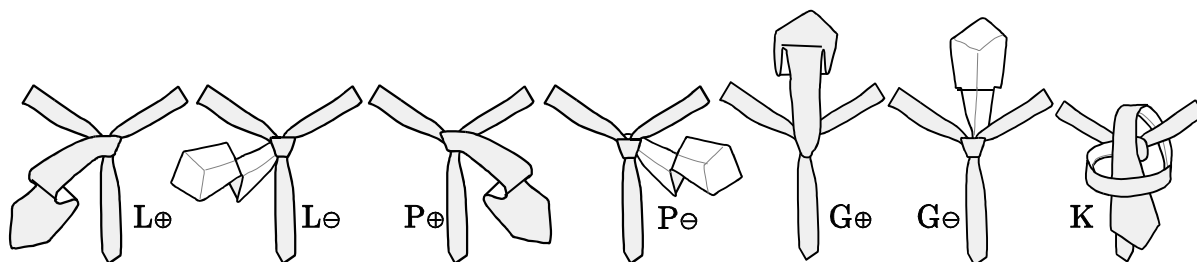


Teoria wiązania krawata

1. Węzeł jako sekwencja stanów

W procesie wiązania krawata można wyróżnić siedem stanów* oznaczonych symbolami: L_{\ominus} , L_{\oplus} , P_{\ominus} , P_{\oplus} , G_{\ominus} , G_{\oplus} oraz K; patrz rys. 1 (podobnie jak pozostałe pokazuje on to, co widzimy stojąc przed lustrem). Litery L, P, G, K odnoszą się do położenia szerszego końca krawata i oznaczają odpowiednio:

Lewo, Prawo, Góra i Koniec. Znak \oplus informuje, że wierzch krawata, czyli jego szerszego końca widoczny jest w lustrze. Znak \ominus mówi, że go nie widzimy, gdyż jest on zwrócony ku koszuli. Stan K jest końcowy, osiągnięcie go oznacza, że krawat został zawiązany.



Rys. 1: Stany charakterystyczne dla procesu wiązania krawata

Wiązanie polega na przechodzeniu pomiędzy stanami w odpowiedniej kolejności. Przejście pomiędzy dwoma stanami np. od L_{\ominus} do P_{\oplus} , co zapiszemy $L_{\ominus}P_{\oplus}$, nazywa się ruchem. Węzeł

równoważny jest zatem sekwencji stanów, przez które przechodzi krawat podczas wiązania, np. $L_{\oplus}P_{\ominus}G_{\oplus}L_{\ominus}P_{\oplus}G_{\ominus}K$, to półwindsor wiązany w sześciu ruchach.

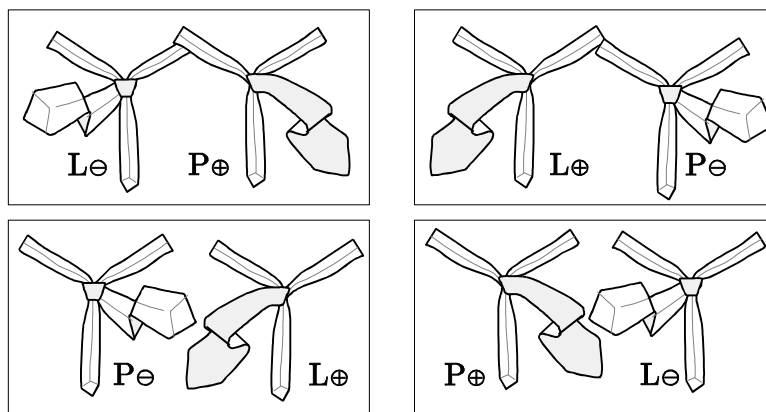
* T. Fink, Y. Mao, "Tie knots, random walks and topology", *Physica A*, 276, 109–121, 2000. T. Fink, Y. Mao, "Designing tie knots by random walk", *Nature*, 398, 31-32, 1999. Patrz także: T. Fink, Y. Mao, "85 sposobów wiązania krawata, czyli węzeł węzłowi nierówny", *Media Rodzina*, Poznań 2002.

2. Węzeł jako suma operacji

Przedstawimy teraz pojęcie operacji. Jest ich cztery, oznaczmy je jako $\frac{1}{2}O$, S, S* oraz W. Symbole te pochodzą od wyrazów: Obrót, Środek i Węzeł orientalny.

Operacja $\frac{1}{2}O$, czyli półobrót polega na wykonaniu

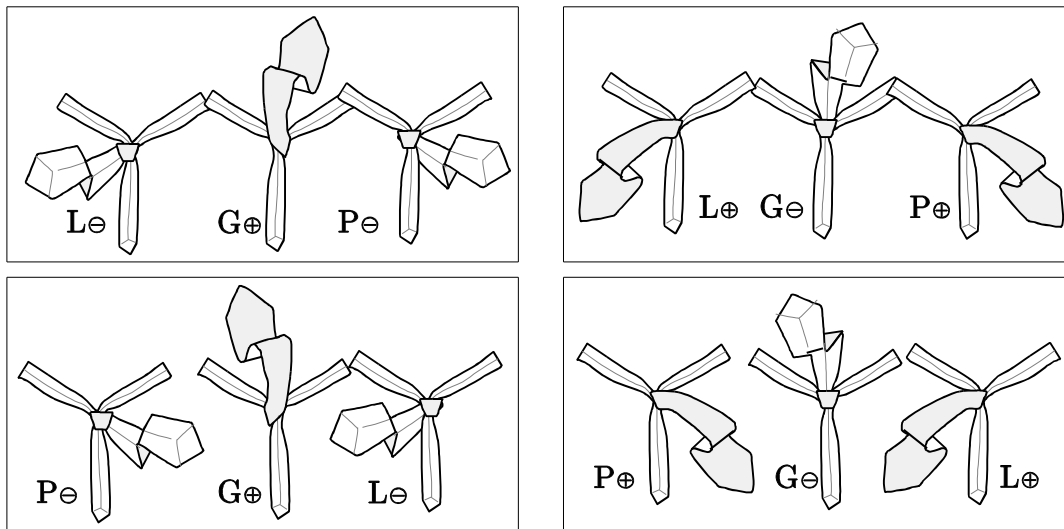
poziomego półobrotu wykonanego szerszym końcem krawata w jedną albo drugą stronę, tzn. z lewej na prawą lub z prawej na lewą. Wszystkie cztery półobrotu to, rys. 2: 1) $L_{\ominus}P_{\oplus}$, 2) $L_{\oplus}P_{\ominus}$, 3) $P_{\ominus}L_{\oplus}$, 4) $P_{\oplus}L_{\ominus}$.



Rys. 2: Operacje $\frac{1}{2}O$: $L_{\ominus}P_{\oplus}$, $L_{\oplus}P_{\ominus}$, $P_{\ominus}L_{\oplus}$, $P_{\oplus}L_{\ominus}$ (jeden ruch)

Operacja S, to także przełożenie szerszego końca krawata z jednego ramienia na drugi, ale nieco dłuższą drogą - w dwóch ruchach, patrz rys. 3. Krawat przechodzi bowiem przez pętlę pod brodą.

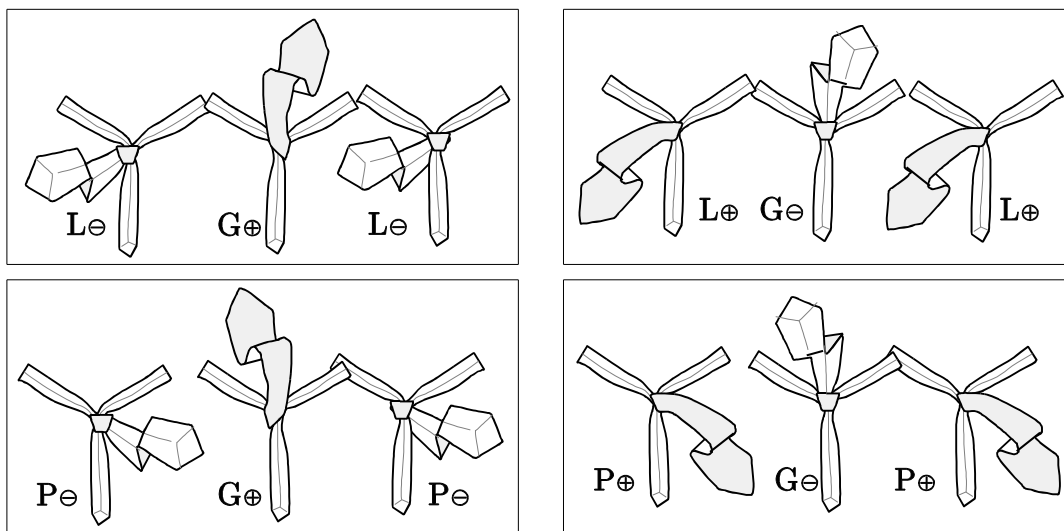
Można ją wykonać na cztery sposoby, a mianowicie: 1) $L\ominus G\oplus P\ominus$, 2) $L\oplus G\ominus P\oplus$, 3) $P\ominus G\oplus L\ominus$, 4) $P\oplus G\ominus L\oplus$.



Rys. 3: Operacje S: $L\ominus G\oplus P\ominus$, $L\oplus G\ominus P\oplus$, $P\ominus G\oplus L\ominus$, $P\oplus G\ominus L\oplus$
(2 ruchy)

Operacja S*, rys. 4, jest pewną modyfikacją operacji S. Zaczynamy w niej jak w S, lecz wracamy na to samo ramię. Operację tę można wykonać także

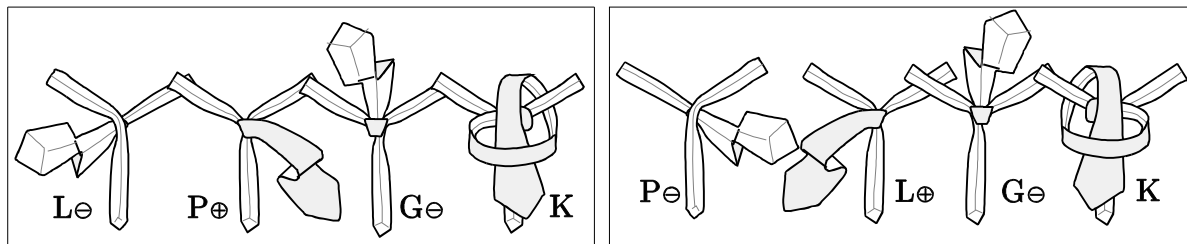
na cztery sposoby, a to: 1) $L\ominus G\oplus L\ominus$, 2) $L\oplus G\ominus L\oplus$, 3) $P\ominus G\oplus P\ominus$, 4) $P\oplus G\ominus P\oplus$.



Rys. 4: Operacja S*: $L\ominus G\oplus L\ominus$, $L\oplus G\ominus L\oplus$, $P\ominus G\oplus P\ominus$, $P\oplus G\ominus P\oplus$
(2 ruchy)

Operację W, rys. 5, (czyli samoistny węzeł orientalny) można wykonać na dwa sposoby,

a mianowicie: 1) $L\ominus P\oplus G\ominus K$ oraz 2) $P\ominus L\oplus G\ominus K$.



Rys. 5: Operacja W: $L\ominus P\oplus G\ominus K$, $P\ominus L\oplus G\ominus K$
(3 ruchy)

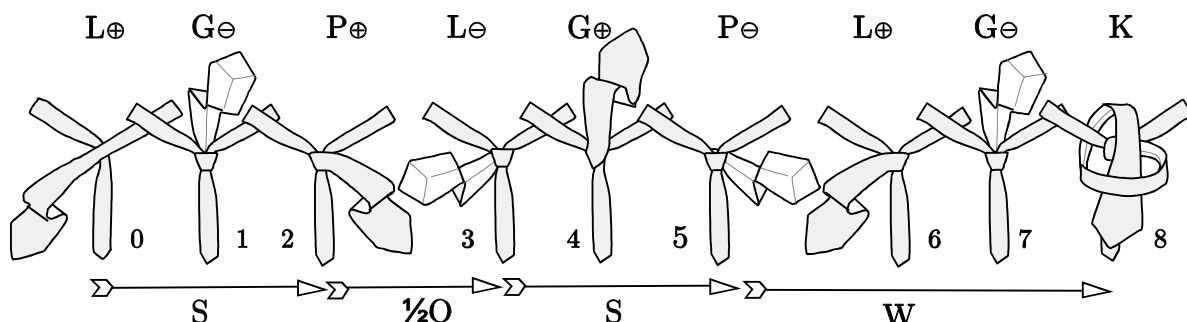
Operacja $\frac{1}{2}O$ zajmuje jeden ruch, S i S^* po dwa ruchy każda, natomiast W zużywa trzy.

Jeśli wykonamy bezpośrednio po sobie dwie operacje półobrotu w tę samą stronę, to całość tę zapiszemy jako $\frac{1}{2}O + \frac{1}{2}O$, co jest równoważne operacji O, czyli pełnemu obrotowi. Zatem np. $\frac{1}{2}O + \frac{1}{2}O = O$, natomiast $\frac{1}{2}O + \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}O = 1\frac{1}{2}O$. Podobnie możemy dodawać do siebie operacje S, co zapisujemy $S + S = 2S$, a także operacje S^* , co wyrazimy pisząc $S^* + S^* = 2S^*$. Przy różnych

operacjach kolejność wykonywania jest istotna, bowiem np. $\frac{1}{2}O + S \neq S + \frac{1}{2}O$. Podobnie $S + S^* \neq S^* + S$. Operacja W jest szczególna, gdyż w każdym węźle występuje tylko raz, jako ostatnia.

Węzeł jest sumą operacji, np. wspomniany już wcześniej windsor, rys. 6,

$L\oplus G\ominus P\ominus L\oplus G\oplus P\ominus L\oplus G\ominus K$
wiązany w 8 ruchach zapisujemy teraz jako
 $S + \frac{1}{2}O + S + W$.



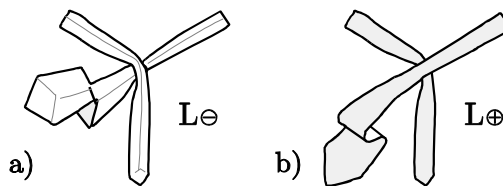
Rys. 6: Windsor, to $L\oplus G\ominus P\ominus L\oplus G\oplus P\ominus L\oplus G\ominus K$, czyli $S + \frac{1}{2}O + S + W$
(osiem ruchów)

3. Zasady obowiązujące przy wiązaniu

Przy wiązaniu krawata obowiązują trzy zasady:

- (1) zaczynamy układając krawat w ten sposób, rys. 7, że:
 - a) wierzch nie jest widoczny, co jest stanem $L\ominus$ (węzeł wiąże się następnie w nieparzystej liczbie ruchów),
 - b) wierzch jest widoczny, co jest stanem $L\oplus$ (liczba ruchów będzie parzysta),
 - (2) ruchy wykonujemy szerszym końcem, węższy pozostaje nieruchomy,
 - (3) węzeł kończy się operacją W.
- Dzięki zasadzie (2), węzeł możemy łatwo rozluźnić,

a następnie rozwiązać. Zasada (3) zapewnia, że to otrzymamy jest właśnie węzłem krawatowym. Pewne odstępstwo od niej ma miejsce w tzw. węzłach krzyżowych, § 6.



Rys. 7: Początek wiązania krawata.
Wierzch: a) niewidoczny, b) widoczny

$S^*+\frac{1}{2}O+S+W$, $S+\frac{1}{2}O+S^*+W$ oraz $S^*+\frac{1}{2}O+S^*+W$, który to węzeł jest być może najbardziej popularną wersją windsora. Rodziny, których główny przedstawiciel nie zawiera operacji S mają tylko jeden węzeł, np. rodzina nr 3, czyli kelvin.

L.p.	n	Węzeł	Nazwa
1	3	W	orientalny
2	5	S+W	nicky
		S^*+W	pratt
3	5	O+W	kelvin
4	7	2S+W	plattsburgh
5	7	S+O+W	
6	7	$\frac{1}{2}O+S+\frac{1}{2}O+W$	manhattan
7	7	O+S+W	św. Andrzej
8	7	2O+W	
9	9	3S+W	balthus
10	9	2S+O+W	
11	9	$S+\frac{1}{2}O+S+\frac{1}{2}O+W$	
12	9	S+O+S+W	
13	9	S+2O+W	
14	9	$\frac{1}{2}O+2S+\frac{1}{2}O+W$	
15	9	$\frac{1}{2}O+S+\frac{1}{2}O+S+W$	hanover
16	9	$\frac{1}{2}O+S+1\frac{1}{2}O+W$	
17	9	O+2S+W	
18	9	O+S+O+W	
19	9	$1\frac{1}{2}O+S+\frac{1}{2}O+W$	grantchester
20	9	2O+S+W	
21	9	3O+W	

L.p.	n	Węzeł	Nazwa
22	4	$\frac{1}{2}O+W$	prosty
23	6	$S+\frac{1}{2}O+W$	
24	6	$1\frac{1}{2}O+W$	victoria
25	6	$\frac{1}{2}O+S+W$	półwindsor
26	6	$2S+\frac{1}{2}O+W$	
27	8	$S+\frac{1}{2}O+S+W$	windsor
28	8	$S+1\frac{1}{2}O+W$	
29	8	$\frac{1}{2}O+2S+W$	
30	8	$\frac{1}{2}O+S+O+W$	christensen
31	8	$O+S+\frac{1}{2}O+W$	cavendish
32	8	$1\frac{1}{2}O+S+W$	
33	8	$2\frac{1}{2}O+W$	

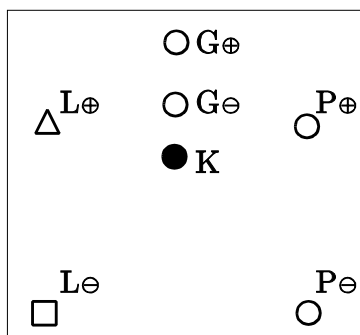
Dołączmy do naszych rozważań operację S^* . Oznaczając przez $W(n)$ liczbę wszystkich węzłów, które można teraz (tzn. przy pomocy operacji $\frac{1}{2}O$, S, W oraz dołączonej S^*) zawiązać w n ruchach, zauważamy, że

$$W(n+1) = 2W(n-1) + W(n).$$

Ponadto $W(3)=W(4)=1$. Zatem w 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 ruchach można zawiązać 1, 1, 3, 5, 11, 21 i 43 węzły. W liczbie ruchów nie większej niż 9 można więc ich zawiązać 85, ponieważ $1+1+3+5+11+21+43=85$. Liczba wszystkich węzłów, które można zawiązać w 10, 11 i 12 ruchach jest natomiast równa 85, 171 i 341. Narasta ona jeszcze szybciej niż liczba rodzin. Z tego też względu ograniczyliśmy się do 9 ruchów.

5. Węzeł jako trajektoria w przestrzeni stanów

Siedem stanów krawata można przedstawić graficznie jak na rys. 9.



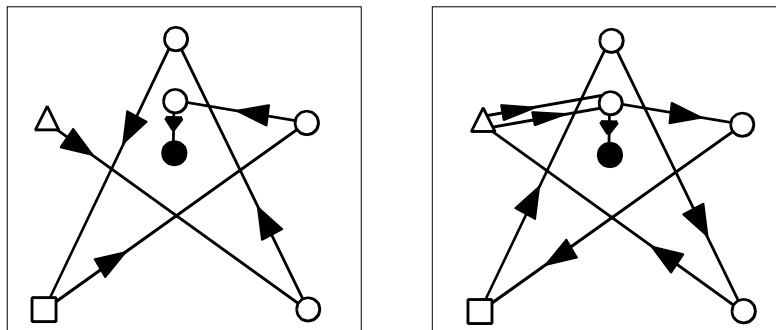
Rys. 9: Przestrzeń stanów
Każdy jest reprezentowany przez okrąg, trójkąt

lub kwadrat, przy którym znajduje odpowiedni symbol stanu. Tworzą one tzw. przestrzeń stanów. Jak już wiemy, wiązaniu krawata odpowiada przechodzenie on jednego stanu do drugiego. Ścieżka, która powstaje w ten sposób nazywa się trajekcją. Trajekcje węzłów zawiązywanych w parzystej liczbie ruchów zaczynają się w stanie L_{\oplus} zaznaczonym jako trójkąt, w nieparzystej w stanie L_{\ominus} zaznaczonym jako kwadrat. Wszystkie kończą się w stanie K zaznaczonym czarnym kołem.

Trajektorie odpowiadające półwindsorowi i windsorowi pokazano na rys. 10. Obie zaczynają się w stanie L_{\oplus} oznaczonym trójkątem. Zauważmy, że trajektoria półwindsora przechodzi przez wszystkie stany i przez każdy tylko jeden raz. Nie zawiera

jednak wszystkich możliwych połączeń pomiędzy stanami (brakuje połączenia pomiędzy $L\oplus$ i $G\ominus$). Odpowiadająca windsorowi także łączy wszystkie stany, a ponadto korzysta ze wszystkich możliwych połączeń pomiędzy stanami (zauważmy w tym

miejscu, że nie każde dwa stany można połączyć jednym ruchem, np. $L\oplus$ nie można połączyć z $P\oplus$). Pełna symetria jest w obu zakłócona przez jeden ruch, niejako brakujący lub nadmiarowy. Całkowicie symetryczny węzeł jednak nie istnieje.



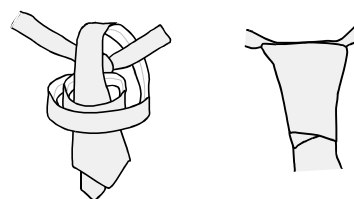
Rys. 10: Trajektorie półwindsora ($L\oplus P\ominus G\oplus L\ominus P\oplus G\ominus K$) i windsora ($L\ominus G\ominus P\oplus L\ominus G\oplus P\ominus L\ominus G\ominus K$)

6. Węzły krzyżowe

Zauważmy, że przy victorii, przed wykonaniem ostatniego ruchu utworzone zostały dwie pętle. Postępując standardowo szerszy koniec krawata przekładamy przez zewnętrzną. Modyfikacja polega na przełożeniu przez obie, rys. 11, co prowadzi do alberta. Generalnie, jest ona możliwa w węzłach, które kończą się sumą $O+W$, czyli także w kelwinie i christensenie. Modyfikacje takie nazywamy krzyżowymi.

W balthusie, w którym są trzy pętle, można wykonać ten manewr pod wszystkimi trzema

otrzymując w ten sposób węzeł zwany van wijk.



Rys. 11. Węzeł krzyżowy

7. Kilka ciekawostek

Ojczyzną krawata jest Chorwacja, stąd też nazwa tego akcesorium. Węzeł prosty nazywa się tam pojedynczym, a victorię podwójnym węzłem księcia Borna. Półwindsor to pojedynczy węzeł króla Tomisława, a windsor - podwójny.

Nazwy windsor i półwindsor pochodzą od księcia Windsoru, wcześniej Edwarda VIII, króla Anglii. Albert z kolei przypisywany jest księciu Albertowi, mężowi angielskiej królowej Wiktorii. Windsor nie był jednak podobno wcale ulubionym węzłem księcia Windsoru, a w czasach księcia Alberta węzeł noszący dziś jego imię nie był jeszcze znany.

W Anglii węzeł prosty, to *four-in-hand*. Nazwa ta wywodzi się od powozu zaprzęganego w cztery konie, czy też sposobu w jaki trzymano lejce w połowie XIX wieku, gdy zaczęto tak właśnie wiązać krawat.

We Francji węzeł orientalny nazywa się małym,

four-in-hand - prostym, a victoria jest podwójnym prostym. Nazwy windsor, rzecz jasna, tam nie uznają, nazywając go węzłem podwójnym.

Pratt, to nazwisko pewnego Amerykanina, który wynalazł stosowny węzeł, a który *New York Times* zaprezentował w 1989 roku. Inna jego nazwa, czyli shelby, pochodzi od nazwiska człowieka, który zaprezentował go w telewizji. Czasami nazywany jest on węzłem amerykańskim.

Nicky nazywają także *free american* choć niektórzy sądzą, że to pomysł włoski.

Mimo, że znany był wcześniej, christensen pochodzi od nazwiska szwedzkiej producentki krawatów, która go jedyne wylansowała w okresie międzywojennym.

Balthus natomiast, to wynalazek Balthasara Klossowskiego malarza z okresu międzywojennego.