Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej
Nr 1 Politechniki Wrocławskiej Nr 1

Studia i Materiały Nr 1 1972

Włodzimierz GREBLICKI

Nowe warunki stochastycznej stabilności dyskretnych układów sterowania

W pracy formułuje się wystarczające warunki stabilności probabilistycznej dla dyskretnych systemów sterowania z przypadkowo zmiennymi parametrami. Rozpatruje się stabilność z prawdopodobieństwem 1 i stabilność wg średniej. Przedstawione warunki porównuje się z warunkami uzyskanymi przy zastosowaniu zasady odwzorowań zwężających. Uzyskane rezultaty zilustrowano przykładami.

WSTĘP

Dla układów sterowania o przypadkowo zmiennych parametrach istnieją różne sposoby otrzymywania wystarczających warunków stabilności. Z dziedziny układów dyskretnych, do których ograniczymy się w tej pracy, można wymienić metodę tzw. stochastycznych funkcji Lapunowa [5] czy też metodę kontrakcji [1], [2], [3]. Dla pewnej klasy układów ze sprzężeniem zwrotnym można także stosować kryteria częstotliwościowe [4], [8].

W tej pracy, stosując opis w przestrzeni stanów, podano kilka nowych kryteriów probabilistycznej stabilności dyskretnych układów sterowania, zarówno liniowych jak i nieliniowych, stacjonarnych i niestacjonarnych. Otrzymane wyniki porównano następnie z metodą kontrakcji oraz wykazano, że są one często bardziej skuteczne. Nie wymagają ponadto dokładnej znajomości ocenianego procesu, do ich stosowania wystarczy znać jedynie momenty pewnych zmiennych losowych, a nie całe rozkłady, jak ma to miejsce przy korzystaniu z zasady kontrakcji i metod funkcji Lapunowa. Na kilku przykładach pokazano także możliwości i sposoby stosowania przedstawionych kryteriów.

ZAŁOŻENIA I WPROWADZENIE

W pracy tej będziemy rozpatrywać nieliniowe, dyskretne układy sterowania opisywane w k-wymiarowej przestrzeni stanów E^k równaniem

$$x_{n+1} = A(z_n, x_n)x_n, \tag{1}$$

przy czym n jest numerem kolejnej chwili i $n = 0,1,2, \ldots$, $x \in E^k$ jest wektorem stanu, $z \in E^1$ wektorem parametrów układu, który będziemy nazywać zakłóceniem. Wektor z uwzględnia czynniki natury zewnętrznej, tzn. oddziaływanie środowiska na pracę układu, a także i wewnętrznej, tzn. parametrów konstrukcyjnych. $A(z,x)$ jest macierzą o elementach $a_{ij}(z,x)$, $ij = 1,\ldots,k$. Jedynym punktem równowagi jest początek układu współrzędnych, co oznacza, że tylko wektor $x = 0$ spełnia dla wszystkich $z \in E^1$ równanie

$$x = A(z,x).$$

Zmiany wektora z mają charakter przypadkowy. Załóżmy dalej, że wektor losowy z_n jest stochastycznie niezależny od $x_{n-1},\ldots,x_1$, x_0 dla każdego n. Oznacza to, że zakłócenie w chwili n jest niezależne od dotychczasowego zachowania się układu.

Przypomnimy teraz dwie powszechnie stosowane definicje probabilistycznej stabilności układu (1).

DEFINICJA 1.

Układ (1) jest stabilny według średniej r-go rzędu ($r \geqslant 1$), jeśli dla pewnej normy elementów przestrzeni E^k i wszystkich zmiennych losowych x_0 takich, że $E\|x_0\|^r < \infty$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} E\|x_n\|^r = 0. \tag{2}$$

DEFINICJA 2.

Układ (1) jest stabilny z prawdopodobieństwem 1 (będziemy pisać z p.1), jeśli dla pewnej normy elementów przestrzeni E^k i wszystkich zmiennych losowych x_0 takich, że $E\|x_0\| < \infty$ spełniona jest relacja

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 0\right\} = 1. \tag{3}$$

Jak wiadomo, przestrzenie metryczne otrzymywane przez różne unormowania przestrzeni wektorowej E^k są izometryczne, tzn. dla każdych dwóch norm $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ istnieją liczby $c_1, c_2 > 0$ takie, że nierówności

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1$$

są spełnione dla wszystkich $x \in E^k$ [6]. Stabilność w sensie powyższych definicji nie zależy zatem od sposobu unormowania przestrzeni E^k, czyli od wyboru normy w relacjach (2) i (3).

W pracy tej będziemy używać terminu stabilność układu sterowania, ale należy zaznaczyć, że otrzymane rezultaty można stosować do oceny zbieżności dowolnych procesów iteracyjnych, które dają się zapisać w postaci (1) i spełniają podane wyżej założenia.

Wprowadzimy na koniec jeszcze pewne oznaczenia. Macierz C o elementach c_{ij} $(i,j = 1,\dots,k)$ będziemy zapisywać w postaci

$$C \overset{df}{=} [c_{ij}].$$

C^+ będzie oznaczać macierz daną wzorem

$$C^+ \overset{df}{=} [|c_{ij}|] .$$

Współrzędne wektora x oznaczymy przez $x^{(i)}$ a x^+ zdefiniujemy jako wektor o współrzędnych $|x^{(i)}|$, $i = 1,\dots,k$. Dla dwóch macierzy $C \overset{df}{=} [c_{ij}]$ i $D \overset{df}{=} [d_{ij}]$ nierówność

$$C \geqslant D$$

będzie oznaczać, że $c_{ij} \geqslant d_{ij}$ dla wszystkich i oraz j.

STABILNOŚĆ Z PRAWDOPODOBIEŃSTWEM 1 I WEDŁUG ŚREDNIEJ 1. RZĘDU

WARUNEK TYPU KONTRAKCJI

Przedstawimy teraz wystarczający warunek stabilności z p.1 i według średniej 1. rzędu, który można uważać za pewne rozszerzenie zasady kontrakcji [2] na układy o przypadkowo zmiennych parametrach. Będziemy posługiwać się w nim normą wektora $x \in E^k$ daną wzorem

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{k} |x^{(i)}| \tag{4}$$

i odpowiadającą jej normą macierzy $C \overset{df}{=} [c_{ij}]$

$$\|C\| = \max_j \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| . \tag{5}$$

Oznaczmy jeszcze przez

$$F(x_{n+1}/x_n,\dots,x_0)$$

dystrybuantę zmiennej losowej x_{n+1} przy warunku, że znane są $x_n,\dots,x_0$.

Z równania (1) i z założenia o niezależności z_n i x_{n-1} wynika, że

$$F(x_{n+1}/x_n,x_{n-1}) = F\left[A(z_n,A(z_{n-1},x_{n-1})x_{n-1})A(z_{n-1},x_{n-1})x_{n-1}/A(z_{n-1},x_{n-1})x_{n-1},x_{n-1}\right] = F\left[A(z_n,A(z_{n-1},x_{n-1})x_{n-1})A(z_{n-1},x_{n-1})x_{n-1}/A(z_{n-1},x_{n-1})x_{n-1}\right] = F(x_{n+1}/x_n).$$

Zupełnie podobnie można wykazać, że

$$F(x_{n+1}/x_n,x_{n-1},x_{n-2}) = F(x_{n+1}/x_n)$$

oraz ogólnie

$$F(x_{n+1}/x_n,\ldots,x_0) = F(x_{n+1}/x_n).$$

Wynika stąd, że ciąg zmiennych losowych

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots$$

jest procesem Markowa. Własność tę będziemy wykorzystywać we wszystkich warunkach stabilności podanych w tej pracy.

TWIERDZENIE 1.

Jeśli dla pewnej liczby $\rho < 1$ oraz wszystkich n i x_n spełniona jest nierówność

$$\left\| E\left\{A^+(z_n,x_n)/z_n\right\}\right\| \leqslant \rho, \tag{6}$$

przy czym norma dana jest wzorem (5), to układ (1) jest stabilny z p. 1 i według średniej 1. rzędu.

Dowód

Zauważmy najpierw, że dla normy (4) słuszne są zależności

$$E\|x\| = E\|x^+\| = \|Ex^+\|$$

oraz

$$\|x\| \leqslant \|y\|$$

dla $x^+ \leqslant y^+$; $x,y \in E^k$. Stąd oraz z równania (1) wynika, że

$$E\left\{\|x_{n+1}\|/x_n\right\} = \left\|E\left\{x^+_{n+1}/x_n\right\}\right\| = \left\|E\left\{\left[A(z_n,x_n)x_n\right]^+/x_n\right\}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|E\left\{A^+(z_n,x_n)x^+_n/x_n\right\|\right. \leqslant \left\|E\left\{A^+(z_n,x_n)/x_n\right\}\right\| \, \|x_n\| .$$

Wykorzystując założenie (6) otrzymuje się ostatecznie

$$E\left\{\|x_{n+1}\|/x_n\right\} \leqslant \rho \|x_n\|.$$

Wynika stąd, że jeśli $E\|x_0\| < \infty$, to ciąg $\|x_0\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \dots$ jest półmartyngałem Markowa zbieżnym do zera z p.1 i według średniej 1. rzędu [7]. Układ jest zatem stabilny.

Przy wykorzystaniu wzoru (5) warunek (6) podany w twierdzeniu można zapisać w następującej postaci:

$$\max_j \sum_{i=1}^{k} E\left\{\left|a_{ij}(z_n,x_n)\right| / x_n\right\} \leqslant \rho . \tag{6a}$$

Zamiast z powyższej nierówności można korzystać też z następującej:

$$\max_j \sum_{i=1}^{k} \sqrt{E\left\{a_{ij}^2(z_n,x_n)/x_n\right\}} \leqslant \rho , \tag{7}$$

która jest wprawdzie ostrzejsza od poprzedniej *), ale często wygodniejsza do obliczeń.

Niekiedy przez zastosowanie liniowego przekształcenia $y = Px$ ($\det P \neq 0$), które wprowadza nowy wektor stanu y, można osłabić warunek (6). Łatwo jest sprawdzić, że równanie układu przyjmuje wtedy postać

$$y_{n+1} = PA(z_n, P^{-1}y_n)P^{-1}y_n .$$

Nierówność podana w twierdzeniu 1, sprowadza się do następującej:

$$\left\|E\left\{\left[PA(z_n,P^{-1}y_n)P^{-1}\right]^+ / y_n\right\}\right\| = \left\|E\left\{\left[PA(z_n,P^{-1}y_n)P^{-1}\right]^+ / P^{-1}y_n\right\}\right\| \leqslant \rho ,$$

tzn.

$$\left\|E\left\{\left[PA(z_n,x_n)P^{-1}\right]^+ / x_n\right\}\right\| \leqslant \rho .$$

Ciekawy rezultat otrzymuje się dla układu dwuwymiarowego ($k = 2$) przez zastosowanie transformacji

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Daje to nierówność podobną do (6), a mianowicie

$$\left\|E\left\{A^+(z_n,x_n)/x_n\right\}\right\| \leqslant \rho$$

z tym, że teraz

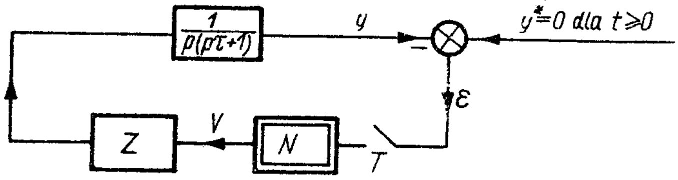
$$\left\|E\left\{A^+(z_n,x_n)/x_n\right\}\right\| = \max_i \sum_{j=1}^{2} E\left\{\left|a_{ij}(z_n,x_n)\right| / x_n\right\}$$

*) Wynika to z nierówności $E|\xi| \leqslant \sqrt{E\xi^2}$.

Możliwości stosowania podanego kryterium ilustruje niżej podany przykład.

PRZYKŁAD 1.

Rozpatrzmy impulsowy układ automatycznej regulacji o schemacie blokowym pokazanym na rys. 1. Charakterystyka $v = \varphi(\varepsilon)$ bezinercyj-



Rys.1. Schemat blokowy układu
Fig.1. Block diagram of the system

nego elementu nieliniowego spełnia dla wszystkich ε nierówności

$$m\varepsilon \leqslant \varphi(\varepsilon) \leqslant M\varepsilon \;, \quad m \geqslant 0.$$

Wzmocnienie statyczne

$$g(\varepsilon) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} & \text{dla } \varepsilon \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

zależy więc od sygnału wejściowego. Przypadkowo zmienne wzmocnienie z elementu proporcjonalnego jest realizacją stacjonarnego, białego szumu gaussowskiego o wartości oczekiwanej 1 i dyspersji 0,45. Okres impulsowania wynosi $T = 1{,}35$, a stała czasowa obiektu $\tau = 0{,}5$.

Układ będziemy nazywać absolutnie stabilnym (w odpowiednim sensie) względem sektora (m,M), jeżeli jest on stabilny dla każdego elementu nieliniowego o charakterystyce spełniającej nierówności

$$m(1-\rho) \leqslant g(\varepsilon) \leqslant M\rho \;,$$

przy czym ρ jest dowolną liczbą z przedziału $0 < \rho < 1$. Ostatnia nierówność oznacza, że charakterystyka elementu nieliniowego leży pomiędzy prostymi o nachyleniach m i M, ale nie posiada z nimi punktów wspólnych. Żadna z tych prostych nie jest także jej asymptotą.

Jak łatwo sprawdzić, dla wektora stanu

$$x_n = \begin{bmatrix} y(nT) \\ \dot{y}(nT) \end{bmatrix}$$

układ opisuje się równaniem

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - g_n z_n (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \,, & \tau (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \\ -g_n z_n \frac{1}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} \,, & e^{-\frac{T}{\tau}} \end{bmatrix} x_n$$

przy czym $g_n = g(-x_n^{(1)})$. Dla danych jak w przykładzie przyjmuje ono formę

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}9 g_n z_n & 0{,}45 \\ -0{,}2 g_n z_n & 0{,}1 \end{bmatrix} x_n .$$

Warunek (6a) sprowadza się teraz do nierówności

$$\max(E\,|1 - 0{,}9 g_n z_n| + 0{,}2 g_n\, E|z_n| ,\; 0{,}55) \leqslant \rho \,.$$

Z założenia o rozkładzie zakłóceń wynika, co łatwo sprawdzić, że wyrażenie stojące pod znakiem max jest dla $0 < g_n < 1{,}65$ mniejsze od 1. Na podstawie twierdzenia wnioskujemy więc o absolutnej stabilności układu względem sektora (0, 1,65).

Zastosowanie warunku (7) prowadzi natomiast do nierówności

$$\sqrt{E(1 - 0{,}9 g_n z_n)^2} + 0{,}2 g_n \sqrt{E z_n^2} \leqslant \rho \,, \tag{8}$$

która wyznacza sektor (0, 1,45). Rezultat ten potwierdza uwagę, że warunek (7) jest ostrzejszy od (6), ponieważ otrzymano z niego mniejszy sektor absolutnej stabilności. Jeżeli jednak charakterystyka elementu nieliniowego leży w sektorze (0, 1,45), to układ jest stabilny przy dowolnych, a nie tylko normalnych, rozkładach zakłóceń o wartości oczekiwanej 1 i dyspersji 0,45, bowiem nierówność (8) jest wtedy zawsze spełniona.

WARUNEK Z MAJORANTĄ

W przedstawionym poniżej warunku stabilności wykorzystano pewne własności macierzy majoryzującej. Należy tutaj zaznaczyć, że formułowano już kryteria dla układów deterministycznych, w których stosowano macierz majoryzującą [9].

TWIERDZENIE 2.

Jeżeli istnieje macierz S taka, że dla wszystkich n i x_n

$$E\left\{A^{+}(z_n,x_n)/x_n\right\} \leqslant S, \tag{9}$$

której wszystkie pierwiastki charakterystyczne λ_i spełniają nierówność

$$|\lambda_i| < 1, \tag{10}$$

to układ jest stabilny z p.1 i według średniej 1.rzędu

D o w ó d

Załóżmy, że istnieje macierz S spełniająca założenia. Wynika stąd, że

$$E\left\{x_{n+1}^{+}/x_n\right\} \leqslant E\left\{A^{+}(z_n,x_n)/x_n\right\}x_n^{+} \leqslant Sx_n^{+}.$$

Podobnie

$$E\left\{x_{n+2}^{+}/x_n\right\} = E\left\{E\left\{x_{n+2}^{+}/x_{n+1}\right\}/x_n\right\} \leqslant S^2x_n^{+} .$$

Ogólnie zatem

$$E\left\{x_{n+p}^{+}/x_n\right\} \leqslant S^p x_n^{+}. \tag{11}$$

Ponieważ pierwiastki charakterystyczne macierzy S leżą w kole jednostkowym, to elementy macierzy S^p dążą ze wzrostem p do zera. Istnieje zatem liczba N, dla której

$$S^N \leqslant \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2}, & \dots, & \frac{1}{k^2}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k^2}, & \dots, & \frac{1}{k^2} \end{bmatrix},$$

przy czym ρ jest pewną dodatnią liczbą mniejszą od 1. Stąd i z relacji (11) wynika, że dla każdego n

$$E\left\{x_{n+N}^{+}/x_n\right\} \leqslant S^N x_n^{+},$$

tzn.

$$E\left\{\left|x_{n+N}^{(i)}\right| /x_n\right\} \leqslant \rho \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k}\left|x_n^{(i)}\right|,$$

zatem

$$E\left\{\| x_{n+N}\|/x_n\right\} \leqslant \rho \| x_n \|, \tag{12}$$

przy czym norma dana jest wzorem (4). Jeśli zatem $E\|x_0\|<\infty$, to ciąg

$$\|x_0\|, \|x_N\|, \|x_{2N}\|, \dots$$

jest zbieżny do zera z p.1 i, według średniej, jest półmartyngałem Markowa [7].

Z nierówności (12) wynika dalej, że

$$E\|x_n\| = E\{E\{\|x_n\|/x_n\}\} = E\|E\{x_n^{+}/x_0\}\|\} \leqslant \|S^n\| E\|x_0\|,$$

skąd wnioskujemy, że również $E\|x_n\|<\infty$. Z nierówności tej i z relacji (12) wynika, że każdy z ciągów

$$\|x_p\|, \|x_{p+N}\|, \|x_{p+2N}\| \dots$$

$p = 0,1,2,\dots$ jest także zbieżny. Wynika stąd ostatecznie, że również

$$\|x_0\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \dots$$

jest ciągiem zbieżnym do zera z p.1 i według średniej 1.rzędu, co świadczy o stabilności układu.

Jest oczywiste, że jeśli dla pewnej normy zachodzi nierówność

$$\|S\| < 1,$$

to układ jest także stabilny.

Warunek podany w powyższym twierdzeniu można, podobnie jak i warunek (6), stosować w nieco zmodyfikowanej i ostrzejszej, ale jak widać z przykładu 1, niekiedy wygodniejszej postaci. Z nierówności

$$E\{A^{+}(z_n,x_n)/x_n\} \leqslant \left[\sqrt{E\{a_{ij}^2(z_n,x_n)/x_n\}}\right] \overset{df}{=} A_n(x_n)$$

i twierdzenia 2. wynika bowiem, że jeśli istnieje macierz R taka, że

$$A_n(x_n) \leqslant R, \tag{13}$$

której wszystkie pierwiastki charakterystyczne leżą w kole jednostkowym, to układ (1) jest także stabilny według średniej i z p.1.

Jest oczywiste, że z nierówności

$$\|R\| < 1$$

wynika także stabilność.

Dla liniowych układów stacjonarnych, tzn. dla układów opisywanych równaniem

$$x_{n+1} = A(z_n)\, x_n, \tag{14}$$

w którym zmienne losowe $z_0, z_1, z_2, \dots$ mają takie same rozkłady, warunek z twierdzenia 2 staje się bardzo prosty. Układ (14) jest stabilny, jeśli po prostu pierwiastki charakterystyczne λ_i macierzy

$$EA^+(z_n)$$

mają wartości bezwzględne mniejsze od 1. Prawdziwość tego stwierdzenia staje się oczywista, jeśli przyjąć

$$S = EA^+(z_n).$$

Załóżmy dodatkowo, że z_n jest stochastycznie niezależne jeszcze i od x_n. Dla układów takich można łatwo podać konieczny warunek stabilności według średniej. Z założeń o stacjonarności i niezależności otrzymujemy dla nich

$$Ex_{n+1} = EA(z_n)\,Ex_n\,.$$

Jeśli teraz przynajmniej jeden z pierwiastków charakterystycznych macierzy $EA(z_n)$ nie leży w kole jednostkowym, to

$$\lim_{n\to\infty} Ex_n \neq 0,$$

a zatem i

$$\lim_{n\to\infty} E\|x_n\| \neq 0\,.$$

Spełnienie nierówności $|\lambda_i| < 1$ jest więc koniecznym warunkiem stabilności.

Jeżeli natomiast wszystkie elementy macierzy $A(z_n)$ są nieujemne, tzn. jeżeli

$$A(z_n) = A^+(z_n),$$

to z powyższych rozważań wynika, że nierówność $|\lambda_i| < 1$ jest wtedy koniecznym i wystarczającym warunkiem stabilności według średniej 1. rzędu.

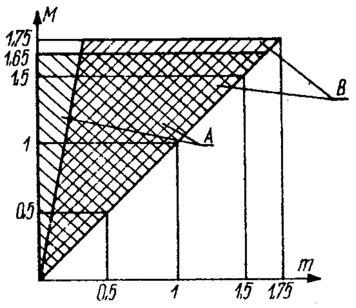
Otrzymane warunki zastosujemy teraz do analizy stabilności układu przedstawionego w przykładzie 1.

PRZYKŁAD 2.

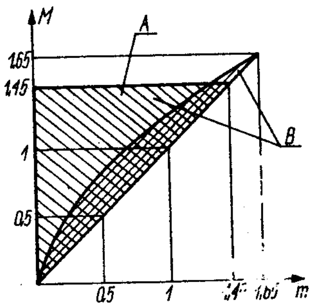
Rozpatrzmy powtórnie układ o danych jak w przykładzie 1., stosując warunek podany w twierdzeniu 2. Wynika z niego, że jeśli pierwiastki charakterystyczne macierzy

$$\begin{bmatrix} \max\limits_{m \le g_n \le M} E\left|1-0{,}9g_n z_n\right| & , & 0{,}45 \\ \max\limits_{m \le g_n \le M} 0{,}2g_n\, E\left|z_n\right| & , & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

mają wartości bezwzględne mniejsze od 1, to układ jest absolutnie stabilny względem sektora (m,M). Obliczenia, których tu nie będziemy przytaczać prowadzą do wyników przedstawionych na rys. 2. Jeśli punkt (m,M), charakteryzujący sektor, w którym leży charakterystyka elementu nieliniowego, znajduje się w obszarze oznaczonym literą B, to układ jest stabilny. Na rysunku zaznaczono także odpowiedni obszar A otrzymany w poprzednim przykładzie, przy stosowaniu warunku podanego w twierdzeniu 1.



Rys.2. Sektory stabilności absolutnej wyznaczone przez warunki (6) i (9)
Fig.2. Sectors of absolute stability given by condition (6) and (9)



Rys.3. Sektory stabilności absolutne wyznaczone przez warunki (7) i (13
Fig.3. Sektors of absolute stabilit given by condition (7) and (13)

Ze zmodyfikowanego warunku (13) wynika natomiast, że jeśli pierwiastki charakterystyczne macierzy R danej wzorem

$$A_n(x_n) = \begin{bmatrix} \sqrt{E(1-0,9g_n z_n)^2}, & 0,45 \\ 0,2g_n\sqrt{Ez_n^2}, & 0,1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \sqrt{1-1,8m+0,97M^2}, & 0,45 \\ 0,22M, & 0,1 \end{bmatrix} \overset{df}{=} R$$

leżą w kole jednostkowym, to układ jest także stabilny absolutnie względem sektora (m,M). Łatwo sprawdzić, że to zachodzi, gdy

$$M^2 + 0,23M - 1,9m < 0 \quad \text{i} \quad M \geqslant m.$$

Obszar, w którym spełnione są te nierówności zaznaczono na rys.3 literą B. Na tym samym rysunku wykreślono także obszar stabilności A, który otrzymano w przykładzie 1, stosując warunek (7). Warto dodać, że jeśli punkt (m,M) leży w obszarze A, lub B z rys. 3, to układ jest stabilny przy dowolnym zakłóceniu o wartości oczekiwanej 1 i dyspersji0,45. Przy stosowaniu kryteriów (7) i (13) nie wykorzystano bowiem założenia o normalnym rozkładzie zakłóceń.

WNIOSKI

Zajmiemy się teraz porównaniem kryteriów podanych w postaci twierdzeń 1. i 2. Dla ułatwienia załóżmy,że układ jest liniowy i stacjonarny, tzn. że opisuje się równaniem (14). Przyjmijmy jeszcze, że

$$EA^{+}(z_n) = S.$$

Warunek (6) sprowadza się teraz do postaci

$$\| S \| < 1 ,$$

natomiast warunek (9) wymaga, aby wszystkie pierwiastki charakterystyczne λ_i macierzy S leżały w kole jednostkowym. Z oczywistej nierówności

$$\max_i |\lambda_i| \leq \| S \|$$

wynika, że w rozważanym układzie warunek (6) jest ostrzejszy od warunku z majorantą (9). Dla układów liniowych należy zatem korzystać z twierdzenia 2. Dla układów nieliniowych uwaga ta nie musi być słuszna, co widać zresztą z porównania na rys. 2. obszarów stabilności otrzymanych w przykładach 1. i 2. Widać z nich, że kryterium (6) może być niekiedy bardziej efektywne. Powyższe uwagi dotyczą także warunków (7) i (13), co potwierdza rys. 3.

Interesujące jest także porównanie przedstawionych w pracy sposobów oceny stabilności z metodą kontrakcji,zarówno pod względem skuteczności, jak i stopnia znajomości procesu niezbędnego do ich stosowania oraz nakładu obliczeń. Metoda kontrakcji mówi, że jeśli dla pewnej normy i wszystkich n oraz x_n spełniona jest nierówność

$$E\left\{\|A(z_n,x_n)\| / x_n\right\} < \rho$$

przy czym ρ jest dowolną liczbą mniejszą od 1, to układ (1) jest stabilny z p.1 i według średniej 1.rzędu [1],[2]. Na bardzo prostym przykładzie układu o równaniu (14), gdzie

$$A(z_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z_n & 0 \end{bmatrix}$$

i z_n jest zakłóceniem o rozkładzie normalnym $N(0,1)$, spróbujemy ocenić trudności związane ze znalezieniem liczby

$$E\|A(z_n)\|,$$

co jest niezbędne przy stosowaniu zasady kontrakcji oraz ze znalezieniem macierzy

$$EA^+(z_n),$$

co jest z kolei konieczne przy korzystaniu z twierdzeń 1. i 2. Załóżmy przy tym, że norma macierzy dana jest wzorem (5). Otrzymujemy dla niej

$$\|A(z_n)\| = \max(|z_n|, 1).$$

Można obliczyć, że zmienna losowa $\max(|z_n|, 1)$ ma dystrybuantę

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 1 \\ 2\Phi(z)-1 & \text{dla } z \geqslant 1, \end{cases}$$

przy czym

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Po pewnych obliczeniach otrzymuje się

$$E\|A(z_n)\| = 1,32.$$

Znalezienie macierzy $EA^+(z_n)$ jest natomiast łatwe, bowiem z zależności $E|z_n| = 0,79$ otrzymujemy wprost

$$EA^+(z_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,79 & 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika stabilność według średniej i z p.1. Pierwiastki charakterystyczne tej macierzy są bowiem równe $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,89$.

Już z powyższego, bardzo prostego przykładu widać, że stosowanie twierdzeń podanych w pracy wymaga mniejszej ilości obliczeń w porównaniu z tymi, które należy przeprowadzić, korzystając z metody kontrakcji.

Zauważmy także, że metoda kontrakcji wymaga znajomości rozkładów wszystkich elementów macierzy $A(z_n,x_n)$, natomiast nierówności podane w twierdzeniach 1. i 2. można otrzymać znając jedynie momenty tych zmiennych losowych. Niekiedy nawet, przy stosowaniu zmodyfikowanych warunków (7) i (13), wystarczy, jak widać z przykładów, znać jedynie momenty Ez_n i Ez_n^2 zakłóceń.

Porównamy teraz omawiane kryteria pod względem skuteczności. Dla normy (5) prawdziwa jest równość

$$\| A^+(z_n, x_n) \| = \| A(z_n, x_n) \| .$$

Zatem

$$\| E\{A^+(z_n, x_n)/x_n\} \| \le E\{\| A^+(z_n, x_n)\| / x_n\} = E\{\| A(z_n, x_n)\| / x_n\} .$$

Wynika stąd, że warunki stabilności otrzymane za pomocą zasady kontrakcji są dla normy (5) zawsze ostrzejsze od tych, które wyznacza nierówność (6), a dla stacjonarnych układów liniowych także i od warunku podanego w twierdzeniu 2., co widać z nierówności (15).

STABILNOŚĆ WEDŁUG ŚREDNIEJ WYŻSZEGO RZĘDU

WPROWADZENIE

Podamy teraz dwa dalsze kryteria stabilności według średniej dowolnego rzędu i z p.1. Są one ostrzejsze od warunków podanych w poprzednim rozdziale; dlatego niecelowe jest korzystanie z nich przy ocenie stabilności z p.1. Należy je stosować jedynie do analizy stabilności według średniej.

W rozdziale tym będziemy posługiwać się normą wektora $x \in E^k$ zdefiniowaną w następujący sposób

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{k} |x^{(i)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} . \tag{17}$$

Oznaczmy jeszcze przez $B_n^{(r)}(x_n)$ macierz

$$B_n^{(r)}(x_n) \stackrel{df}{=} \left[E\left\{ \left| a_{ij}(z_n, x_n) \right|^r / x_n \right\} \right] . \tag{18}$$

WARUNEK TYPU KONTRAKCJI

Kryterium podane poniżej jest pewnym uogólnieniem twierdzenia podanego w poprzednim rozdziale.

TWIERDZENIE 3.

Jeżeli dla pewnej liczby $\rho < 1$ oraz wszystkich n i x spełniona jest nierówność

$$\left\| B_n^{(r)}(x_n) \right\| \leqslant \frac{1}{k^{r-1}} \rho , \tag{19}$$

przy czym norma dana jest wzorem (5), to układ (1) jest stabilny według średniej r-go rzędu i z p.1.

D o w ó d

Zauważmy, że dla r = 1 twierdzenie to sprowadza się do udowodnionego już twierdzenia 1. Załóżmy więc, że $r > 1$. Z równania (1) i nierówności Höldera dla szeregów otrzymuje się

$$\left| x_{n+1}^{(i)} \right|^r \leqslant \left[\sum_{j=1}^{k} \left| a_{ij}(z_n, x_n) x_n^{(j)} \right| \right]^r \leqslant k^{\frac{r}{s}} \sum_{j=1}^{k} \left| a_{ij}(z_n, x_n) x_n^{(j)} \right|^r =$$

$$= k^{r-1} \sum_{j=1}^{k} \left| a_{ij}(z_n, x_n) \right|^r \left| x_n^{(j)} \right|^r , \tag{20}$$

przy czym

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Zatem

$$E\left\{ \left| x_{n+1}^{(i)} \right|^r / x_n \right\} \leqslant k^{r-1} \sum_{j=1}^{k} E\left\{ \left| a_{ij}(z_n, x_n) \right|^r / x_n \right\} \left| x_n^{(j)} \right|^r .$$

Wynika stąd, że

$$E\left\{ \sum_{i=1}^{k} \left| x_{n+1}^{(i)} \right|^r / x_n \right\} \leqslant k^{r-1} \sum_{j=1}^{k} \left| x_n^{(j)} \right|^r \sum_{i=1}^{k} E\left\{ \left| a_{ij}(z_n, x_n) \right|^r / x_n \right\} \leqslant$$

$$\leqslant k^{r-1} \sum_{j=1}^{k} \left| x_n^{(j)} \right|^r \max_j \sum_{i=1}^{k} E\left\{ \left| a_{ij}(z_n, x_n) \right|^r / x_n \right\} ,$$

co można zapisać w postaci

$$E\left\{ \left\| x_{n+1} \right\|^r / x_n \right\} \leqslant k^{r-1} \left\| B_n^{(r)}(x_n) \right\| \left\| x_n \right\|^r ,$$

przy czym norma wektora dana jest wzorem (17), a norma macierzy wzorem (5). Na mocy założenia (19) otrzymujemy dalej

$$E\left\{ \left\| x_{n+1} \right\|^r / x_n \right\} \leqslant \rho \left\| x_n \right\|^r .$$

Jeśli zatem $E\left\| x_0 \right\|^r < \infty$, to ciąg

$$\left\| x_0 \right\|^r , \left\| x_1 \right\|^r , \left\| x_2 \right\|^r , \ldots$$

jest zbieżny do zera z p.1 i według średniej. Układ (1) jest stabilny, bowiem wynika stąd, że

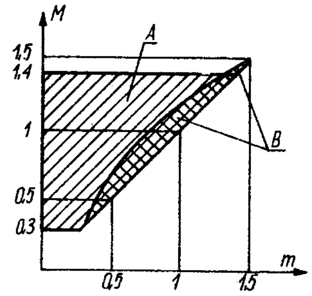
$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0\right\} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} E\|x_n\|^r = 0.$$

Dla ilustracji podanego warunku rozpatrzymy następujący przykład.

PRZYKŁAD 3.

Z twierdzenia 3. wynika, że układ przedstawiony w przykładzie 1. jest stabilny według średniej 2.rzędu i z p.1, jeśli norma (5) macierzy

$$B_n^{(2)}(x_n) = \begin{bmatrix} E(1-0,9g_nz_n)^2 & , & 0,45^2 \\ 0,2^2g_n^2Ez_n^2 & , & 0,1^2 \end{bmatrix}$$



Rys.4. Sektory stabilności absolutnej według średniej drugiego rzędu wyznaczone przez warunki (19) i (20)
Fig.4. Sectors of stability in square mean given by conditions (19) and (20)

jest mniejsza od 0,5. Łatwo jest sprawdzić, że zachodzi to dla

$$0,3(1-\rho) \leq g_n \leq 1,4\rho,$$

przy czym ρ jest dowolną liczbą z przedziału $0 < \rho < 1$. **Układ jest więc absolutnie stabilny względem sektora** $(0,3,\ 1,4)$.

Obszar wszystkich sektorów stabilności absolutnej wyznaczonych przez ostatnią nierówność pokazano na rys.4 i zaznaczono literą A.

Zauważmy na koniec, że w przykładzie tym skorzystano jedynie z założenia o znajomości momentów zakłóceń.

KRYTERIUM Z MAJORANTĄ

Warunek, który teraz podamy jest w zasadzie rozszerzeniem twierdzenia 2. na problem stabilności według średniej wyższego rzędu.

TWIERDZENIE 4.

Jeśli istnieje macierz Q taka, że dla wszystkich n i x_n

$$B_n^{(r)}(x_n) \leq Q, \tag{21}$$

gdzie macierz $B_n^{(r)}(x_n)$ dana jest wzorem (18), której wszystkie pierwiastki charakterystyczne μ_i spełniają nierówność

$$|\mu_i| < \frac{1}{k^{r-1}}, \tag{22}$$

to układ (1) jest stabilny według średniej r-go rzędu i z p.1.

D o w ó d

Ponieważ dla r = 1 twierdzenie to sprowadza się do twierdzenia 2., załóżmy dla dowodu, że $r>1$. Skorzystamy teraz z nierówności (20), którą otrzymaliśmy w dowodzie poprzedniego twierdzenia. Wynika z niej, że

$$E\left\{\begin{bmatrix} |x_{n+1}^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_{n+1}^{(k)}|^r \end{bmatrix} / x_n\right\} \leqslant k^{r-1} Q \begin{bmatrix} |x_n^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_n^{(k)}|^r \end{bmatrix}$$

Podobnie

$$E\left\{\begin{bmatrix} |x_{n+2}^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_{n+2}^{(k)}|^r \end{bmatrix} / x_n\right\} = E\left\{E\left\{\begin{bmatrix} |x_{n+2}^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_{n+2}^{(k)}|^r \end{bmatrix} / x_{n+1}\right\} / x_n\right\} \leqslant (k^{r-1} Q)^2 \begin{bmatrix} |x_n^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_n^{(k)}|^r \end{bmatrix}$$

Ogólnie zatem

$$E\left\{\begin{bmatrix} |x_{n+p}^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_{n+p}^{(k)}|^r \end{bmatrix} / x_n\right\} \leqslant (k^{r-1} Q)^p \begin{bmatrix} |x_n^{(1)}|^r \\ \vdots \\ |x_n^{(k)}|^r \end{bmatrix}$$

to znaczy

$$E\left\{\|x_{n+p}\|^r / x_n\right\} \leqslant \|(k^{r-1}Q)^p\| \, \|x_n\|^r, \tag{23}$$

przy czym norma wektora dana jest wzorem (17), a norma macierzy wzorem (5). Z założenia wynika, że wartości bezwzględne pierwiastków charakterystycznych macierzy $k^{r-1}Q$ są mniejsze od 1. Elementy macierzy $(k^{r-1}Q)^p$ dążą więc do zera przy wzrastaniu p. Istnieje więc liczba N taka, że

$$\|(k^{r-1}Q)^N\| \leqslant \rho < 1.$$

Zatem
$$E\left\{\|x_{n+N}\|^r / x_n\right\} \leqslant \rho \, \|x_n\|^r .$$
Jeśli teraz $E\|x_o\|^r < \infty$, to z nierówności (23) wynika, że
$$E\|x_n\|^r = E\left\{E\left\{\|x_n\|^r/x_o\right\}\right\} \leqslant \|(k^{r-1}Q)^n\| E\,\|x_o\|^r < \infty .$$
Z ostatnich trzech nierówności widać, że każdy z ciągów
$$\|x_n\|^r, \ \|x_{n+N}\|^r, \ \|x_{n+2N}\|^r, \ \ldots$$
$n = 0,1,2,\ldots,N-1$, jest półmartyngałem Markowa. Zatem i ciąg
$$\|x_o\|^r, \ \|x_1\|^r, \ \|x_2\|^r, \ \ldots$$
jest zbieżny do zera według średniej i z p.1. Oznacza to, że
$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0\right\} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} E\|x_n\|^r = 0,$$
co kończy dowód.

Jest oczywiste, że z nierówności
$$\|Q\| < \frac{1}{k^{r-1}}$$
wynika także stabilność w rozważanym powyżej sensie.

PRZYKŁAD 4.

Warunek podany w twierdzeniu 4. zastosujemy teraz do oceny stabilności według średniej 2.rzędu i z p.1 stale rozpatrywanego przez nas układu z przykładu 1. Mamy dla niego
$$B_n^{(2)}(x_n) = \begin{bmatrix} E(1-0{,}9g_n z_n)^2, & 0{,}45^2 \\ 0{,}2^2 g_n^2 E z_n^2 & , \ 0{,}1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1{,}8g_n + 0{,}97g_n^2 \ , & 0{,}2 \\ 0{,}06g_n^2 & , \ 0{,}01 \end{bmatrix}$$
$$\leqslant \begin{bmatrix} 1 - 1{,}8 + 0{,}97M^2, & 0{,}2 \\ 0{,}06M^2 & , \ 0{,}01 \end{bmatrix} \stackrel{df}{=} Q.$$

Obszar parametrów m i M, w którym wartości bezwzględne pierwiastków charakterystycznych macierzy Q są mniejsze od 0,5 jest ograniczony krzywymi
$$1{,}9M^2 + 3{,}6m + 1 < 0 \ , \quad M \geqslant m .$$
Na rysunku 4 zaznaczono go litera B.

Dodajmy, że w przykładzie tym, podobnie jak w poprzednim, nie skorzystano z założenia o normalnym rozkładzie zakłóceń, a wykorzystano jedynie znajomość ich momentów.

WNIOSKI

Porównamy teraz kryteria podane w twierdzeniach 3. i 4. Ograniczymy się przy tym do stacjonarnych układów liniowych (14). Macierz $B_n^{(r)}(x_n)$ nie zależy dla nich ani od n, ani od x_n. Oznaczmy ją przez

$$B_n^{(r)}(x_n) \overset{df}{=} B^{(r)} .$$

Z nierówności

$$\max_i |\mu_i| \le \| B^{(r)} \| ,$$

gdzie μ_i są pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $B^{(r)}$ wynika, że warunek z twierdzenia 4. jest w takim przypadku bardziej efektywny od podanego w twierdzeniu 3. Dla układów nieliniowych, jak widać z rysunku 4, warunek (19) może dawać jednak lepsze wyniki.

Korzystając z przedstawionych warunków stabilności należy znać jedynie momenty

$$E\left\{ |a_{ij}(z_n,x_n)|^r / x_n \right\},$$

a nie całe rozkłady zmiennych losowych $a_{ij}(z_n,x_n)$, jak ma to miejsce przy stosowaniu metody kontrakcji [1]. Z rozpatrzonych przykładów wynika, że niekiedy wystarczy nawet znać momenty zakłóceń.

ZAKOŃCZENIE

Z przeprowadzonych rozważań można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Warunki podane w pracy upraszczają znacznie obliczenia w porównaniu z zasadą kontrakcji.

2. Korzystanie z warunków przedstawionych w pracy nie wymaga tak dokładnej znajomości procesu, jak metoda kontrakcji. Dla stosowania twierdzeń 1.-4. wystarczy znać momenty $E\left\{ |a_{ij}(z_n,x_n)|^r / x_n \right\}$, a nie warunkowe rozkłady zmiennych losowych $a_{ij}(z_n,x_n)$, jak ma to miejsce przy zasadzie kontrakcji.

3. Warunek podany w twierdzeniu 1. jest zawsze bardziej skuteczny od metody kontrakcji (dla normy (5)), natomiast dla układów liniowych, stacjonarnych także i warunek z twierdzenia 2. jest bardziej efektywny.

LITERATURA

[1] B u b n i c k i Z., Warunki zbieżności procesów sterowania w układach dyskretnych o przypadkowo zmiennych parametrach,Prace IV KKA, Kraków 1967.

[2] B u b n i c k i Z., Zbieżność procesów automatycznej aproksymacji w układach dyskretnych, Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Automatyka V, 1966.

[3] B u b n i c k i Z., Probabilistyczna stabilność dyskretnych układów sterowania, Prace Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Monografie 1, 1969 (w druku).

[4] B u b n i c k i Z., Frequency condition for the stochastic stability of a class of discrete-time control systems, Electronics Letters, 4, 10, 1968.

[5] K u s h n e r H.J., On the stability of stochastic dynamical systems, Proc. of Nat. Acad. Sciences, January 1965.

[6] K r e j n S.G., Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1967.

[7] L o e v e M., Teoria verojatnosti, IIL, Moskwa 1962.

[8] L o r e n z J., Częstotliwościowe warunki stabilności probabilistycznej jednowymiarowych, dyskretnych układów sterowania. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 3, 1969.

[9] R o z e n v a s s e r E.N., Kriterij ustojčivosti nelinejnych diskretnych sistem, Avtomatika i Telemechanika, 12, 1966.

NEW CONDITIONS FOR THE STOCHASTIC STABILITY OF DISCRETE-TIME CONTROL SYSTEMS

This paper presents a number of sufficient conditions for the stochastic stability with probability 1 and in r-th order mean of nonlinear discrete-time control systems with randomly varying parameters. A comparison between the considered conditions and the contraction method is made. Examples on application are given.

НОВЫЕ УСЛОВИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВЛЕНИЯ

Формулируются достаточные условия стохастической устойчивости дискретных систем управления со случайно изменяющимися параметрами.Рассматривается устойчивость с вероятностью единица и в среднем. Представленные условия сравниваются с методом сжатых отображений. Приводятся примеры.