

## ALGORYTMY IDENTYFIKACJI CIĄGLYCH SYSTEMÓW HAMMERSTEINA

Włodzimierz GREBLICKI\*, Przemysław ŚLIWIŃSKI\*

\*Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wroclawska,  
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: {wgre, slk}@ict.pwr.wroc.pl

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono w sposób zuniifikowany ortogonalne algorytmy identyfikacji nieliniowości w ciągłych systemach Hammersteina. Przyjęto nieparametryczną wiedzę wstępną o szukanej nieliniowości. Podano warunki zbieżności ogólnego algorytmu ortogonalnego i pokazano, że zależy ona jedynie od umiejętnego doboru złożoności algorytmu, w zależności od czasu trwania pomiarów oraz od zastosowanego układu funkcji ortogonalnych. Przedstawiono przykłady algorytmów wykorzystujących szeregi Fouriera, Hermite'a, Laguerre'a, Legendre'a oraz szeregi funkcji falkowych Daubechies.

**Słowa kluczowe:** Identyfikacja systemów, algorytm nieparametryczny, system ciągły, system Hammersteina.

### 1. WPROWADZENIE

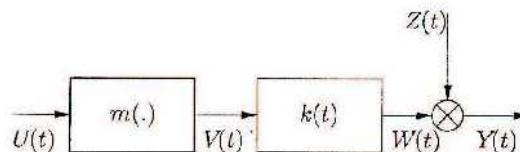
W pracy przedstawiono algorytmy identyfikacji nieliniowej charakterystyki w ciągłych systemach Hammersteina. Ich podstawą jest spostrzeżenie, że, z dokładnością do pewnych stałych, charakterystykę tę można przedstawić jako funkcję regresji wyjścia systemu względem wejścia. Do estymacji tej regresji wykorzystuje się metodę rozwinięć w szereg ortogonalny. Zakłada się przy tym, że wstępna informacja jest niewielka, czyli nieparametryczna.

Problem wykrywania nieliniowości w takim systemie badano wcześniej w pracy [3], w której zastosowano tzw. algorytm jądrowy. Za prac rozwiązujących zagadnienia podobne, należy wymienić [2], [4, 5, 6], [8, 9, 10], [12], [13], [14], [16], [18], w których stosowano różne typy algorytmów nieparametrycznych lecz w systemach dyskretnych.

### 2. ZADANIE IDENTYFIKACJI

Identyfikowany system Hammersteina przedstawiony jest na Rys. 1. Jego wejście  $\{U(t); t \in (-\infty, \infty)\}$  jest stacjonarnym białym procesem o funkcji autokowariancji  $\sigma_U^2 \delta(\cdot)$ , gdzie  $\delta(\cdot)$  jest impulsem Diraca. Zmienna losowa  $U(t)$  ma gęstość prawdopodobieństwa  $f$ . O nieliniowej charakterystyce  $m$  elementu statycznego zakładamy jedynie to, że jest ograniczona, tj.  $|m(u)| \leq c_1$ ,  $c_1$  nieznane. Liniowy element dynamiczny, o odpowiedzi impulsowej  $k$ , jest stabilny, tj. zachodzi  $\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty$ .

Wyjście systemu  $W(t)$  jest zakłócanie przez addytywny, stacjonarny proces losowy  $\{Z(t); t \in (-\infty, \infty)\}$  o zerowej wartości oczekiwanej, skończonej wariancji  $\sigma_Z^2$  i funkcji autokowariancji  $\sigma_Z^2 \delta(\cdot)$ . Procesy  $U(t)$  i  $Z(t)$  są wzajemnie niezależne. Wewnętrzne sygnały systemu,  $V(t) = m(U(t))$  oraz  $W(t) = \int_0^t k(\xi) V(t-\xi) d\xi$ , są niedostępne dla pomiarów. W rezultacie do dyspozycji mamy jedynie obserwacje wejścia i wyjścia systemu  $\{U(t), Y(t)\}$ , przy czym  $Y(t) = W(t) + Z(t)$ .



Rys. 1. Identyfikowany system Hammersteina.

### 3. ALGORYTM ORTOGONALNY

Identyfikacja charakterystyki nieliniowej  $m(u)$  w oparciu o pomiary wejścia i wyjścia systemu opiera się na następującym lemacie, patrz [3]:

**Lemat** Dla dowolnego  $\lambda \geq 0$ ,

$$E[Y(t+\lambda) | U(t) = u] = am(u) + b$$

gdzie  $a = k(\lambda)$  oraz  $b = FW(t)$ .

Współczynniki  $a$  i  $b$  są nieznane i nie mogą być także estymowane. W konsekwencji charakterystykę nieliniową systemu możemy poznać jedynie z dokładnością do tych stałych. Oznaczmy zatem  $\mu(u) = am(u) + b$ . Zaważmy, że dla  $f(u) > 0$

$$\mu(u) = \frac{g(u)}{f(u)} \quad \text{gdzie} \quad g(u) = \mu(u) f(u).$$

Zarówno licznik  $g$  jak i mianownik  $f$  mogą być rozwinięte w odpowiednie szeregi ortogonalne

$$g(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(u) \quad \text{oraz} \quad f(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(u)$$

gdzie

$$\alpha_k = \int_{\Delta} g(u) \varphi_k(u) du$$

$$\beta_k = \int_{\Delta} f(u) \varphi_k(u) du$$

i gdzie  $\Delta$  jest przedziałem, w którym funkcje  $\{\varphi_k(u); k = 0, 1, \dots\}$  tworzą zupełny układ ortogonalny. Nieznane współczynniki  $\alpha_k$  i  $\beta_k$  mogą być łatwo estymowane ponieważ

$$\alpha_k = E[Y(t + \lambda) \varphi_k(U(t))]$$

$$\beta_k = E[\varphi_k(U(t))].$$

W rezultacie jako algorytm identyfikacji nieliniowości  $\mu$  przyjmujemy

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\hat{g}_N(u; t)}{\hat{f}_N(u; t)} = \frac{\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k \varphi_k(u)}{\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\beta}_k \varphi_k(u)} \quad (1)$$

gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\tau + \lambda) \varphi_k(U(\tau)) d\tau$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_k(U(\tau)) d\tau.$$

Zasadę doboru funkcji  $N(t)$  przyjmującej wartości naturalne podamy później.

### 3.1. Warunki zbieżności algorytmów ortogonalnych

Ponieważ  $E\hat{\alpha}_k = \alpha_k$ , zatem

$$E \left[ \sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k \varphi_k(u) \right] = \sum_{k=0}^{N(t)} \alpha_k \varphi_k(u).$$

Wynika stąd, że jeśli

$$N(t) \rightarrow \infty \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow \infty \quad (2)$$

to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k \varphi_k(u) \right] = g(u) \quad (3)$$

we wszystkich punktach, w których

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \alpha_k \varphi_k(u) = g(u).$$

Zauważmy teraz, że

$$\text{var} [\hat{g}_{N(t)}(u)] = Q_1(t) + Q_2(t)$$

gdzie

$$Q_1(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t \text{cov} [Q_{11}(\xi), Q_{12}(\eta)] d\xi d\eta$$

i gdzie

$$Q_{11}(\xi) = W(\xi) \psi_{N(t)}(u, U(\xi))$$

$$Q_{12}(\eta) = W(\eta) \psi_{N(t)}(u, U(\eta))$$

oraz

$$Q_2(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t \text{cov} [Q_{21}(\xi), Q_{22}(\eta)] d\xi d\eta$$

gdzie

$$Q_{21}(\xi) = \psi_{N(t)}(u, U(\xi))$$

$$Q_{22}(\eta) = \psi_{N(t)}(u, U(\eta))$$

i gdzie

$$\psi_N(u, v) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(u) \varphi_k(v).$$

Można pokazać, że

$$\int_0^t \int_0^t \text{cov} [Q_3(\xi, \lambda), Q_4(\eta, \lambda)] d\xi d\eta \leq (td_N + t) \rho(u)$$

gdzie

$$Q_3(\xi, \lambda) = W(\xi + \lambda) \psi_N(u, U(\xi))$$

$$Q_4(\eta, \lambda) = W(\eta + \lambda) \psi_N(u, U(\eta))$$

i gdzie  $d_N = \sup_{u,v} |\psi_N(u, v)|$  oraz  $\rho(u) < \infty$ . Zatem, jeśli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_{N(t)}}{t} = 0, \quad (4)$$

to  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{var} [\hat{g}_{N(t)}(u)] = 0$  w każdym punkcie, w którym zachodzi (3). Podobne własności można wykazać dla  $\hat{f}_{N(t)}(u)$ . Wykazaliśmy w ten sposób następujący rezultat:

**Twierdzenie 1** Jeśli  $N(t)$  spełnia warunki (2) oraz (4),

$$\hat{\mu}_{N(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow \infty$$

w/g prawdopodobieństwa, w każdym punkcie, w którym zachodzi (3).

## 4. PRZYKŁADY ALGORYTMÓW ORTOGONALNYCH

Ponizej podajemy przykłady algorytmów ortogonalnych. Wybór poszczególnych szeregów zależy od tego, czy wejście systemu jest ograniczone, czy nie. Algorytmy trygonometryczny i Legendre'a znajdują zastosowanie przy ograniczonym wejściu.



**Algorytm trygonometryczny.** Gdy wejście jest ograniczone, a zatem przedział  $\Delta$  jest skończony, do estymacji nieliniowości  $\mu(u)$  można zastosować szereg trygonometryczny. Załóżmy, że  $\Delta = [-\pi, \pi]$ . Algorytm identyfikacji ma postać

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\sum_{|k|=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k e^{jku}}{N(t)} \quad (5)$$

$$\sum_{|k|=0}^{N(t)} \hat{\beta}_k e^{jku}$$

gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\tau + \lambda) e^{jkU(\tau)} d\tau$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{t} \int_0^t e^{jkU(\tau)} d\tau$$

Ponieważ szereg ten zbiega do funkcji w punktach ich różniczkowalności (zob. [15]) oraz  $\max_{-\pi \leq u \leq \pi} |e^{jkU}| \leq 1$ , zatem dla algorytmu (5) prawdziwy jest następujący wniosek z Twierdzenia 1:

**Wniosek 1** *Jeśli*

$$N(t) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{N^2(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty$$

to

$$\hat{\mu}_{N(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \text{ gdy } t \rightarrow \infty,$$

w/g prawdopodobieństwa, w każdym punkcie  $u \in (-\pi, \pi)$ , gdzie gęstość  $f$  oraz nieliniowość  $m$  są różniczkowalne oraz  $f(u) > 0$ .

**Algorytm Legendre'a.** Jeśli wejście jest ograniczone do przedziału  $\Delta = [-1, 1]$ , jako układ ortogonalny można wybrać wielomiany Legendre'a, dla których otrzymujemy algorytm

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k l_k(u)}{N(t)} \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\beta}_k l_k(u)$$

gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\tau + \lambda) l_k(U(\tau)) d\tau$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{t} \int_0^t l_k(U(\tau)) d\tau$$

w którym

$$l_k(u) = (\sqrt{2k+1}/\sqrt{2}) P_k(u)$$

i gdzie

$$P_k(u) = (1/2^k k!) (d^k / du^k) (u^2 - 1)^2$$

jest  $k$ -tym wielomianem Legendre'a. Ponieważ szereg Legendre'a zbiega do funkcji w punktach ich różniczkowalności (zob. [15]) oraz  $\max_{-1 \leq u \leq 1} |l_k(u)| \leq 1$ , to, podobnie jak dla algorytmu trygonometrycznego, otrzymujemy, że

**Wniosek 2** *Jeśli*

$$N(t) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{N^2(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty$$

to

$$\hat{\mu}_{N(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \text{ gdy } t \rightarrow \infty,$$

w/g prawdopodobieństwa, w każdym punkcie  $u \in (-1, 1)$ , gdzie gęstość  $f$  oraz nieliniowość  $m$  są różniczkowalne oraz  $f(u) > 0$ .

Kolejne algorytmy można stosować, gdy wejście systemu nie jest ograniczone (przedział  $\Delta$  jest nieskończony).

**Algorytm Laguerre'a.** W przypadku, gdy wejście jest nieograniczone i pomiary  $U(t)$  pochodzą z półosi  $[0, +\infty)$ , zastosowanie znajdują algorytmy z wielomianami Laguerre'a

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k p_k(u)}{N(t)} \quad (7)$$

$$\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\beta}_k p_k(u)$$

gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\tau + \lambda) p_k(U(\tau)) d\tau$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{t} \int_0^t p_k(U(\tau)) d\tau$$

w którym

$$p_k(u) = e^{-u/2} L_k(u)$$

i gdzie

$$L_k(u) = (1/k!) e^u (d^k / du^k) (u^k e^{-u})$$

jest  $k$ -tym wielomianem Laguerre'a. Ponieważ szereg Laguerre'a zbiega do funkcji w punktach ich różniczkowalności [17], oraz  $\max_{0 \leq u < \infty} |p_k(u)| \leq ck$ , nieznanne  $c$ , to dla algorytmu (7) prawdziwy jest

**Wniosek 3** *Jeśli*

$$N(t) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{N^6(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty$$

to

$$\hat{\mu}_{N(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \text{ gdy } t \rightarrow \infty,$$

w/g prawdopodobieństwa, w każdym punkcie  $u \in (0, +\infty)$ , gdzie gęstość  $f$  oraz nieliniowość  $m$  są różniczkowalne oraz  $f(u) > 0$ .

**Algorytm Hermite'a.** W przypadku, gdy pomiary  $U(t)$  pochodzą z całej osi rzeczywistej, tj.  $\Delta = (-\infty, \infty)$ , można zastosować szereg Hermite'a, który tworzy na niej układ ortogonalny. Oparty na nim algorytm ma postać

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k h_k(u)}{\sum_{k=0}^{N(t)} \hat{\beta}_k h_k(u)} \quad (8)$$

gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\tau + \lambda) h_k(U(\tau)) d\tau$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{t} \int_0^t h_k(U(\tau)) d\tau$$

i gdzie

$$h_k(u) = \frac{1}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} H_k(u)$$

przy czym

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2}$$

jest  $k$ -tym wielomianem Hermite'a. Szereg Hermite'a zbiega do funkcji w punktach, w których są one różniczkowalne (zob. [17]) oraz  $\max_{-\infty < u < \infty} |h_k(u)| \leq c k^{-1/12}$ , a zatem prawdziwy jest następujący wniosek z Twierdzenia 1:

**Wniosek 4** Jeśli

$$N(t) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{N^{5/3}(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty$$

to dla algorytmu (8)

$$\hat{\mu}_{N(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \text{ gdy } t \rightarrow \infty,$$

w/g prawdopodobieństwa, w każdym punkcie  $u \in (-\infty, \infty)$ , w którym gęstość  $f$  oraz nieliniowość  $m$  są różniczkowalne oraz  $f(u) > 0$ .

**Algorytm z falkami Daubechies.** Falki tworzą układ ortogonalny na całej prostej rzeczywistej [1]. Jednakże, ze względu na zwartość nośnika, mogą one znaleźć zastosowanie zarówno, gdy wejście systemu jest ograniczone jak i w przypadku gdy przedział  $\Delta$  jest nieskończony. Wykorzystujący je algorytm (1) ma następującą postać

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\sum_{|k|=0}^{N(t)} \hat{\alpha}_k \psi_k(u)}{\sum_{|k|=0}^{N(t)} \hat{\beta}_k \psi_k(u)} \quad (9)$$

gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\tau + \lambda) \psi_k(U(\tau)) d\tau$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{t} \int_0^t \psi_k(U(\tau)) d\tau$$

i gdzie

$$\psi_k(u) = \sum_{l=l_{\min}(u; k, p)}^{l_{\max}(u; k, p)} 2^{k/2} W^p(2^k u - l)$$

$W^p(u)$  oznacza falkę-matkę o numerze  $p$ . Granice sumowań wynoszą

$$l_{\min}(u; k, p) = \lfloor 2^k u \rfloor - p + 1$$

$$l_{\max}(u; k, p) = \lfloor 2^k u \rfloor + p - 1$$

**Algorytm z funkcjami skalującymi i falkami Daubechies.** Wykorzystując rozwinięcie funkcji w szereg funkcji falkowych zawierający również funkcje skalujące  $D^p(u)$  otrzymujemy odmianę algorytmu (9)

$$\hat{\mu}_N(u; t) = \frac{\sum_{k=M}^{N(t)} \hat{\alpha}_k \psi_k(u)}{\sum_{k=M}^{N(t)} \hat{\beta}_k \psi_k(u)} \quad (10)$$

ze współczynnikami  $\hat{\alpha}_k$  i  $\hat{\beta}_k$  zdefiniowanymi jak poprzednio, w której

$$\psi_M(u) = \sum_{n=n_{\min}(u; M, p)}^{n_{\max}(u; M, p)} 2^{M/2} D^p(2^M u - l)$$

z granicami sumowań

$$n_{\min}(u; M, p) = \lfloor 2^M u \rfloor - 2p + 2$$

$$n_{\max}(u; M, p) = \lfloor 2^M u \rfloor.$$

oraz

$$\psi_k(u) = \sum_{l=l_{\min}(u; k, p)}^{l_{\max}(u; k, p)} 2^{k/2} W^p(2^k u - l)$$

dla  $k > M$ .

Szeregi falkowe zbiegają do funkcji w punktach ich ciągłości (zob. [11]) oraz  $\max_{-\infty < u < \infty} |\psi_k(u)| \leq c 2^k$ , a zatem dla algorytmów (9) i (10) prawdziwy jest wniosek z Twierdzenia 1:

**Wniosek 5** Jeśli

$$N(t) \rightarrow \infty \text{ oraz } \frac{2^{N(t)}}{t} \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty$$

to

$$\hat{\mu}_{N(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \text{ gdy } t \rightarrow \infty,$$

w/g prawdopodobieństwa, dla dowolnego  $p$ , w każdym punkcie  $u \in (-\infty, \infty)$ , gdzie gęstość  $f$  oraz nieliniowość  $m$  są ciągłe oraz  $f(u) > 0$ .



#### 4.1. Algorytm jądrowy

Dla porównania przedstawiamy jądrowy algorytm identyfikacji, zaproponowany w pracy [3]:

$$\hat{u}_h(u; t) = \frac{\int_0^b Y(\tau + \lambda) K\left(\frac{u-U(\tau)}{h(t)}\right) d\tau}{\int_0^t K\left(\frac{u-U(\tau)}{h(t)}\right) d\tau} \quad (11)$$

gdzie  $h(t)$  jest pewną funkcją o wartościach dodatnich, spełniającą dwa wymagania

$$h(t) \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad th(t) \rightarrow \infty \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow \infty \quad (12)$$

a  $K$  jest pewną funkcją (jądrem) znikającą w nieskończoności

$$uK(u) \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad |u| \rightarrow \infty \quad (13)$$

W pracy tej udowodniono, że:

**Twierdzenie 2** Jeśli dla  $h(t)$  spełnione są warunki w (12) i dla  $K$  warunki w (13), to wówczas

$$\hat{\mu}_{h(t)}(u; t) \rightarrow \mu(u) \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow \infty,$$

wg prawdopodobieństwa, we wszystkich punktach, w których  $f(u) > 0$  i w których  $m$  i  $f$  są ciągłe.

W szczególności zatem, algorytm (11) zbiega do nieliniowości  $\mu(u)$  w tych samych punktach, w których zbiegają do nich ortogonalne algorytmy falkowe (9) i (10).

#### 5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono zuniifikowane podejście do identyfikacji nieliniowości w ciągłym systemie Hammersteina oparte o szeregi funkcji ortogonalnych. Podano ogólne warunki zbieżności algorytmów ortogonalnych i pokazano, że mimo praktycznego braku informacji wstępnej o nieliniowości, zbieżność tych algorytmów zachodzi przy prostych do spełnienia warunkach, dotyczących doboru złożoności algorytmów względem czasu trwania pomiarów, zależnych jedynie od rodzaju zastosowanego układu funkcji. W ogólności stwierdzono, że algorytmy ortogonalne zbiegają we wszystkich punktach nieliniowej charakterystyki, w których zbiegają do niej zastosowane w nich szeregi ortogonalne. Przedstawiono przykłady algorytmów z szeregami Fouriera, Hermite'a, Laguerre'a, Legendre'a oraz z szeregami funkcji falkowych Daubechies.

Zwraca uwagę fakt, że warunki zbieżności są takie same jak uzyskane dla dyskretnego systemu Hammersteina; zob. [7].

#### ORTHOGONAL SERIES ALGORITHMS TO IDENTIFY CONTINUOUS-TIME HAMMERSTEIN SYSTEMS

**Abstract.** A unified approach to identification of the nonlinear characteristic in continuous-time Hammerstein systems by using orthogonal series expansion technique is proposed. The condition of convergence for the generic orthogonal algorithm are given. It is shown that the convergence holds in points of convergence of the employed orthogonal series and depends only on the proper selection of the algorithm complexity with respect to the measurements period. The exemplary algorithms based on Fourier, Hermite, Laguerre, Legendre polynomials and Daubechies wavelet series are presented.

#### Literatura

- [1] Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM Edition, Philadelphia, 1992.
- [2] Greblicki W., Nonparametric orthogonal series identification of Hammerstein systems. *International Journal of Systems Science*, 1989, Vol. 20, pp. 2355–2367.
- [3] Greblicki W., Continuous-time Hammerstein system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, Vol. 45, pp. 1232–1236.
- [4] Greblicki W., Pawlak M., Nonparametric identification of a cascade nonlinear time series system. *Signal Processing*, 1991, Vol. 22, pp. 61–75.
- [5] Greblicki W., Pawlak M., Nonparametric identification of a particular nonlinear time series system. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, Vol. 40, pp. 985–989.
- [6] Greblicki W., Pawlak M., Dynamic system identification with order statistics. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1994, Vol. 40, pp. 1474–1489.
- [7] Greblicki W., Śliwiński P., Orthogonal series algorithms to identify Hammerstein system. In *Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, Międzyzdroje, 2001, pp. 1009–1014.
- [8] Hasiewicz Z., Hammerstein system identification by the Haar multiresolution approximation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1999, Vol. 13, pp. 697–717.
- [9] Hasiewicz Z., Modular neural networks for nonlinearity recovering by the Haar approximation. *Neural Networks*, 2000, Vol. 13, pp. 1107–1133.
- [10] Hasiewicz Z., Non-parametric estimation of nonlinearity in a cascade time series system by multiscale approximation. *Signal Processing*, 2001, Vol. 81, pp. 791–807.