^p(x) (\otimes_{ml}^p \otimes_{ml}^p) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} A + B + 2C \end{aligned} \tag{B.15}$$

gdzie granice sumowań są równe podanym we wzorze (3.25) na str. 33 oraz dodatkowo

$$n_{\min}(x; M; p) = \lfloor 2^M x \rfloor - 2p + 2 \quad \text{oraz} \quad n_{\max}(x; M; p) = \lfloor 2^M x \rfloor \tag{B.16}$$

Zauważmy, że liczba składników w pierwszej sumie wynosi $n_{\max}(x; M; p) - n_{\min}(x; M; p) + 1$ i, podobnie jak liczba składników w sumie wewnętrznej drugiego składnika (równa $l_{\max}(x; m; p) - l_{\min}(x; m; p) + 1$ dla poszczególnych skal $m = M, \dots, K - 1$), jest nie większa niż $2p + 1$.

Poszczególne składniki wariancji w (B.15) wynoszą

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=n_{\min}(x; M; p)}^{n_{\max}(x; M; p)} \sum_{l=n_{\min}(x; M; p)}^{l_{\max}(x; n; p)} \tilde{A}_{Mn}^p(x) \tilde{A}_{Ml}^p(x) E[(\otimes_{Mn}^p \otimes_{Mn}^p)(\otimes_{Ml}^p \otimes_{Ml}^p)] \\ B &= \sum_{m=M}^{l_{\max}(x; m; p)} \sum_{n=l_{\min}(x; m; p)}^{l_{\max}(x; m; p)} \sum_{q=l_{\min}(x; q; p)}^{l_{\max}(x; q; p)} \tilde{A}_{mn}^p(x) \tilde{A}_{ql}^p(x) E[\otimes_{mn}^p \otimes_{mn}^p \otimes_{ql}^p \otimes_{ql}^p] \\ C &= \sum_{n=n_{\min}(x; M; p)}^{n_{\max}(x; M; p)} \sum_{m=M}^{l_{\max}(x; m; p)} \sum_{l=l_{\min}(x; m; p)}^3 \tilde{A}_{Mn}^p(x) \tilde{A}_{ml}^p(x) E[\otimes_{Mn}^p \otimes_{Mn}^p \otimes_{ml}^p \otimes_{ml}^p] \end{aligned}$$

Oszacowanie tych składników rozpoczniemy od oszacowania modułów występujących w nich wartości oczekiwanych.

Korzystając z nierówności Schwarz'a (zob. np. [20, str. 105])

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]} \sqrt{E[Y^2]}$$

i podstawiając w niej przykładowo

$$X = \otimes_{Mn}^p \otimes_{Mn}^p \quad \text{oraz} \quad Y = \otimes_{Ml}^p \otimes_{Ml}^p$$

otrzymujemy, na mocy własności (3.10) w rozdz. 3, że

$$\begin{aligned} |E[(\otimes_{Mn}^p \otimes_{Mn}^p)(\otimes_{Ml}^p \otimes_{Ml}^p)]| &\leq \sqrt{E[(\otimes_{Mn}^p \otimes_{Mn}^p)^2]} \sqrt{E[(\otimes_{Ml}^p \otimes_{Ml}^p)^2]} \\ &= (\text{var } \otimes_{Mn}^p)^{\frac{1}{2}} (\text{var } \otimes_{Ml}^p)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\{\text{var } \otimes_{Mn}^p, \text{var } \otimes_{Ml}^p\} \end{aligned}$$

Stąd, wykorzystując oszacowanie wariancji współczynnków empirycznych podane we wzorze (B.13), otrzymujemy

$$jE \left(\begin{matrix} \textcircled{p} \\ M_n \end{matrix} i \begin{matrix} \textcircled{p} \\ M_n \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \textcircled{p} \\ M_l \end{matrix} i \begin{matrix} \textcircled{p} \\ M_l \end{matrix} \right) j \approx \frac{1}{N} (A_{var} + A_{cov})$$

W podobny sposób, korzystając z oszacowania (B.14), uzyskujemy

$$\begin{aligned} jE \begin{matrix} -p \\ mn \end{matrix} i \begin{matrix} \Delta p \\ mn \end{matrix} \begin{matrix} -p \\ ql \end{matrix} i \begin{matrix} \Delta p \\ ql \end{matrix} j &\approx \frac{1}{N} (B_{var} + B_{cov}) \\ jE \left(\begin{matrix} \textcircled{p} \\ M_n \end{matrix} i \begin{matrix} \textcircled{p} \\ M_n \end{matrix} \right) \begin{matrix} -p \\ ml \end{matrix} i \begin{matrix} \Delta p \\ ml \end{matrix} j &\approx \frac{1}{N} (D_{var} + D_{cov}) \end{aligned}$$

gdzie $D_{var} = \max f A_{var}$; $B_{var} g$ oraz $D_{cov} = \max f A_{cov}$; $B_{cov} g$.

Stosując teraz de...nicje funkcji falkowych podane we wzorze (1.14) w rozdz. 1, oszacowania podane w (B.6) oraz wzór (B.35) (str. 130) obliczamy, ze:

$$\begin{aligned} jA_j &\approx \frac{1}{N} \prod_{n=n_{\min}(x;M;p)}^{n_{\max}(x;M;p)} \prod_{l=n_{\min}(x;M;p)}^{n_{\max}(x;M;p)} j' \begin{matrix} p \\ M_n \end{matrix} (x) j j' \begin{matrix} p \\ M_l \end{matrix} (x) j (A_{var} + A_{cov}) \approx \\ &\approx \frac{1}{N} (2p_i - 1)^2 \zeta 2^M M^2 (A_{var} + A_{cov}) = \frac{2^M}{N} A_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jB_j &\approx \frac{1}{N} \prod_{m=M}^{K-1} \prod_{q=M}^{K-1} \prod_{n=l_{\min}(x;m;p)}^{l_{\max}(x;m;p)} \prod_{l=l_{\min}(x;q;p)}^{l_{\max}(x;q;p)} j \bar{A}_{mn}^p(x) j \bar{A}_{ql}^p(x) j (B_{var} + B_{cov}) \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \prod_{m=M}^{K-1} \prod_{q=M}^{K-1} (2p_i - 1)^2 \zeta 2^{\frac{m+q}{2}} M_{\bar{A}}^2 (B_{var} + B_{cov}) = \frac{2^K i 2 \zeta 2^{\frac{K+M}{2}} + 2^M}{N} B_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jC_j &\approx \frac{1}{N} \prod_{m=M}^{K-1} \prod_{n=n_{\min}(x;M;p)}^{n_{\max}(x;M;p)} \prod_{l=l_{\min}(x;m;p)}^{l_{\max}(x;m;p)} j' \begin{matrix} p \\ M_n \end{matrix} (x) j j \bar{A}_{ml}^p(x) j (D_{var} + D_{cov}) \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \prod_{m=M}^{K-1} (2p_i - 1)^2 \zeta 2^{\frac{M+m}{2}} M \cdot M_{\bar{A}} (D_{var} + D_{cov}) = \frac{2^{\frac{K+M}{2}} i 2^M}{N} D_x \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_x &= M^2 (2p_i - 1)^2 (A_{var} + A_{cov}) \\ B_x &= M_{\bar{A}}^2 \frac{2p_i - 1}{2^{\frac{K+M}{2}}} (B_{var} + B_{cov}) \\ C_x &= M \cdot M_{\bar{A}} \frac{(2p_i - 1)^2}{2^{\frac{K+M}{2}}} (D_{var} + D_{cov}) \end{aligned} \tag{B.17}$$

Stąd i z (B.15), uwzględniając, ze w modelach empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ zachodzi $M \leq K$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{G}(x; K; p) &\approx \frac{2^M}{N} A_x + \frac{2^K i 2 \zeta 2^{\frac{K+M}{2}} + 2^M}{N} B_x + 2 \frac{2^{\frac{K+M}{2}} i 2^M}{N} D_x = \\ &= \frac{2^K}{N} 2^{M_i K} A_x + \frac{2p_i - 1}{2^{\frac{K+M}{2}}} + 2^{M_i K} B_x + \frac{2^{\frac{M_i K}{2}} i 2^{M_i K}}{2^{\frac{K+M}{2}}} 2 D_x \approx \\ &\approx \frac{2^K}{N} \zeta C_{var} \end{aligned}$$

gdzie $C_{var} = A_x + B_x + 2D_x$. Uzyskaliśmy zatem oszacowanie (3.14) z rozdz. 3, wariancji wyjścia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K; p)$ dla dowolnego, ustalonego punktu x.

B.3 Oszacowanie współczynników falkowych \tilde{A}_{ml}^{-p}

Ponizej przedstawiamy wykorzystywane w literaturze fakty, dotyczące oszacowań współczynników falkowych \tilde{A}_{ml}^{-p} (dla dużych skal m) (np. [15]-[16], [93]). Ich wyprowadzenie zamieszczamy dla kompletności prezentacji.

Znikające momenty falek $\tilde{A}_{ml}^p(x)$. Posiadanie przez falkę-matkę $\tilde{A}^p(x)$ p znikających momentów (por. wzór (1.12) z rozdz. 1):

$$\int_{-1}^1 x^k \tilde{A}^p(x) dx = \int_{-1}^1 x^k \tilde{A}^p(x) dx = 0; \quad k = 0; 1; \dots; p-1 \quad (\text{B.18})$$

przenosi się również na falki $\tilde{A}_{ml}^p(x) = 2^{\frac{m}{2}} \tilde{A}^p(2^m x - l)$ (tj. skalowane i przesunięte wersje falki-matki (por. wzór (1.14) z rozdz. 1):

$$\int_{-\frac{l+p}{2^m}}^{\frac{l+1-p}{2^m}} x^k \tilde{A}_{ml}^p(x) dx = \int_{-1}^1 x^k \tilde{A}_{ml}^p(x) dx = 0; \quad k = 0; 1; \dots; p-1 \quad (\text{B.16a})$$

Podstawiając bowiem w całce w powyższym wzorze $x = 2^{-m}(u + l)$ ($dx = 2^{-m}du$) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k \tilde{A}_{ml}^p(x) dx &= 2^{\frac{m}{2}} 2^{-m} \int_{-1}^1 (2^{-m}(u + l))^k \tilde{A}^p(u) du = \\ &= 2^{i \frac{2k+1}{2} m} \int_{-1}^1 (u + l)^k \tilde{A}^p(u) du \end{aligned}$$

a na mocy wzoru dwumianowego Newtona (zob. np. [88, str. 69]):

$$(u + l)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} u^r l^{k-r}$$

mamy (por. wzór (B.18))

$$\begin{aligned} 2^{i \frac{2k+1}{2} m} \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} u^r l^{k-r} \tilde{A}^p(u) du &= 2^{i \frac{2k+1}{2} m} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} l^{k-r} \int_{-1}^1 u^r \tilde{A}^p(u) du = \\ &= 0 \end{aligned}$$

dla $k = 0; 1; \dots; p-1$, co dowodzi prawdziwości wzoru (B.16a).

W podobny sposób (również w oparciu o wzór dwumianowy Newtona) można pokazać, że dla falek $\tilde{A}_{ml}^p(x)$ (o numerze p) zachodzi własność

$$\int_{-\frac{l+p}{2^m}}^{\frac{l+1-p}{2^m}} (x - v)^k \tilde{A}_{ml}^p(x) dx = 0; \quad k = 0; \dots; p-1 \quad (\text{B.19})$$

wykorzystywana dalej przy oszacowaniach współczynników falkowych \tilde{A}_{ml}^{-p} .

Oszacowanie współczynników $^{-p}_{ml}$ dla ciągłych funkcji $G(x)$. Zaózymy, że w przedziale $\frac{l+(1-i)p}{2^m}; \frac{l+p}{2^m}$ (nośnik falki \tilde{A}_{ml}^p) funkcja $G(x)$ należy klasy C^q ; $q > 0$. Korzystając z definicji tej klasy (zob. str. 31 w rozdz. 3) funkcję $G(x)$ można przedstawić w postaci sumy jej wielomianu Taylora $t(x; v)$ stopnia $q_i - 1$; $q = d_s e$, w punkcie $v \in \frac{l+(1-i)p}{2^m}; \frac{l+p}{2^m}$ i reszty $^2(x; v)$ (zob. wzory (3.21) i (3.22))

$$G(x) = \sum_{r=0}^{q_i-1} T_r t(x; v)^r + ^2(x; v) = T_0 + T_1 t(x; v) + \dots + T_{q_i-1} t(x; v)^{q_i-1} + ^2(x; v)$$

gdzie $T_r = G^{(r)}(v) = r!$.

Podstawiając tę postać funkcji $G(x)$ do wzoru na współczynniki falkowe $^{-p}_{ml}$ otrzymujemy, że (por. (3.4), str. 27)

$$^{-p}_{ml} = \int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} T_0 + T_1 t(x; v) + \dots + T_{q_i-1} t(x; v)^{q_i-1} + ^2(x; v) \tilde{A}_{ml}^p(x) dx \quad (B.20)$$

Oszacujemy teraz szybkość zmniejszania się współczynników $^{-p}_{ml}$ ze wzrostem skali m dla dwóch przypadków: gdy numer falkowy p jest nie mniejszy niż wykładnik s , tj. $p > q_i - 1$ i gdy jest od niego mniejszy ($p \leq q_i - 1$).

Przypadek $p > s$. Ze względu na własność (B.19) i fakt, że $p > q_i - 1$ wzór (B.20) redukuje się do następującej postaci (zerują się wszystkie wyrazy wielomianu Taylora)

$$^{-p}_{ml} = \int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} ^2(x; v) \tilde{A}_{ml}^p(x) dx \quad (B.21)$$

Na mocy nierówności $|^2(x; v)| \leq L |x - v|^p$ (zob. (3.21)) otrzymujemy, że

$$|^{-p}_{ml}| \leq \int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} ^2(x; v) \tilde{A}_{ml}^p(x) dx \leq L \int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x - v|^p \tilde{A}_{ml}^p(x) dx$$

Korzystając teraz z nierówności Schwarz'a dla całek (zob. np. [119, str. 38])

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

oraz z ortonormalności falek $\tilde{A}_{ml}^p(x)$, po podstawieniach

$$a = \frac{l+(1-i)p}{2^m}; \quad b = \frac{l+p}{2^m} \quad \text{oraz} \quad f(x) = |x - v|^p \quad \text{i} \quad g(x) = \tilde{A}_{ml}^p(x)$$

dostajemy, że

$$|^{-p}_{ml}| \leq L \left(\int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x - v|^{2p} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [\tilde{A}_{ml}^p(x)]^2 dx \right)^{1/2} = L \int_{\frac{l+(1-i)p}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x - v|^{2p} dx$$

Zbadane dwa przypadki oraz oszacowania (B.22) i (B.23) stanowią podstawę poniższego lematu charakteryzującego szybkość zmniejszania się współczynników falkowych funkcji $G(x)$ w zależności od jej gładkości (wartości wykładnika ν) i od zastosowanych falek (numeru falkowego p) ze wzrostem skali m (por. też np. [98, twierdzenie 7, str. 185]):

Lemat 2.16 Jeśli funkcja $G(x)$ jest ciągła w przedziale $[\frac{1+(1-p)}{2^m}; \frac{1+p}{2^m}]$ z wykładnikiem ν , to dla współczynników j_{ml}^{-p} jej rozwinięcia falkowego (przy użyciu funkcji falkowych Daubechies o numerze p) i dużych wartości m zachodzi następujące oszacowanie

$$|j_{ml}^{-p}| \leq 2^i \frac{(2^\nu + 1)m}{2} C_0; \quad C_0 = \max_{x \in I} |f(x)|; \quad p > 0 \quad (B.24)$$

gdzie $C_0 = \max_{x \in I} |f(x)|; C_p > 0$.

Oszacowanie współczynników j_{ml}^{-p} dla nieciągłych funkcji $G(x)$. Powyższy wynik dotyczy funkcji $G(x)$ przy założeniu ich ciągłości w przedziale $[\frac{1+(1-p)}{2^m}; \frac{1+p}{2^m}]$. Dla dowolnych funkcji nieciągłych $G(x)$ ograniczonych w tym przedziale, tj. spełniających warunek $|G(x)| \leq M_G < 1$, dla $x \in [\frac{1+(1-p)}{2^m}; \frac{1+p}{2^m}]$, współczynniki falkowe j_{ml}^{-p} można oszacować następująco

$$\begin{aligned} |j_{ml}^{-p}| &= \left| \int_{\frac{1+(1-p)}{2^m}}^{\frac{1+p}{2^m}} G(x) \tilde{A}_{ml}^p(x) dx \right| \leq \int_{\frac{1+(1-p)}{2^m}}^{\frac{1+p}{2^m}} |G(x)| |\tilde{A}_{ml}^p(x)| dx \leq \\ &\leq 2^{\frac{m}{2}} M_G M_{\tilde{A}} \int_{\frac{1+(1-p)}{2^m}}^{\frac{1+p}{2^m}} dx = 2^{\frac{m}{2}} M_G M_{\tilde{A}} \leq 2^i \frac{m}{2} (2p + 1) = \\ &= 2^i \frac{m}{2} C_{G\tilde{A}} \end{aligned}$$

Zatem:

Lemat 2.17 Jeśli funkcja $G(x)$ jest nieciągła i ograniczona w przedziale $[\frac{1+(1-p)}{2^m}; \frac{1+p}{2^m}]$, to dla jej współczynników falkowych j_{ml}^{-p} zachodzi następujące oszacowanie

$$|j_{ml}^{-p}| \leq 2^i \frac{m}{2} C_{G\tilde{A}} \quad (B.25)$$

dla dowolnego numeru falkowego p , gdzie $C_{G\tilde{A}} = M_G M_{\tilde{A}} (2p + 1)$.

B.4 Oszacowanie obciążenia bias² $\hat{G}(x; K; p)$

Przy założeniu Z7, korzystając z postaci białego obciążenia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie x (por. wzór (3.26) w rozdz. 3, str. 33):

$$\text{bias } \hat{G}(x; K; p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=I_{\min}(x; m; p)}^{I_{\max}(x; m; p)} j_{ml}^{-p} \tilde{A}_{ml}^p(x)$$

oraz z oszacowania (B.24) i z faktu, że dla każdego x , liczba składników w wewnętrznej sumie w tym wzorze dla każdej skali m wynosi $I_{\max}(x; m; p) - I_{\min}(x; m; p) + 1 \leq 2p + 1$

(zob. (3.25), str. 33) otrzymujemy (z pomocą wzoru (B.6) i (B.35), str. 130), że:

$$\begin{aligned} \text{bias } \hat{G}(x; K; p) &\leq \sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} j_{ml}^{-p} \zeta 2^{\frac{m}{2}} M_{\bar{A}} \leq \\ &\leq (2p_i - 1) M_{\bar{A}} C_{\circ} \sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} 2^{\frac{m}{2}} \zeta 2^{i \frac{(2^{\circ} + 1)m}{2}} = \\ &= (2p_i - 1) M_{\bar{A}} C_{\circ} \sum_{m=K}^{l_{\max}(x; m; p)} 2^{i \circ m} = \\ &= 2^{i \circ K} \zeta \frac{(2p_i - 1) M_{\bar{A}} C_{\circ}}{1 - 2^{i \circ}} \end{aligned}$$

gdzie $\circ = \min f_{\circ}; pg$, jak we wzorze (B.24). Przy założeniu Z7 zachodzi zatem nierówność (3.28) z rozdziału 3:

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K; p) \leq 2^{i \circ 2K} \zeta C_{\text{bias}} \tag{B.26}$$

ze stałą $C_{\text{bias}} = \frac{h}{1 - 2^{i \circ}} \cdot \frac{(2p_i - 1) M_{\bar{A}} C_{\circ}}{1 - 2^{i \circ}}$.

B.5 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{\otimes}_{Mn}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{p0}$ modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$

Współczynniki empiryczne $\hat{\otimes}_{Mn}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{ml}^{p0}$ w algorytmie bezpośrednim z rozdz. 3 na str. 46 (zob. wzory (3.64) i (3.65)) przyjmują po uwzględnieniu równania wyjścia identyfikowanego systemu (por. wzory (2.1) i (2.5) w rozdz. 2):

$$y_k = R(x_k) + \varkappa_k + z_k \quad \text{gdzie} \quad \varkappa_k = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^3(x_{k_i}) \quad \text{i} \quad z_k = \sum_{i=0}^l \varepsilon_i''(x_{k_i})$$

następującej postaci (por. wzory w (B.1))

$$\begin{aligned} \hat{\otimes}_{Mn}^{p0} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x_k) [R(x_k) + \varkappa_k + z_k] \\ \hat{\Delta}_{ml}^{p0} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\Delta}_{ml}^{p0}(x_k) [R(x_k) + \varkappa_k + z_k] \end{aligned}$$

Do oszacowania wariancji tych współczynników wykorzystamy następujące nierówności (por. definicje w (1.14) w rozdz. 1, założenia Z1-Z3 w rozdz. 2 oraz wzory w (B.4)-(B.6)):

$$E \hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x_1)^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} \frac{[\hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x)]^2}{f(x)} dx \leq \frac{1}{\pm} \tag{B.27}$$

$$E \hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x_1) R(x_1)^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} \frac{[\hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x) R(x)]^2}{f(x)} dx \leq \frac{M_R^2}{\pm} \tag{B.28}$$

$$E \hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x_1) = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} \hat{\otimes}_{Mn}^{p0}(x) dx = 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M \tag{B.29}$$

$$E \left[\sum_{M_n}^{p0} (x_1) R(x_1)^3 (x_1) \right] = \int_{\frac{n}{2M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2M}} R(x)^3 (x)^p \sum_{M_n} (x) dx \leq 6 \cdot 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M \cdot M_R M_3 \quad (B.30)$$

Na podstawie tych nierówności oraz oszacowań wariancji współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{M_n}^p$ i $\hat{\Delta}_{m_l}^p$ modeli $\hat{G}(x; K; p)$ (wykorzystując nierówności (B.7)-(B.10)) otrzymujemy, że wariancja współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{M_n}^{p0}$ modeli $\hat{R}_R(x; K; p)$ spełnia następującą nierówność (por. wzór (B.13))

$$\text{var } \hat{\theta}_{M_n}^{p0} \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}}^0 + A_{\text{cov}}^0) \quad (B.31)$$

gdzie stałe (por. wzory w (B.11) i (B.12))

$$A_{\text{var}}^0 = \frac{1}{\pm} M_R^2 + \text{var } \eta_1 + \text{var } z_1 \quad \text{oraz} \quad A_{\text{cov}}^0 = 2^{i M} \left(M_R^2 (2p_i - 1)^2 \frac{C_C}{M_f^2} \right)$$

nie zależą od parametru przesunięcia funkcji skalującej n . Podobnie, dla współczynników empirycznych $\hat{\Delta}_{m_l}^{p0}$ otrzymujemy, że (por. oszacowanie (B.14))

$$\text{var } \hat{\Delta}_{m_l}^{p0} \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}}^0 + B_{\text{cov}}^0) \quad (B.32)$$

gdzie, z kolei, stałe

$$B_{\text{var}}^0 = \frac{1}{\pm} M_R^2 + \text{var } \eta_1 + \text{var } z_1 \quad \text{oraz} \quad B_{\text{cov}}^0 = 2^{i m} \left(M_A^2 (2p_i - 1)^2 \frac{C_C}{M_f^2} \right)$$

nie zależą od parametru przesunięcia l falki. Pokazaliśmy w ten sposób, że wariancje współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{M_n}^{p0}$ i $\hat{\Delta}_{m_l}^{p0}$ modelu $\hat{R}_R(x; K; p)$ spełniają nierówności ze wzoru (3.73) w rozdz. 3.

B.6 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{R}_R(x; K; p)$

Korzystając z obliczeń dla modelu $\hat{G}(x; K; p)$ w punkcie B.2 (str. 120) otrzymujemy, że w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S$, dla wariancji wyjścia modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K; p)$ zachodzi następująca nierówność:

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K; p) \leq \frac{2^K h}{N} \left(2^{M_i K} A_x^0 + 1 \right) \left(2^{i \frac{M_i K}{2}} + 2^{M_i K} B_x^0 + 2^{\frac{M_i K}{2}} \right) \left(2^{M_i K} 2 D_x^0 \right)$$

gdzie, odpowiednio (por. (B.17))

$$A_x^0 = M^2 (2p_i - 1)^2 (A_{\text{var}}^0 + A_{\text{cov}}^0)$$

$$B_x^0 = M_A^2 \frac{2p_i - 1}{2^{i-1}} (B_{\text{var}}^0 + B_{\text{cov}}^0)$$

$$D_x^0 = M \cdot M_A \frac{(2p_i - 1)^2}{2^{i-1}} (D_{\text{var}}^0 + D_{\text{cov}}^0)$$

i gdzie $D_{\text{var}}^0 = \max f A_{\text{var}}^0$; B_{var}^0 oraz $D_{\text{cov}}^0 = \max f A_{\text{cov}}^0$; B_{cov}^0 . Po uwzględnieniu, że w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K; p)$ zachodzi $M \leq K$, otrzymujemy oszacowanie wariancji wyjścia modeli empirycznych w ustalonym punkcie x dane we wzorze (3.76) w rozdz. 3:

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K; p) \leq \frac{2^K}{N} C_{\text{var}}^0$$

ze stałą $C_{\text{var}}^0 = A_x^0 + B_x^0 + 2D_x^0$.

B.7 Optymalna szybkość zbieżności modeli falkowych

Na mocy twierdzeń udowodnionych w pracach [128] i [129] dla nieparametrycznych metod estymacji funkcji regresji, prawdziwy jest następujący wniosek:

Wniosek 2.3 Największa możliwa szybkość średniokwadratowej zbieżności modeli falkowych do nieliniowości $R(x)$ z klasy $C^r[a; b]$ jest rzędu

$$O\left(N^{-\frac{2r}{2r+1}}\right) \quad (\text{B.33})$$

zarówno dla błędów punktowego (MSE) jak i całkowego (MISE).

Szybkość zbieżności równa co do rzędu podanej we wzorze (B.33) nazywana jest asymptotycznie optymalną szybkością zbieżności (zob. np. [64, twierdzenie 4.1.2, str. 93]).

B.8 Szybkość zbieżności według prawdopodobieństwa

W pracy [50, twierdzenie 3, str. 449] udowodniono następujące twierdzenie (zob. też ([108, lemat 4, str. 954]))

Twierdzenie 2.19 Jeśli w punkcie x ciągu zmiennych losowych $g_N(x)$ i $f_N(x)$ zbiegają średniokwadratowo do funkcji $g(x)$ i $f(x)$ ($f(x) > 0$) z prędkościami

$$\text{MSE } g_N(x) = O\left(N^{-s_g}\right) \quad \text{oraz} \quad \text{MSE } f_N(x) = O\left(N^{-s_f}\right); \quad s_g, s_f > 0$$

to prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{g_N(x)}{f_N(x)} \right| = O\left(\frac{N^{-\tilde{A}_g}}{N^{\min\{s_g, s_f\}}} \right) \quad (\text{B.34})$$

według prawdopodobieństwa.

Oszacowanie (B.34) oznacza, że dla dowolnego ciągu liczbowego a_N zbieżnego do 0 wraz z $N \rightarrow \infty$, zachodzi

$$a_N \ll \frac{\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{g_N(x)}{f_N(x)} \right|}{N^{\min\{s_g, s_f\}}} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty$$

według prawdopodobieństwa.

B.9 Wybrane w=asno=ci szeregów liczbowych

Szereg geometryczny. Szacując b=ody obci=zenia i wariancji modeli falkowych korzystamy z nast=opuj=cych znanych wzorów (zob. np. [88, str. 204]):

$$\sum_{m=K}^{\infty} 2^{m\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{1}{2} < 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\sum_{m=M}^{\infty} 2^{m\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} - 1} 2^{K\frac{1}{2}} 2^{M\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{2} \in 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\sum_{q=M}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} 2^{(m+q)\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2^{\frac{1}{2}} - 1)^2} 2^{2K\frac{1}{2}} 2^{2M\frac{1}{2}} + 2^{2M\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{2} \in 0 \quad (\text{B.37})$$

Szeregi bezwgl=ednie zbiezne. W obliczeniach wariancji wspó=czynników modeli empirycznych pos=ugujemy si= nast=opuj=cyimi podstawowymi w=asno=ciami szeregów bezwgl=ednie zbieznych $f_{i,j}; i = 0; 1; \dots$:

$$(i) : \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < 1 \quad (\text{B.38})$$

$$(ii) : \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j a_i j a_{i+j} < 1 \quad (\text{B.39})$$

$$(iii) : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_{i,j}}{N} j a_j \in \sum_{j=1}^{\infty} j a_j < 1; \quad \text{dla } N_{i,j} \geq N \text{ oraz } j < N \quad (\text{B.40})$$

wynikaj=cyimi z ponizszych nierówności

$$(i) : 1 > \max_i f_{j a_i j} \sum_{i=0}^{\infty} j a_i j > \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

$$(ii) : 1 > \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j a_i j \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j a_i j a_{i+j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j a_i j a_{i+j}$$

Ponadto, poniewaz $0 < \frac{N_{i,j}}{N} = 1 - \frac{j}{N} < 1$ dla $N > 1$ i $j < N$ to

$$(iii) : 1 > \sum_{j=1}^{\infty} j a_j > \sum_{j=1}^{\infty} j a_j > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_{i,j}}{N} j a_j$$

Dodatek C

Uzupełnienia do rozdziału 4

C.1 Oszacowanie błądów aproksymacji funkcji falkowych

Do wykazania prawdziwości własności H2a-H2b (zob. str. 70) aproksymacji $\tilde{f}^p(x; H)$ i $\tilde{A}^p(x; H)$ funkcji falkowych $f^p(x)$ i $A^p(x)$ dla $p > 2$ wykorzystamy poniższą tożsamość (por. wzór (4.1) w rozdz. 4)

$$f^p(x) - \tilde{f}^p(x; H) = f^p(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^p_{2^i H}(x)}{2^i H} \quad (C.1)$$

oraz następujące własności funkcji falkowych Daubechies (por. [130, str. 620] i [131, str. 297]):

- C1. funkcje falkowe $f^p(x)$ i $A^p(x)$ z numerem $p = 2$ należą do klasy C^{ℓ} , z wykładnikiem $\ell \gg 0$,
- C2. funkcje falkowe $f^p(x)$ i $A^p(x)$ o numerach $p > 2$ należą do klas C^{ℓ} z wykładnikami $\ell > 1$.

w sensie definicji 3.1 klasy gładkości C (rozdz. 3).

Przypadek $p = 2$. Ze wzoru (C.1) i własności C1 wynika następująca nierówność charakteryzująca błąd aproksymacji funkcji skalujących $f^p(x)$ przez funkcje $\tilde{f}^p(x; H)$ (por. wzory (3.21)-(3.22) w rozdz. 3):

$$|f^p(x) - \tilde{f}^p(x; H)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f^p(x) - \frac{\tilde{A}^p_{2^i H}(x)}{2^i H}| \leq L_{\ell} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i H^{\ell}}{2^i H} = L_{\ell} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\ell-1)} H^{\ell-1}$$

Stąd (ponieważ $2^i H^{\ell-1} \leq 2^i H^{\ell-1} \leq 1$; por. wzór (A.2) w Dodatku A.1, str. 114) otrzymujemy, że

$$|f^p(x) - \tilde{f}^p(x; H)| \leq 2^{\ell H} L_{\ell} \quad (C.2)$$

Przypadek $p > 2$. Aby oszacować błąd aproksymacji funkcji skalujących $f^p(x)$ o numerach $p > 2$ posłużymy się reprezentacją tych funkcji za pomocą wielomianu Taylora

stopnia $d_{\ell} e_i - 1$ i odpowiedniej reszty ${}^2(x; x_B)$ w punkcie ${}^{\forall} 2^H x_i = 2^H \stackrel{\text{def}}{=} x_B$ (por. wzór (3.22) w rozdz. 3)

$${}^1 p(x) = \sum_{r=0}^{d_{\ell} e_i - 1} \frac{({}^1 p)^{(r)}(x_B)}{r!} (x_i - x_B)^r + {}^2(x; x_B)$$

gdzie ${}^2(x; x_B) \in L_{\ell} j x_i - x_B j^{\ell}$, $L_{\ell} > 0$ (por. wzór (3.21)). Po podstawieniu powyższego do wzoru (C.1) otrzymujemy

$${}^1 p(x) - {}^1 p(x; H) = {}^1 p(x) - {}^1 p(x_B) = \sum_{r=1}^{d_{\ell} e_i - 1} \frac{({}^1 p)^{(r)}(x_B)}{r!} (x_i - x_B)^r + {}^2(x; x_B)$$

a stąd (ponieważ $x_i - x_B = x_i - 2^H x_i = 2^H (2^{-i} - 1) x_i$)

$$j^1 p(x) - {}^1 p(x; H)j \leq T_1 (x_i - x_B) + \dots + T_{d_{\ell} e_i - 1} (x_i - x_B)^{d_{\ell} e_i - 1} + L_{\ell} (x_i - x_B)^{\ell} \leq 2^i H^{\ell} (T_1 + \dots + T_{d_{\ell} e_i - 1}) + 2^i (2^{-i} - 1)^{\ell} L_{\ell}$$

gdzie $T_1; \dots; T_{d_{\ell} e_i - 1}$ są dodatnimi stałymi. W powyższej nierówności, dla dużych wartości skal aproksymacji H istotny pozostaje tylko pierwszy wyraz. A zatem, przy dużych skalach H zachodzi oszacowanie

$$j^1 p(x) - {}^1 p(x; H)j \leq 2^i H^{\ell} C_1 \tag{C.3}$$

gdzie C_1 jest dodatnią stałą

Z nierówności (C.2) i (C.3) wynika zatem, że dla dowolnego numeru falkowego $p > 2$ i dla każdego x , bezwzględny błąd aproksymacji funkcji skalujących ${}^1 p(x)$ przez funkcje ${}^1 p(x; H)$ spełnia (przy dużych wartościach H) nierówność

$$j^1 p(x) - {}^1 p(x; H)j \leq 2^i {}^{1/2} L \cdot \quad \text{gdzie } {}^{1/2} = \begin{cases} \gg 0.55 & \text{dla } p = 2 \\ 1 & \text{dla } p > 2 \end{cases} \tag{C.4}$$

ze stałą $L = \max\{L_{\ell}; C_1\}$. W podobny sposób można pokazać, że dla każdego x i $p > 2$ dla błądu aproksymacji falek $\tilde{A}^p(x)$ zachodzi

$$\tilde{A}^p(x) - \tilde{A}^p(x; H) \leq 2^i {}^{1/2} L_{\tilde{A}} \tag{C.5}$$

gdzie $L_{\tilde{A}}$ jest dodatnią stałą (zob. wzory w (4.4) w rozdz. 4).

Oszacowania błądu aproksymacji funkcji falkowych ${}^1 p_{M_n}(x)$ i $\tilde{A}_{m_l}^p(x)$. Obliczymy teraz oszacowania błędów aproksymacji ${}^1 p_{M_n}(x; H)$ i $\tilde{A}_{m_l}^p(x; H)$ skalowanych i przesuniętych funkcji falkowych ${}^1 p_{M_n}(x)$ i $\tilde{A}_{m_l}^p(x)$.

Dla ${}^1 p_{M_n}(x)$, po podstawieniu $u = 2^M x_i - n$ otrzymujemy (por. definicje ${}^1 p_{M_n}(x)$ i ${}^1 p_{M_n}(x; H)$ w (1.14) i (4.2))

$${}^1 p_{M_n}(x) - {}^1 p_{M_n}(x; H) = 2^{\frac{M}{2}} [{}^1 p(u) - {}^1 p(u; H)]$$

Ze wzoru (C.1) i oszacowania (C.4) wynika zatem, że

$$j^1 p_{M_n}(x) - {}^1 p_{M_n}(x; H)j \leq 2^{\frac{M}{2}} L \cdot |u| \frac{{}^{\forall} 2^H u_i - 1 - {}^{1/2}}{2^H} \leq 2^{\frac{M}{2}} 2^i {}^{1/2} L \tag{C.6}$$

Analogiczna nierówność zachodzi dla błędów aproksymacji falek $\tilde{A}_{m_l}^p(x)$

$$\tilde{A}_{m_l}^p(x) - \tilde{A}_{m_l}^p(x; H) \leq 2^{\frac{m}{2}} 2^i {}^{1/2} L_{\tilde{A}} \tag{C.7}$$

Oszacowanie całki z aproksymacji $\pi_{M_n}^p(x; H)$. Dla aproksymacji $\pi^p(x; H)$ i $\hat{A}^p(x; H)$ (przy dowolnej skali aproksymacji H i dowolnego p) zachodzą następujące oszacowania (por. definicje w (4.1) oraz nierówności w (B.6) w Dodatku B.1)

$$|\pi^p(x; H)| \leq \frac{\tilde{A}_p}{x} \leq M \quad \text{oraz} \quad |\hat{A}^p(x; H)| \leq \frac{\tilde{A}_p}{x} \leq M_{\tilde{A}} \quad (\text{C.8})$$

stad, w szczególności, dla całki z aproksymacji $\pi_{M_n}^p(x; H)$ zachodzi nierówność (por. wzór (4.2))

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} \pi_{M_n}^p(x; H) dx \leq 2^{\frac{M}{2}} \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} \frac{\tilde{A}_p}{2^H} dx \leq 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M \quad (\text{C.9})$$

Oszacowanie całek z kwadratów aproksymacji $\pi_{M_n}^p(x; H)$ i $\hat{A}_{ml}^p(x; H)$. Wykorzystując ortonormalność funkcji skalujących $\pi_{M_n}^p(x)$ (zob. wzór w (B.5)), otrzymujemy następującą równość

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H)]^2 dx = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H)]^2 dx + \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x)]^2 dx + 1$$

z której, po ponizszych przekształceniach

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H)]^2 dx &= 1 + \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H)]^2 + [\pi_{M_n}^p(x)]^2 dx = \\ &= 1 + \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H) + \pi_{M_n}^p(x)] [\pi_{M_n}^p(x; H) + \pi_{M_n}^p(x)] dx \end{aligned}$$

otrzymujemy, korzystając z oszacowania (C.6) i nierówności we wzorach (B.6) i (C.8), następującą nierówność

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H)]^2 dx &\leq 1 + 2^{iM} (2p_i - 1) \leq 2^{\frac{M}{2}} 2^{i \frac{M}{2}} L \leq 2^{\frac{M}{2}} \leq 2M = \\ &= 1 + 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) \leq 2L \cdot M \end{aligned}$$

a z niej (ponieważ skala aproksymacji $H > 0$; oraz $\frac{1}{2} > 0$ – por. wzór (C.4)) ponizsze oszacowanie całki z kwadratu aproksymacji funkcji skalującej

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2^M}} [\pi_{M_n}^p(x; H)]^2 dx \leq M_1 \quad (\text{C.10})$$

ze stałą $M_1 = 1 + 2(2p_i - 1)L \cdot M$. W analogiczny sposób można pokazać, że całka z kwadratu aproksymacji falek spełnia nierówność

$$\int_{\frac{1+(1-p)}{2^m}}^{\frac{1+p}{2^m}} \hat{A}_{ml}^p(x; H)^2 dx \leq M_{\tilde{A}}$$

gdzie $M_{\tilde{A}} = 1 + 2(2p_i - 1)L_{\tilde{A}}M_{\tilde{A}}$.

C.2 Oszacowanie wariacji współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ modeli $G(x; K; H; p)$

Uwzględniając we wzorach na współczynniki empiryczne $\hat{\theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ (zob. wzory w (4.17) w rozdz. 4) równanie wyjścia identyfikowanego systemu (wzory (2.1) i (2.5) w rozdz. 2) otrzymujemy, że:

$$\hat{\theta}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \theta_{Mn}^p(x_k; H) \epsilon [R(x_k) + \eta_k + z_k]$$

$$\hat{\alpha}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{A}_{ml}^p(x_k; H) \epsilon [R(x_k) + \eta_k + z_k]$$

A zatem (por. wzory w (B.1) w Dodatku B.1, str. 116) przy szacowaniu wariacji tych współczynników można skorzystać z obliczeń przeprowadzonych dla współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\alpha}_{ml}^p$ modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ (zob. Dodatek B.1).

Podstawiając w tych obliczeniach, w miejsce nierówności (B.7)-(B.10), ich poniższe odpowiedniki uzyskane na podstawie definicji we wzorze (1.14) w rozdz. 1, założeń Z1-Z3 w rozdz. 2 oraz oszacowań (B.4), (C.6) i (C.8)-(C.10):

$$E[\theta_{Mn}^p(x_1; H)]^2 = \int_{-\frac{n}{2M}}^{\frac{n}{2M}} \int_{-\frac{n+(2p_i-1)}{2M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2M}} [\theta_{Mn}^p(x; H)]^2 f(x) dx \leq M_1 M_f \quad (C.11)$$

$$E[\theta_{Mn}^p(x_1; H) R(x_1)]^2 = \int_{-\frac{n}{2M}}^{\frac{n}{2M}} \int_{-\frac{n+(2p_i-1)}{2M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2M}} [\theta_{Mn}^p(x; H) R(x)]^2 f(x) dx \leq M_1 M_R^2 M_f$$

$$jE[\theta_{Mn}^p(x_1; H)]_j = \int_{-\frac{n}{2M}}^{\frac{n}{2M}} \int_{-\frac{n+(2p_i-1)}{2M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2M}} \theta_{Mn}^p(x; H) f(x) dx \leq 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M_1 M_f$$

$$jE[\theta_{Mn}^p(x_1; H) R(x_1)^3(x_1)]_j = \int_{-\frac{n}{2M}}^{\frac{n}{2M}} \int_{-\frac{n+(2p_i-1)}{2M}}^{\frac{n+(2p_i-1)}{2M}} R(x)^3(x) \theta_{Mn}^p(x; H) f(x) dx \leq 6 \cdot 2^{i \frac{M}{2}} (2p_i - 1) M_R M_3 M_1 M_f \quad (C.12)$$

otrzymujemy, że wariacja współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{Mn}^p$ modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ spełnia następującą nierówność (por. wzór (B.13))

$$\text{var} \hat{\theta}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \quad (C.13)$$

ze stałymi (por. wzory w (B.11) i (B.12))

$$A_{\text{var}} = M_1 M_f M_R^2 + \text{var} \eta_1 + \text{var} z_1 \quad \text{oraz} \quad A_{\text{cov}} = 2^{i M} \epsilon M^2 (2p_i - 1)^2 C_C$$

niezależnymi od parametru przesunięcia n aproksymacji $\theta_{Mn}^p(x; H)$. Podobnie, dla współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{ml}^p$ otrzymujemy, że (por. oszacowanie (B.14))

$$\text{var} \hat{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \quad (C.14)$$

gdzie stałe

$$B_{\text{var}} = M_A M_f M_R^2 + \text{var} \eta_1 + \text{var} z_1 \quad \text{oraz} \quad B_{\text{cov}} = 2^{i m} \epsilon M_A^2 (2p_i - 1)^2 C_C$$

są niezależne od parametru przesunięcia i aproksymacji $\hat{A}_{ml}^p(x; H)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że wariancje współczynników empirycznych $\hat{\theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\tau}_{ml}^p$ modelu obliczeniowego $G(x; K; H; p)$ spełniają nierówności ze wzoru (4.25) w rozdz. 4.

C.3 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } G(x; K; H; p)$

Korzystając z odpowiednich obliczeń dla empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K; p)$ przeprowadzonych w Dodatku B.2 (str. 120), oszacowań wariancji współczynników $\hat{\theta}_{Mn}^p$ i $\hat{\tau}_{ml}^p$ empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ (wzory (C.13) i (C.14)) oraz własności (4.28) tych modeli otrzymujemy, że w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S$, dla wariancji ich wyjścia zachodzi nierówność:

$$\text{var } G(x; K; H; p) \leq \frac{2^K h}{N} \left(2^{M_i K} A_x + \frac{1}{2} \left(2^{\frac{M_i K}{2}} + 2^{M_i K} B_x + 2^{\frac{M_i K}{2}} \right) 2^{M_i K} D_x \right)$$

gdzie, odpowiednio (por. wzór (B.17))

$$\begin{aligned} A_x &= M^2 (2p_i - 1)^2 A_{\text{var}} + A_{\text{cov}} \\ B_x &= M_A^2 \frac{2p_i - 1}{2i - 1} B_{\text{var}} + B_{\text{cov}} \\ D_x &= M \cdot M_A \frac{(2p_i - 1)^2}{2i - 1} D_{\text{var}} + D_{\text{cov}} \end{aligned}$$

i gdzie $D_{\text{var}} = \max A_{\text{var}}$; B_{var} oraz $D_{\text{cov}} = \max A_{\text{cov}}$; B_{cov} . Po uwzględnieniu, że w empirycznych modelach obliczeniowych $G(x; K; H; p)$, pomiędzy skalami M i K zachodzi nierówność $M \leq K$, otrzymujemy oszacowanie wariancji wyjścia tych modeli w ustalonym punkcie x , dane we wzorze (4.29) w rozdz. 4:

$$\text{var } G(x; K; H; p) \leq \frac{2^K}{N} C_{\text{var}}$$

ze stałą $C_{\text{var}} = A_x + B_x + 2D_x$.

C.4 Oszacowanie obciążenia $\overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p)$

W ustalonym punkcie x , składowa obciążenia $\overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p)$ empirycznych modeli obliczeniowych $G(x; K; H; p)$ szacujemy wykorzystując fakt, że zarówno oryginalne funkcje falkowe, jak i ich aproksymacje mają zwarte nośniki i znikają poza przedziałami zawierającymi nośniki funkcji falkowych (zob. własność H3). A zatem wpływ na błąd pomiędzy wyjściem modeli $G(x; K; p)$ i $\hat{G}(x; K; H; p)$ w punkcie x mają tylko te aproksymacje $\hat{\tau}_{Mn}^p(x; H)$ i $\hat{A}_{ml}^p(x; H)$, których nośniki odpowiadających im funkcji falkowych $\tau_{Mn}^p(x)$ i $A_{ml}^p(x)$ zawierają punkt x (por. z argumentacją podaną przy szacowaniu błędów obciążenia i wariancji wyjścia falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K; p)$ w Dodatkach B.2 i B.4), stąd

$$\begin{aligned} \overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p) &= G(x; K; p) - \hat{G}(x; K; H; p) = \\ &= \sum_{n=n_{\min}(x; M; p)}^{n=n_{\max}(x; M; p)} [\hat{\theta}_{Mn}^p - \tau_{Mn}^p(x)] + \\ &\quad + \sum_{n=n_{\min}(x; M; p)}^{n=n_{\max}(x; M; p)} [\hat{\tau}_{ml}^p - A_{ml}^p(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=M}^{n_{\max}(x;m;p)} \sum_{l=l_{\min}(x;m;p)}^{l_{\max}(x;m;p)} \int_{-p}^p \tilde{A}_{ml}^p(x) i \int_{-p}^p \tilde{A}_{ml}^p(x;H) dx = \\
 \stackrel{\text{def}}{=} & \sum_{n=n_{\min}(x;M;p)}^{n_{\max}(x;M;p)} \tilde{A} + \sum_{m=M}^{n_{\max}(x;m;p)} \sum_{l=l_{\min}(x;m;p)}^{l_{\max}(x;m;p)} \tilde{B} \quad (C.15)
 \end{aligned}$$

gdzie odpowiednie granice sumowań są dane wzorami (B.16) i (3.25), str. 121 i 33).

Oszacowanie składników \tilde{A} i \tilde{B} . W oszacowaniu składników pierwszej sumy we wzorze (C.15) korzystamy z poniższego wzoru

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} & = \sum_{Mn}^p \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x) i \left[\sum_{Mn}^p \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x;H) i \sum_{Mn}^p \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x;H) \right] i \sum_{Mn}^p \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x;H) dx = \\
 & = \sum_{Mn}^p \left[\int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x) i \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x;H) \right] + \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x;H) \left[\sum_{Mn}^p i \sum_{Mn}^p \right] \quad (C.16)
 \end{aligned}$$

Zauważając teraz, że

$$\sum_{Mn}^p i \sum_{Mn}^p = \frac{\int_{-p}^p \frac{n+(2p_i-1)}{2^M} G(x) \left[\int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x) i \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x;H) \right] dx}{2^M}$$

na podstawie oszacowania (C.6) dostajemy, dla dowolnych funkcji $G(x)$ ograniczonych w przedziale $S = [a; b]$ (tj. spełniających w nim warunek $\int_G(x) dx \leq M_G < 1$), następującą nierówność

$$\int_{Mn}^p i \int_{Mn}^p \leq 2^i M (2p_i - 1) \int_G(x) dx \leq 2^i M (2p_i - 1) M_G L,$$

która wraz z poniższymi (wynikającymi z definicji w (1.14) w rozdz. 1 oraz oszacowań podanych we wzorze (B.6))

$$\int_{Mn}^p = \frac{\int_{-p}^p \frac{n+(2p_i-1)}{2^M} G(x) \int_{-p}^p \tilde{A}_{Mn}^p(x) dx}{2^M} \leq 2^i M (2p_i - 1) \int_G(x) dx \leq 2^i M (2p_i - 1) M_G M,$$

proceedzi do oszacowania składnika \tilde{A} we wzorze (C.16) (por. wzory (B.6) i (C.6))

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} & \leq 2^i M (2p_i - 1) M_G M \int_G(x) dx + 2^i M \int_G(x) dx \leq 2^i M (2p_i - 1) M_G L + 2^i M \int_G(x) dx = \\
 & = 2^i M \int_G(x) dx \leq C_A
 \end{aligned} \quad (C.17)$$

gdzie stała $C_A = 2(2p_i - 1) M_G M L$ nie zależy zarówno od parametru przesunięcia n jak i skali M .

Podobnie, dla składnika \tilde{B} otrzymujemy, że

$$\tilde{B} \leq 2^i M \int_G(x) dx \leq C_B \quad (C.18)$$

ze stała $C_B = 2(2p_i - 1) M_G M L$ niezależna od parametru l oraz skali m .

Oszacowanie obciążenia $\overline{\text{biaś}}^2 G(x; K; H; p)$. Liczba składników \tilde{A} w pierwszej sumie wzoru (C.15) wynosi $n_{\max}(x; M; p)$ i $n_{\min}(x; M; p) + 1$ (por. wzór (B.16)) i, podobnie jak liczba składników \tilde{B} w sumie wewnętrznej (wynosząca $l_{\max}(x; m; p)$ i $l_{\min}(x; m; p) + 1$

dla każdej ze skal $m = M; \dots; K; 1$; por. wzór (3.25)), jest nie większa niż $2p_i - 1$. Stąd, ponieważ $M \in K$, to zachodzi następujące oszacowanie błędów obciążenia $\overline{\text{bias}}G(x; K; H; p)$ w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S$, przy założeniu, że $K > 0$ (por. wzory (C.17) i (C.18)):

$$\begin{aligned} \overline{\text{bias}}G(x; K; H; p) &\leq (2p_i - 1) 2^{i/2} \zeta \zeta_A + (K_i - M) (2p_i - 1) 2^{i/2} \zeta \zeta_B = \\ &= 2^{i/2} K \zeta (2p_i - 1) \frac{1}{K} \zeta_A + (1 - \frac{M}{K}) \zeta_B \leq \\ &\leq 2^{i/2} K \zeta (2p_i - 1) \zeta_A + \zeta_B \end{aligned} \tag{C.19}$$

z którego otrzymujemy nierówność (4.31) z rozdziału 4:

$$\overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p) \leq 2^{2i} K^2 \zeta \zeta_{\text{bias}} \tag{C.20}$$

ze stałą $\zeta_{\text{bias}} = \zeta (2p_i - 1) \zeta_A + \zeta_B$. Z oszacowania (C.19) wnioskujemy zatem, że błędy wynikające z zastosowania aproksymacji funkcji falkowych (szacowane przez skądniki we wzorach (C.17) i (C.18)) akumulują się i rosną (przy ustalonej skali M modeli obliczeniowych) ze wzrostem skali K tych modeli.

Uwaga 3.12 Dla modeli obliczeniowych opartych jedynie o aproksymacje funkcji skalujących (tj. w przypadku gdy $M = K$), oszacowanie (C.19) redukuje się do postaci

$$\overline{\text{bias}}G(x; K; H; p) \leq 2^{i/2} \zeta (2p_i - 1) \zeta_A$$

Zatem w modelach tych nie występuje kumulacja błędów aproksymacji (por. wyniki badań numerycznych w rozdz. 5).

C.5 Tabele współczynników Daubechies

Współczynniki $f_{t=0}^{2p_i-1}$ można wyznaczyć z następujących warunków (zob. np. [111, str. 592] i [131, str. 298])

$$\begin{aligned} \text{Ortonormalność : } & \sum_{t=0}^{2p_i-1} c_t c_{t+2n} = \pm \delta_{n,i}; \quad n = 0; \dots; p_i - 1 \\ \text{Znikające momenty : } & \sum_{t=0}^{2p_i-1} (j-1)^t c_{(2p_i-1)_i-t} \zeta^t = 0; \quad r = 0; \dots; p_i - 1 \end{aligned} \tag{C.21}$$

które tworzą dla każdego p , układ $2p$ równań o $2p$ niewiadomych c_t .

Przykład 3.2 Dla $p = 3$ układ równań w (C.21) przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^5 c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 = 1 \quad : (n = 0) \\ & \sum_{t=0}^5 c_0 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_4 + c_3 c_5 = 0 \quad : (n = 1) \\ & \sum_{t=0}^5 c_0 c_4 + c_1 c_5 = 0 \quad : (n = 2) \\ & \sum_{t=0}^5 c_5 - c_4 + c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0 \quad : (r = 0) \\ & \sum_{t=0}^5 0c_5 - 1c_4 + 2c_3 - 3c_2 + 4c_1 - 5c_0 = 0 \quad : (r = 1) \\ & \sum_{t=0}^5 0c_5 - 1c_4 + 4c_3 - 9c_2 + 16c_1 - 25c_0 = 0 \quad : (r = 2) \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu znajduje się w tabeli C.1 (str. 138). ■

Wspóczynniki Daubechies dla numerów falkowych $p = 2; \dots; 6$. Dla $p = 2; 3$ znane są dokładne wartości współczynników c_t (zob. np. [111, str. 593] i [118, str. 236]):

Tabela C.1 Wspóczynniki Daubechies dla $p = 2; 3$

t	p	
	2	3
0	$\frac{1 + p^{-3}}{4 p^{-2}}$	$\frac{1 + \frac{p}{10} + \frac{p^2}{5 + 2^i 10}}{16 p^{-2}}$
1	$\frac{3 + p^{-3}}{4 p^{-2}}$	$\frac{5 + \frac{p}{10} + \frac{p^2}{5 + 2^i 10}}{16 p^{-2}}$
2	$\frac{3 i + p^{-3}}{4 p^{-2}}$	$\frac{10 i + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{5 + 2^i 10}}{16 p^{-2}}$
3	$\frac{1 i + p^{-3}}{4 p^{-2}}$	$\frac{10 i + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{5 + 2^i 10}}{16 p^{-2}}$
4		$\frac{5 + \frac{p}{10} + \frac{p^2}{5 + 2^i 10}}{16 p^{-2}}$
5		$\frac{1 + \frac{p}{10} + \frac{p^2}{5 + 2^i 10}}{16 p^{-2}}$

Natomiast dla $p > 4$ wyznaczono je jedynie numerycznie:

Tabela C.2 Wspóczynniki Daubechies dla $p = 4; 5; 6$

t	p		
	4	5	6
0	0:230377813309	0:160102397974	0:111540743350
1	0:714846570553	0:603829269797	0:494623890398
2	0:630880767930	0:724308528438	0:751133908021
3	i 0:027983769417	0:138428145901	0:315250351709
4	i 0:187034811719	i 0:242294887066	i 0:226264693965
5	0:030841381836	i 0:032244869585	i 0:129766867567
6	0:032883011667	0:077571493840	0:097501605587
7	i 0:010597401785	i 0:006241490213	0:027522865530
8		i 0:012580751999	i 0:031582039318
9		0:003335725285	0:000553842201
10			0:004777257511
11			i 0:001077301085

C.6 Liczba współczynników w modelach obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$

Liczba współczynników w obliczeniowych modelach empirycznych $R_G(x; K; H; p)$ jest równa liczbie współczynników w ich falkowych odpowiednikach $\hat{R}_G(x; K; p)$ (por. wzór

(3.5) z rozdz. 3 oraz wzory (3.8)-(3.9) i (4.15)-(4.16)) i wynosi (zob. tez [72])

$$\begin{aligned}
 P_G(M; K) &= n_{\max}(M; p) \cdot n_{\min}(M; p) + 1 + \sum_{m=M}^{K-1} [l_{\max}(m; p) \cdot l_{\min}(m; p) + 1] = \\
 &= \sum_{m=M}^{K-1} 2^m (b \cdot i - 1) \cdot i \cdot 2^m (a \cdot i - 2p + 2) + 1 + \\
 &\quad + \sum_{m=M}^{K-1} [2^{2m} b e + p \cdot i - 2 \cdot i \cdot (b 2^m a c \cdot i - p + 1) + 1]
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

i dla dowolnego $M \in K$ moze być oszacowana następująco (por. własności (A.1) funkcji l_{\max} i l_{\min} , Dodatek A.1)

$$P_G(M; K) \leq 2^M (b \cdot i - a) + 2p + \sum_{m=M}^{K-1} [2^m (b \cdot i - a) + 2p] = 2^K (b \cdot i - a) + 2p(K - M + 1)$$

A stąd (ponieważ $2^{i-K} (K - 1) < 1$) otrzymujemy, że

$$P_G(M; K) < 2^K [(b \cdot i - a) + 2p] \tag{C.23}$$

C.7 Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy

W niniejszym dodatku wykazemy poprawność wzorów (4.52) stosowanych w szybkim algorytmie wyznaczania empirycznych modeli obliczeniowych $R_G(x; K; H; p)$. Ponadto, pokażemy że współczynniki wyznaczane za pomocą tego algorytmu są równoważne współczynnikom wyznaczanym według algorytmu (4.17) przy użyciu dokładniejszych (z większym parametrem skali H) aproksymacji $r^p(x; H)$ i $\tilde{A}^p(x; H)$ funkcji falkowych.

Zachodzą bowiem następujące równości (por. wzór (4.17) oraz definicje w (4.2) w rozdz. 4):

$$\begin{aligned}
 r_{mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k r_{mn}^p(x_k; H + 1) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \zeta 2^{\frac{m}{2} \cdot p} (2^m x_k \cdot i - n; H + 1) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \zeta 2^{\frac{m}{2} \cdot p} \frac{\tilde{A}^p(2^{H+1} (2^m x_k \cdot i - n))!}{2^{H+1}}
 \end{aligned}$$

stąd (zob. wzory (1.26)-(1.27) w rozdz. 1 oraz własność (A.4) funkcji l_{\max} w Dodatku A.1)

$$\begin{aligned}
 r_{mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sum_{t=0}^{K-1} \zeta 2^{\frac{m}{2} \cdot p} \frac{\tilde{A}^p(2^{H+1+2^m x_k \cdot i - 2^{H+1} n - i t})!}{2^{H+1}} = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sum_{t=0}^{K-1} \zeta 2^{\frac{m+1}{2} \cdot p} \frac{\tilde{A}^p(2^{H+1} 2^m x_k \cdot i - 2^{H+1} n - i \cdot 2^H t)!}{2^H} = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sum_{t=0}^{K-1} \zeta 2^{\frac{m+1}{2} \cdot p} \frac{\tilde{A}^p(2^H (2^{m+1} x_k \cdot i - 2n - i t))!}{2^H} = \\
 &= \sum_{t=0}^{K-1} \zeta \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k r_{m+1; 2n+i t}^p(x_k; H) = \sum_{t=0}^{K-1} \zeta r_{m+1; 2n+i t}^p
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

i podobnie

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ml}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K y_k \hat{A}_{ml}^p(x_k; H+1) = \sum_{t=i-2(p_i-1)}^i (i-1)^t c_{1;t} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K y_k \hat{a}_{m+1;2l+t}^p(x_k; H) = \\ &= \sum_{t=i-2(p_i-1)}^i (i-1)^t c_{1;t} \hat{a}_{m+1;2l+t}^p \end{aligned} \quad (C.25)$$

Ze wzorów (C.24) i (C.25) wynika zatem, że współczynniki \hat{a}_{mn}^p i \hat{a}_{ml}^p wyznaczone dla kolejnych skal $m = K-1; \dots; M$ za pomocą wzorów w (4.52) (tj. według szybkiego algorytmu ilorazowego) odpowiadają współczynnikom \hat{a}_{mn}^p i \hat{a}_{ml}^p otrzymywanym za pomocą wzorów w (4.17) w rozdz. 4 (tj. według „zwykłego” algorytmu ilorazowego) przy użyciu dokładniejszych aproksymacji funkcji falkowych (z parametrami skali aproksymacji równymi $H+q$, gdzie $q = 1; \dots; K-M$ w kolejnych skalach $m = K-1; \dots; M$).

Stąd (por. obliczenia w Dodatku C.4) rząd błąd $\overline{\text{bias}}^2 G(x; K; H; p)$ w empirycznych modelach obliczeniowych wyznaczanych według szybkiego algorytmu jest co najwyżej równy rządowi tego błędu dla modeli wyznaczanych według algorytmu ilorazowego (wzór (C.20)).

C.8 Procedury komputerowe

Ponizej zamieszczamy fragmenty programu wykorzystywanego w badaniach numerycznych falkowych algorytmów identyfikacji. Zaprezentowane funkcje stanowią implementacje dwóch kroków szybkiego algorytmu ilorazowego przedstawionego w rozdziale 4.

```
void ObliczAlfaKn(const int N, const Pomiary *zbi or)
{
    double xk, yk, vk;
    double arg, sqrt2K_N;
    int i, nMin, indeks;
    sqrt2K_N = sqrt(1 - K)/N;
    for(int k = 0; k < N; k++)
    {
        xk = zbi or[k].wej sci e();
        yk = zbi or[k].wyj sci e();
        vk = xk*(1 - K);
        i = fl oor(vk);
        nMin = MAX(i - (2*p-2), nmi n(K, p));
        for(int l = nMin; l <= i; l++)
        {
            arg = fi (vk-l)*yk*sqrt2K_N;
            al pha[K-M][l -nmi n(K, p)] += arg;
        }
    }
}
```

Funkcja `ObliczAlfaKn()` (pierwszy krok algorytmu – wzory (4.50)-(4.51)) wyznacza współczynniki $\hat{a}_{K,n}^p$, $n = n_{\min}(K; p); \dots; n_{\max}(K; p)$ z pomiarów $f(x_k; y_k)g_{k=1}^N$.

```

void FWT()
{
    double arg;
    int i, nMin, indeks, znak;
    for(int m = K-1; m > M; m--)
    {
        for(int n = nmin(m, p); n < nmax(m, p); n++)
        {
            for(int t = 0; t < 2*p-1; t++)
            {
                indeks = 2*n+t;
                if(indeks > nmin(m+1, p) && indeks < nmax(m+1, p))
                {
                    arg = alfa[m+1-M][indeks-nmin(m+1, p)]*c[p][t];
                    alfa[m-M][n-nmin(m, p)] += arg;
                }
            }
        }

        for(int l = lmin(m, p); l < lmax(m, p); l++)
        {
            for(int t = -(2*p-2); t < 1; t++)
            {
                indeks = 2*l+t;
                if(indeks > nmin(m+1, p) && indeks < nmax(m+1, p))
                {
                    znak = t&0x01 ? -1 : 1;
                    arg = alfa[m+1-M][indeks-nmin(m+1, p)]*c[p][1-t]*znak;
                    beta[m-M][l-lmin(m, p)] += arg;
                }
            }
        }
    }
}

```

Funkcja FWT() (drugi krok algorytmu – wzory (4.52) – opierający się na szybkiej transformacie falkowej (1.27)) wyznacza współczynniki α_{Mn}^p i β_{ml}^p obliczeniowych modeli empirycznych $R_G(x; K; H; p)$ dla dowolnego numeru falkowego p (por. np. [111, str. 595]).

Literatura

- [1] M. Akay, Wavelets in biomedical engineering, *Annals of Biomedical Engineering*, 23, 531-542, 1995.
- [2] S. T. Ali, J. P. Antoine, J. P. Gazeau, *Coherent States and Their Generalization: A Mathematical Overview*, Springer-Verlag, 1999.
- [3] A. Antoniadis, G. Oppenheim, *Wavelets and Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] M. Antonopoulos-Domis, T. Tambouratzis, System identification during transient via wavelets multiresolution analysis followed by spectral techniques, *Annals of Nuclear Energy*, 25, 465-480, 1998.
- [5] G. Bachman, E. Beckenstein, L. Narici, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer Verlag, 1999.
- [6] J. S. Bendat, *Non-linear System Analysis and Identification from Random Data*, Wiley, New York, 1990.
- [7] P. J. Bickel, K. A. Doksum, *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*, Holden-Day, San Francisco, 1977.
- [8] S. A. Billings, Identification of non-linear systems—a survey, *Proceedings IEE*, 127, 272-285, 1980.
- [9] ———, S. Y. Fakhouri, Theory of separable processes with application to the identification of non-linear systems, *Proceedings of Inst. Elect. Electron.*, 125, 1051-1058, 1978.
- [10] ———, ———, Non-linear system identification using the Hammerstein model, *International Journal of System Science*, 10, 567-578, 1979.
- [11] ———, ———, Identification of systems containing linear dynamic and static non-linear elements, *Automatica*, 18, 15-26, 1982.
- [12] M. Brenner, R. Lind, Wavelet-processed flight data for robust aeroservoelastic stability margins, *Journal of Guidance and Dynamics*, 21, 823-829, 1998.
- [13] A. G. Bruce, H. Y. Gao, Understanding waveshrink - variance and bias estimation, *Biometrika*, 83, 727-745, 1996.
- [14] T. T. Cai, L. D. Brown, Wavelet shrinkage for nonequispaced samples, *Annals of Statistics*, 26, 1783-1799, 1998.

- [15] —, Adaptive wavelet estimation: A block thresholding and oracle inequality approach, *Annals of Statistics*, 27, 898-924, 1999.
- [16] S. Cambanis, E. Masry, Wavelet approximation of deterministic and random signals: Convergence properties and rates, *IEEE Transactions on Information Theory*, 40, 1013-1029, 1994.
- [17] A. Chambolle, R. A. DeVore, N. Y. Lee, B. J. Lucier, Nonlinear wavelet image-processing - variational-problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage, *IEEE Transactions on Image Processing*, 7, 319-335, 1998.
- [18] H. W. Chen, Modeling and identification of parallel non-linear systems: structural classification and parameter estimation methods, *Proceedings IEEE*, 83, 39-66, 1995.
- [19] I. L. Chien, B. A. Ogunnaike, Modeling and control of high purity distillation columns, *AIChE National Meeting*, 1-32, Miami Beach, Florida, 1999.
- [20] Y. S. Chow, H. Teicher, *Probability Theory Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer, New York, 1997.
- [21] J. Claerbout, Hypertext documents about reproducible research, <http://sepwww.stanford.edu>, 1994.
- [22] M. Cotronei, L. B. Montefusco, L. Puccio, Multiwavelet analysis and signal-processing, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 45, 970-987, 1998.
- [23] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [24] —, *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [25] M. Daiguji, O. Kudo, T. Wada, Application of wavelet analysis to fault-detection in oil refinery, *Computers & Chemical Engineering*, 21, 1117-1122, 1997.
- [26] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 42, 909-996, 1988.
- [27] —, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM Edition, Philadelphia, 1992.
- [28] B. Delyon, A. Juditsky, Estimating wavelet coefficients, (w:) [3], 151-167, 1995.
- [29] K. Dohan, P. H. Whitfield, Identification and characterization of water quality transient using wavelet analysis methodology, *Water Science and Technology*, 36, 325-335, 1997.
- [30] D. L. Donoho, Wedgelets - nearly minimax estimation of edges, *Annals of Statistics*, 27, 859-897, 1999.
- [31] —, I. M. Johnstone, Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage, *Biometrika*, 81, 425-455, 1991.
- [32] —, —, Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1200-1224, 1995.

- [33] —, —, G. Kerkyacharian, D. Picard, Wavelet Shrinkage: Asymptopia ?, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, 57, 301-369, 1995.
- [34] T. R. Downie, B. W. Silverman, The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46, 2558-2561, 1998.
- [35] B. Droge, T. Georg, On selecting the smoothing parameter of least squares regression estimates using the minimax regret approach. *Statistics & Decisions*, 13, 1-20, 1995.
- [36] E. Eskinat, S. H. Johnson, W. L. Luyben, Use of Hammerstein models in identification of non-linear systems, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 37, 255-268, 1991.
- [37] P. Eykhoff, *Identyfikacja w układach dynamicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1980.
- [38] H. Fang, H. Y. Chen, Wavelet analyses of electroanalytical chemistry responses and an adaptive filter, *Analytica Chimica Acta*, 346, 319-325, 1997.
- [39] W. Y. Feng, H. Genceli, M. Nikolaou, Constrained model predictive control with simultaneous identification using wavelets, *Computers & Chemical Engineering*, 20, 1011-1016, 1996.
- [40] W. Findeisen (red.), *Analiza systemowa – podstawy i metodologia*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1985.
- [41] P. P. Gandhi, Optimum quantization of order statistics, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45, 2153-2159, 1997.
- [42] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996.
- [43] W. Greblicki, Nonparametric system identification by orthogonal series, *Problems of Control and Information Theory*, 8, 67-73, 1979.
- [44] —, Nonparametric orthogonal series identification of Hammerstein systems, *International Journal of System Science*, 20, 2355-2367, 1989.
- [45] —, Nieparametryczna identyfikacja systemów, *Archiwum Automatyki i Robotyki*, XXXVI, 277-290, 1991.
- [46] —, Nonparametric recovering nonlinearities in block oriented systems with the help of Laguerre polynomials, *Control – Theory and Advanced Technology*, 10, 771-791, 1994.
- [47] —, Nonparametric identification of Wiener systems by orthogonal series, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 2077-2086, 1994.
- [48] —, Nonlinearity estimation in Hammerstein systems based on ordered statistics, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44, 1224-1233, 1996.

- [49] —, Z. Hasiewicz, Wavelet approach to non-linear system identification, XXI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, 1, 87-92, Kiekrz, 1998.
- [50] —, M. Pawlak, Fourier and Hermite series estimates of regression function, *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, 37, 443-455, 1985.
- [51] —, —, Identification of discrete Hammerstein system using kernel regression estimates, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, 74-77, 1986.
- [52] —, —, Nonlinear identification of Hammerstein systems, *IEEE Transactions on Information Theory*, 35, 409-418, 1989.
- [53] —, —, Recursive nonparametric identification of Hammerstein systems, *Journal of the Franklin Institute*, 326, 461-481, 1989.
- [54] —, —, Nonparametric identification of a cascade nonlinear time series system, *Signal Processing*, 22, 61-75, 1991.
- [55] —, —, Nonparametric identification of a particular nonlinear time series system, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40, 985-989, 1992.
- [56] —, —, Cascade non-linear identification by a nonparametric method, *International Journal of System Science*, 25, 129-153, 1994.
- [57] —, —, Dynamic system identification with order statistics, *IEEE Transactions on Information Theory*, 40, 1474-1489, 1994.
- [58] A. Grossman, J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 15, 723-736, 1984.
- [59] C. F. Haal, E. L. Hall, A non-linear model for the spatial characteristics of the human vision system, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 7, 161-170, 1977.
- [60] A. Haar, Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme, *Annals of Mathematics*, 69, 331-371, 1910.
- [61] R. Haber, L. Keviczky, *Nonlinear System Identification – Input-Output Modeling Approach (Vol. 1 & 2)*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [62] —, H. Unbenhauen, Structure identification of non-linear dynamic systems—A survey on input/output approaches, *Automatica*, 26, 771-791, 1994.
- [63] N. D. Haist, F. H. L. Chang, R. Luus, Non-linear identification in the presence of the correlated noise using Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18, 552-555, 1973.
- [64] W. Härdle, *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [65] —, G. Kerkycharian, D. Picard, A. Tsybakov, *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*, Springer, 1998.

- [66] Z. Hasiewicz, Identifiability of large-scale interconnected linear zero-memory systems, *International Journal of System Science*, 18, 649-664, 1987.
- [67] —, Identifiability analysis of interconnected zero-memory composite systems, *International Journal of System Science*, 19, 1731-1749, 1988.
- [68] —, Applicability of least-squares to the parameter estimation of large-scale no-memory linear composite systems, *International Journal of System Science*, 20, 2427-2449, 1989.
- [69] —, Identyfikacja sterowanych systemów o złożonej strukturze (in Polish), *Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej P.Wr. (Seria: Monografie)*, 22, Wrocław, 1993.
- [70] —, Hammerstein system identification by the Haar multiresolution approximation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 13, 691-717, 1999.
- [71] —, W. Greblicki, Non-linearity recovering with the help of wavelets, *Proceedings of European Control Conference 1999*, [materiał wydany w postaci płyty CD], Karlsruhe, 1999.
- [72] —, P. Śliwiński, Non-linear system identification by wavelets, (referat przyjęty na:) 6th International Conference Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR-2000, 2000.
- [73] —, —, Non-linearity recovering by wavelets of compact support, (referat przyjęty na:) International Conference on Signals and Electronic Systems, ICSES-2000, 2000.
- [74] G. T. Heidt, A. W. Galli, Transient power quality problems analyzed using wavelets, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12, 908-915, 1997.
- [75] I. W. Hunter, M. J. Korenberg, The identification of non-linear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models, *Biological Cybernetics*, 55, 135-144, 1986.
- [76] A. Ikononopoulou, A. Endou, Wavelet application in-process monitoring, *Nuclear Technology*, 125, 225-234, 1999.
- [77] —, —, Wavelet decomposition and radial basis function networks for system monitoring, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 45, 2293-2301, 1998.
- [78] A. Janczak, J. Korbicz, Neural networks models of Hammerstein systems and their application to fault detection and isolation, *Proceeding of IFAC World Congress*, 7e-013, Beijing, Chiny, 1999.
- [79] I. M. Johnstone, Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems - Adaptivity results, *Statistica Sinica*, 9, 51-83, 1999.
- [80] S. Kelly, M. Kon, M. Raphael, Pointwise convergence of wavelet expansions, *Bulletin of The American Mathematical Society*, 30, 87-94, 1994.

- [81] A. Kiezbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1994.
- [82] Y. Kitada, Identification of nonlinear structural dynamic systems using wavelets, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 124, 1059-1066, 1998.
- [83] J. Korbicz, A. Obuchowicz, K. Patan, Network of dynamic neurons in fault detection systems, *IEEE International Conference on System, Man and Cybernetics SMC'98*, 1862-1867, Hyatt La Jolla, San Diego, 1998.
- [84] K. A. Kosanovich, A. R. Moser, M. J. Piovoso, Poisson wavelets applied to model identification, *Journal of Process Control*, 5, 225-234, 1995.
- [85] H. Krim, D. Tucker, S. Mallat, D. Donoho, On denoising and best signal representation, *IEEE Transactions on Information Theory*, 45, 2225-2238, 1999.
- [86] A. Krzyzak, Identification of discrete Hammerstein systems by the Fourier series regression estimate, *International Journal of System Science*, 20, 1729-1744, 1989.
- [87] Z. Q. Lang, A nonparametric polynomial identification algorithm for the Hammerstein system, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 1435-1441, 1997.
- [88] R. Leitner, *Zarys matematyki wyzszej dla inzynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1977.
- [89] I. J. Leontaritis, S. A. Billings, Input-output parametric models for non-linear systems, *International Journal of Control*, 41, 303-344, 1985.
- [90] —, Model selection and validation methods for non-linear systems. Input/output parametric models for non-linear systems, *International Journal of Control*, 45, 311-341, 1987.
- [91] H. E. Liao, W. S. Sethares, Suboptimal identification of non-linear ARMA models using an orthogonality approach, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 42, 14-22, 1995.
- [92] S. G. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, 674-693, 1989.
- [93] —, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, 1998.
- [94] —, S. Zhong, Characterization of signals from multiscale edges, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14, 710-732, 1992.
- [95] K. Mańczak, Z. Nahorski, *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1983.
- [96] P. Z. Marmel is, V. Z. Marmel is, *Analysis of Physiological Systems. The White Noise Approach*, Plenum, New York, 1978.
- [97] T. Marwala, Damage identification using committee of neural networks, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 126, 43-50, 2000.

- [98] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [99] —, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.
- [100] —, S. Jaffard, R. D. Ryan, *Wavelets & Applications*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [101] J. H. Miller, J. B. Thomas, Detectors for discrete-time signals in non-gaussian noise, *IEEE Transactions on Information Theory*, 18, 241-250, 1972.
- [102] D. Morlet, J. P. Couder, P. Touboul, P. Rubel, Wavelet analysis of high resolution ECGs in postinfarction patients – role of basic wavelet and of the analyzed lead, *International Journal of Biomedical Computing*, 39, 311-325, 1995.
- [103] K. S. Narendra, P. G. Gallman, An iterative method for the identification of nonlinear systems using the Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11, 546-550, 1966.
- [104] R. T. Ogden, *Essential Wavelets For Statistical Applications and Data Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [105] K. Patan, A. Obuchowicz, A stochastic approach to training networks of dynamic neurons, *IV Konferencja Sieci Neuronowe i Ich Zastosowania*, 443-448, Zakopane, 1999.
- [106] Y. Pati, P. Krishnaprasad, Rational wavelets in model reduction and system identification, *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, 3394-3399, 1994.
- [107] M. Pawlak, On the series expansion approach to the identification of Hammerstein systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 763-767, 1991.
- [108] —, Z. Hasiewicz, Nonlinear system identification by the Haar multiresolution analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45, 945-961, 1998.
- [109] —, —, Non-parametric system identification of non-linear block-oriented systems by multi-scale expansions, *Proceedings of European Control Conference 1999*, [materiał wydany w postaci płyty CD], Karlsruhe, 1999.
- [110] L. Prasad, S. S. Iyengar, S. S. Ayengar, *Wavelet Analysis with Application to Image Processing*, CRC Press, 2000.
- [111] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [112] E. Rafajłowicz, Nonparametric orthogonal series estimators of regression: A class attaining the optimal convergence rate in L_2 , *Statistic & Probability Letters*, 5, 219-224, 1987.
- [113] —, Nonparametric least squares estimation of a regression function, *Statistics*, 19, 349-358, 1988.

- [114] —, Algorytmy planowania eksperymentu z implementacjami w środowisku Mathematica, Wydawnictwo PLJ, Warszawa, 1996.
- [115] —, Consistency of orthogonal series density estimators based on grouped observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 43, 283-285, 1997.
- [116] —, M. Pawlak, On function recovery by neural networks based on orthogonal expansions, *Nonlinear Analysis - Theory Methods & Applications*, 30, 1343-1354, 1997.
- [117] J. C. Ralston, A. M. Zoubir, B. Boashash, Identification of a class of nonlinear systems under stationary non-gaussian excitation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45, 719-735, 1997.
- [118] R. M. Rao, A. S. Bopardikar, *Wavelet Transform. Introduction to Theory and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1998.
- [119] S. Rólewicz, *Analiza funkcjonalna i teoria sterowania*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1974.
- [120] W. Sandham, D. Hamilton, A. Fisher, W. Xu, M. Conway, Multiresolution wavelet decomposition of the seismocardiogram, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46, 2541-2543, 1998.
- [121] S. Sardy, Minimax threshold for denoising complex signals with waveshrink, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48, 1023-1028, 2000.
- [122] D. W. Scott, *Multivariate Density Estimation. Theory, Practice, and Visualization*, J. Willey & Sons, New York, 1992.
- [123] R. J. Serfling, *Twierdzenia graniczne statystyki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1991.
- [124] J. Sjöberg, Q. H. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P. Y. Girenc, H. Hjalmarsson, A. Juditsky, Nonlinear black-box modeling in system identification - A unified review, *Nonlinear black-box modeling in system identification - Mathematical Foundations*, *Automatica*, 31, 1691-1750, 1995.
- [125] S. Skoczowski, Identyfikacja i sterowanie przemysłowymi obiektami elektrotermicznymi, XIII Krajowa Konferencja Automatyki, 2, 323-331, Opole, 1999.
- [126] Special Issue on Time-Frequency and Wavelet Analysis, *IEEE Engineering in Medicine & Biology Magazine*, 14, 1995.
- [127] P. Stoica, T. Söderström, *Identyfikacja systemów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [128] C. J. Stone, Optimal rates of convergence for nonparametric regression, *Annals of Statistics*, 8, 1348-1360, 1980.
- [129] —, Optimal global rates of convergence for nonparametric regression, *Annals of Statistics*, 10, 1040-1053, 1982.

- [130] G. Strang, Wavelets and dilation equations: A brief introduction, *SIAM Review*, 31, 614-627, 1989.
- [131] —, Wavelet transforms vs Fourier transforms, *Bulletin of American Mathematical Society*, 28, 288-305, 1993.
- [132] —, V. Strel a, Orthogonal multiwavelets with vanishing moments, *Optical Engineering*, 33, 2104-2107, 1994.
- [133] V. Strel a, P. N. Heller, G. Strang, P. Topiwala, C. Heil, The application of multiwavelet filterbanks to image-processing, *IEEE Transactions on Image Processing*, 8, 548-563, 1999.
- [134] N. Sureshbabu, J. A. Farrell, Wavelet based system identification for non-linear control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 412-417, 1999.
- [135] P. Śliwiński, Experimental investigation of wavelet neural network, *III Konferencja Sieci Neuronowe i Ich Zastosowania*, 167-172, Kule, 1997.
- [136] —, Parametric identification of non-linear blocky function by using wavelets, *XXI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne*, 1, 93-98, Kiekrz, 1998.
- [137] —, Parametric identification of non-linear systems using Haar multiresolution analysis, *Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej*, PRE-86/98, Wrocław, 1998.
- [138] —, Self-organizing wavelet neural network - the data driven approach, *IV Konferencja Sieci Neuronowe i Ich Zastosowania*, 153-158, Zakopane, 1999.
- [139] —, Fast discrete wavelet transform with random x-variables, *XXII Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne*, 467-472, 2, Stare Jabłonki, 1999.
- [140] —, Round-off error in wavelet computing – Haar approximation model, *Warsztaty naukowe „Przetwarzanie sygnałów 99”*, 31-36, Poznań, 1999.
- [141] —, Z. Hasiewicz, Parametryczna identyfikacja zrozonych systemów nieliniowych przy zastosowaniu falek, *XIII Krajowa Konferencja Automatyki*, 1, 241-246, Opole, 1999.
- [142] —, Fast wavelet algorithm for non-linear system identification, (referat przyjęty na:) *6th International Conference Methods and Models in Automation and Robotics*, MMAR-2000, 2000.
- [143] R. Tadeusiewicz, *Problemy biocybernetyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.
- [144] P. E. Tikkanen, Nonlinear wavelet and wavelet packet denoising of electrocardiogram signal, *Biological Cybernetics*, 80, 259-267, 1999.
- [145] P. N. Topiwala, *Wavelet Image and Video Compression*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

- [146] M. Unser, A. Al droubi, A review of wavelets in biomedical applications, *Proceedings of the IEEE*, 84, 626-638, 1996.
- [147] D. C. T. Wai, Y. B. Xia, A novel technique for high impedance fault identification, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 13, 738-744, 1998.
- [148] J. S. Walker, *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*, CRC Press, 1999.
- [149] G. G. Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press, 1994.
- [150] Y. Z. Wang, Function estimation via wavelet shrinkage for long-memory data, *Annals of Statistics*, 24, 466-484, 1996.
- [151] S. Węgrzyn, *Podstawy automatyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1974.
- [152] P. Wojtaszczyk, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [153] E. Wong, *Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1976.
- [154] X. S. Zhang, Y. S. Zhu, N. V. Thakor, Z. M. Wang, Z. Z. Wang, Modeling the relationship between concurrent epicardial action-potentials and bipolar electrograms, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 46, 365-376, 1999.
- [155] L. Zi-Qiang, Controller design oriented model identification method for Hammerstein system, *Automatica*, 29, 767-771, 1993.

Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować Panu Profesorowi Zygmuntowi Hasiewiczowi za opiekę naukową i wsparcie w trakcie studiów doktoranckich i podczas pisanie tej pracy. Dziękuję również Pracownikom Zakładu Sterowania i Optymalizacji w Instytucie Cybernetyki Technicznej za cenne dyskusje i uwagi.

mgr inż. Przemysław Śliwiński

Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej
ul. Janiszewskiego 11/17
50-372 Wrocław

Niniejszy raport otrzymują

1.	OINT	1 egz.
2.	Biblioteka Główna PWr.	1 egz.
3.	Z-ca Dyrektora Instytutu	1 egz.
4.	Promotor	1 egz.
5.	Recenzenci	2 egz.
6.	Autor	9 egz.
Razem:		<hr/> 15 egz.

Raport wpłynął do Redakcji ICT
w czerwcu 2000 r.