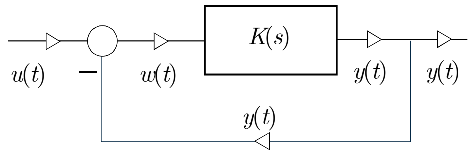
1 Sprzężenie zwrotne

Struktura jak na rys 1.1 nazywa się sprzężeniem zwrotnym. Ze względu na to, że $w(t) = u(t) - y(t)$, mówimy, że sprzężenie jest ujemne. Dla $w(t) = u(t) + y(t)$ sprzężenie byłoby dodatnie.

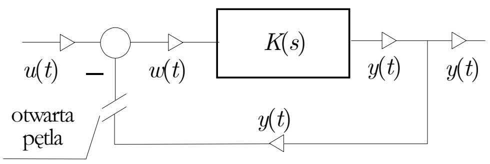


Rys. 1.1: System ze sprzężeniem zwrotnym.

O sytuacji jak na rys. 1.2, mówimy, że pętla sprzężenia zaostała otwarta. Sygnał wejściowy $u(t)$ pokonuje transmitancję $K(s)$ i na wyjściu pokazuje się sygnał $y(t)$. Zatem $K(s)$ jest transmitancją systemu otwartego. Przyjmujemy przy tym, że

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami.



Rys. 1.2: Otwarta pętla sprzężenia zwrotnego.

Aby wyznaczyć transmitancję

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

systemu zamkniętego, zauważamy, że

$$\begin{cases} Y(s) = & K(s)W(s) \\ W(s) = & U(s) - Y(s), \end{cases}$$

dzięki czemu

$$K_Z(s) = \frac{K(s)}{1+K(s)} = \frac{\frac{L(s)}{M(s)}}{1+\frac{L(s)}{M(s)}} = \frac{L(s)}{L(s)+M(s)}. \tag{1.1}$$

Zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją

$$K_Z(s) = \frac{L_Z(s)}{M_Z(s)},$$

skąd wynika

Własność 1.1 *Wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest*

$$M_Z(s) = L(s) + M(s).$$

Przykład 1.1 *Dla transmitancji systemu otwartego*

$$K(s) = \frac{5s+6}{s^3+2s^2+3s+4}$$

transmitancją układu zamkniętego jest

$$K_Z(s) = \frac{5s+6}{(s^3+2s^2+3s+4)+(5s+6)} = \frac{5s+6}{s^3+2s^2+8s+10}.$$

2 Stabilność

Stabilność systemu zamkniętego zależy od pierwiastków jego równania charakterystycznego

$$L(s) + M(s) = 0,$$

czyli biegunów jego transmitancji $K_Z(s)$. Jest on stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy leżą one w lewej półpłaszczyźnie. Aby stwierdzić, czy fakt ten ma miejsce można zastosować dowolne ze znanych nam kryteriów, czyli

- twierdzenie o znaku współczynników,
- kryterium Hurwitza,
- kryterium Michajłowa,

co pokażemy na przykładach.

Przykład 2.1 (znak współczynników) *System otwarty ma transmitancję*

$$K(s) = \frac{s-2}{(s+1)^3}.$$

Z Własności 1.1 wynika, że wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest

$$M_Z(s) = (s+1)^3 + (s-2) = s^3 + 3s^2 + 4s - 1.$$

Ponieważ jego współczynniki są różnych znaków, z twierdzenia o znaku współczynników wynika, że system zamknięty jest niestabilny.

Przykład 2.2 (Hurwitz) *Transmitacją układu otwartego jest*

$$K(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+3s+4}.$$

Wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego jest zatem

$$M_Z(s) = (s^3+2s^2+3s+4) + 1 = s^3 + 2s^2 + 3s + 5,$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [2].$$

System zamknięty stabilny, bowiem $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = 5 > 0$.

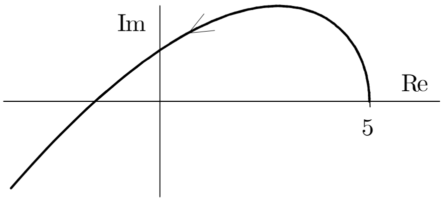
Przykład 2.3 (Michajłow) *Dla systemu jak w Przykładzie 2.2,*

$$M_Z(j\omega) = (-2\omega^2 + 5) + j(-\omega^3 + 3\omega).$$

Wykres Michajłowa pokazany jest na rys. 2.1. Ponieważ

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M_Z(j\omega) = 3\frac{\pi}{2},$$

system zamknięty jest stabilny.



Rys. 2.1: Wykres Michajłowa $M_Z(j\omega)$, Przykład 2.3.

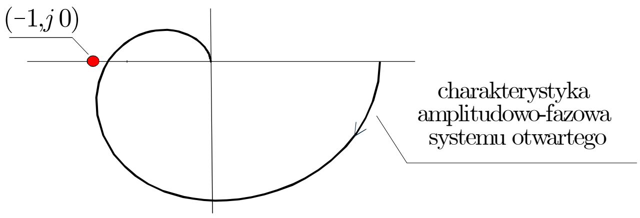
3 Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista, które teraz omówimy, zostało opracowane specjalnie dla systemu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Podamy je dla trzech odrębnych przypadków. W pierwszym system otwarty jest stabilny, w drugim oprócz stabilnych ma jeden biegun w punkcie $s = 0$, czyli ma charakter całkujący, w trzecim oprócz biegunów stabilnych ma bieguny niestabilne w prawej półpłaszczyźnie.

W kryterium tym sporządza się wykres Nyquista, rys. 3.1, na którym przedstawiona jest

- charakterystyka amlitudowo-fazowa systemu otwartego, czyli wykres funkcji $K(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$,
- oraz zaznaczony jest punkt $(-1, j0)$.

O stabilności układu zamkniętego wnioskuje się na podstawie usytuowania charakterystyki względem wspomnianego punktu.



Rys. 3.1: Przykładowy wykres Nyquista.

Przypominamy jeszcze, że $M(s) = a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0$ i zakładamy, że

$$a_m > 0 \text{ oraz } l < m, \tag{3.1}$$

gdzie l jest stopniem wielomianu $L(s)$.

W naszych rozważanich nawiązujemy do argumentacji stosowanej przy omawianiu kryterium Michajłowa[1]. W szczególności np. dla funkcji wymiernej $G(s)$,

$$\Delta \mathop{\arg}_{0\le\omega<\infty} G(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \arg G(j\omega) - \arg G(j0).$$

Jest oczywiste, że rozwiązania równań $L(s) + M(s) = 0$ (czyli bieguny transmitancji systemu zamkniętego) i $1 + K(s) = 0$ są identyczne, bowiem

$$1 + K(s) = 1 + \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s) + M(s)}{M(s)}. \tag{3.2}$$

Wynika stąd

Uwaga 3.1 *System zamknięty ma biegun na osi liczb urojonych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie równania*

$$1 + K(j\omega) = 0.$$

[1]patrz: 3. Stabilność. Kryteria, § 3.4. Kryterium Michajłowa.

Uwaga powyższa oznacza, że system zamknięty ma biegun na osi liczb urojonych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ω takie, że $K(j\omega) = -1$. W sytuacji takiej wykres Nyquista (charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego) przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Uwaga 3.2 *Załóżmy, że system zamknięty nie ma żadnego bieguna na osi liczb urojonych. System zamknięty nie ma ponadto żadnego bieguna w prawej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = m\frac{\pi}{2} - \Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M(j\omega).$$

Dowód. Na podstawie (3.2) możemy napisać, że

$$1 + K(j\omega) = \frac{L(j\omega) + M(j\omega)}{M(j\omega)},$$

a zatem

$$\begin{aligned}&\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)]\\ &= \Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M(j\omega).\end{aligned}$$

Z kryterium Michajłowa wynika, że system zamknięty nie ma bieguna w prawej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] = m\frac{\pi}{2},$$

a to dlatego ponieważ m jest stopniem wielomianu $L(s) + M(s)$ (z uwagi na założenie, że $l < m$, patrz (3.1)), co kończy dowód. □

3.1 System otwarty stabilny

Zakładamy teraz, że system otwarty jest stabilny. Z Uwag 3.1 i 3.2 wynika

Twierdzenie 3.1 *Załóżmy, że system otwarty jest stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są poniższe dwa warunki:*

$$1 + K(j\omega) \neq 0 \textit{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty), \tag{3.3}$$

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = 0. \tag{3.4}$$

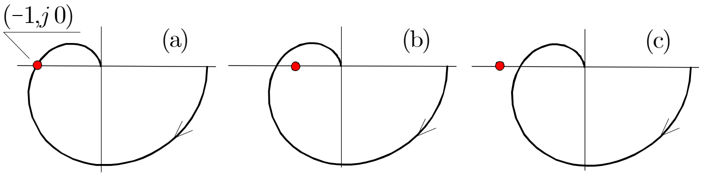
Dowód. Dzięki Uwadze 3.1, (3.3) jest równoważne temu, że system zamknięty nie ma bieguna na osi liczb urojonych. Założona stabilność systemu otwartego jest równoznaczna równości

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M(j\omega) = \frac{\pi}{2},$$

co, dzięki (3.4) i Uwadze 3.2, jest równoznaczne brakowi biegunów w prawej półpłaszczyźnie. Zatem (3.3) i (3.4) są łącznie równoważne stabilności. □

Kryterium polega na badaniu wykresu Nyquista, czyli wzajemnego usytuowania charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego i punktu $(-1, j0)$. Możliwe są trzy sytuacje przedstawione na rys. 3.2. Wykresy zaczynają się oczywiście w punkcie $K(0)$, przy czym dla każdego z nich $K(0) > 0$. Dla $K(0) < 0$ analiza i wnioski są podobne.

Zaczniemy od sytuacji (a), z którą powiązany jest warunek (3.3), a raczej jego negacja. Jej istotą jest bowiem to, że wykres Nyquista, czyli wykres $K(j\omega)$,



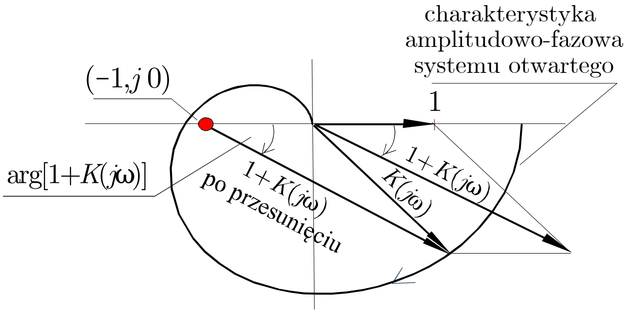
Rys. 3.2: Możliwe usytuowania charakterystyki amplitudowo-fazowej $K(j\omega)$ układu otwartego względem punktu $(-1, j0)$, $K(0) > 0$.

przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. System zamknięty jest więc niestabilny.

W sytuacjach (b) i (c) należy ustalić wartość $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)]$. Do (b) odnosi się bezpośrednio rys. 3.3. Zaznaczono na nim wektor $1 + K(j\omega)$ i ten sam wektor po przesunięciu równoległym w lewo o 1. Interesujący nas kąt $\arg_{0\le\omega<\infty}[1+K(j\omega)]$ nie ulega zmianie przy tym przesunięciu. Dzięki temu w sytuacji jak na rysunku łatwo ustalić, że

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi \neq 0,$$

co oznacza niestabilność.

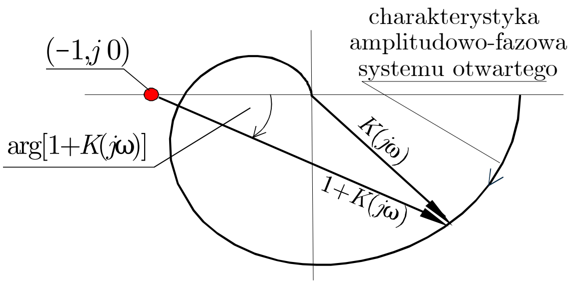


Rys. 3.3: Wykres Nyquista, $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi$. Zaznaczone kąty są takie same.

Sytuacji (c) natomiast odpowiada rys. 3.4, uproszczony w stosunku do rys. 3.3. Wektor zaznaczony jako $1+K(j\omega)$ jest bowiem *de facto* wektorem $1 + K(j\omega)$ dopiero po przesunięciu równolegle w lewo o 1. Ponieważ

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = 0,$$

zatem system jest stabilny.



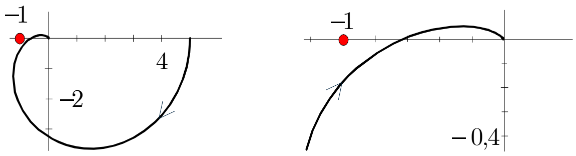
Rys. 3.4: Wykres Nyquista, $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = 0$.

Dzięki temu, w formie Wniosku, podamy teraz geometryczną wersję kryterium.

Wniosek 3.1 *Załóżmy, że system otwarty jest stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tyko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego*

- *ani nie przechodzi przez punkt* $(-1, j0)$
- *ani go nie obejmuje.*

Przykład 3.1 *System otwarty o transmitancji* $K(s) = 5/(s + 1)^3$ *jest oczywiście stabilny. Na rys. 3.5 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową oraz, w powiększeniu, jej fragment w pobliżu punktu* $(-1, j0)$. *Nie obejmuje ona punktu* $(-1, j0)$, $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}[1+K(j\omega)] = 0$, *system zamknięty jest stabilny.*

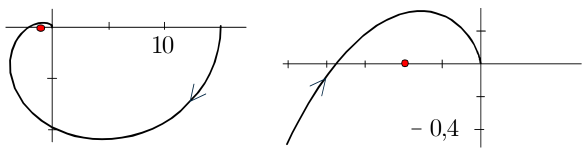


Rys. 3.5: Wykres Nyquista, (fragment w powiększeniu), Przykład 3.1, $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = 0$.

Przykład 3.2 *Niech teraz* $K(s) = 15/(s + 1)^3$. *Ponieważ*

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = -2\pi \neq 0,$$

rys. 3.6, system zamknięty nie jest więc stabilny.



Rys. 3.6: Wykres Nyquista, Przykład 3.2, $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = -2\pi$.

3.2 System otwarty ma element całkujący

Załóżmy teraz, że oprócz biegunów stabilnych, system otwarty ma jeden biegun, powiedzmy s_1, w punkcie 0. Oznacza to, że wielomian $M(s)$ ma jeden pierwiastek $s_1 = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Jest oczywiste, że system otwarty nie jest stabilny, zawiera on bowiem element całkujący.

Ponieważ

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}(s_1 - j\omega) = 0$$

i

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty}(s_i - j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

dla każdego pozostałego stabilnego bieguna s_i, zatem argumentując jak w dowodzie kryterium Michajłowa, otrzymujemy

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M(j\omega) = (m - 1)\frac{\pi}{2},$$

Z Lematów 3.1 i 3.2 wynika więc, że warunkiem stabilności systemu zamkniętego jest

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = m\frac{\pi}{2} - (m - 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

skąd wynika poniższa wersja kryterium Nyquista:

Twierdzenie 3.2 *Załóżmy, że system otwarty ma jeden biegun w punkcie* $s = 0$ *i pozostałe stabilne. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.3) i ponadto*

$$\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = \frac{\pi}{2}.$$

Geometryczna forma kryterium ma postać jak poniżej:

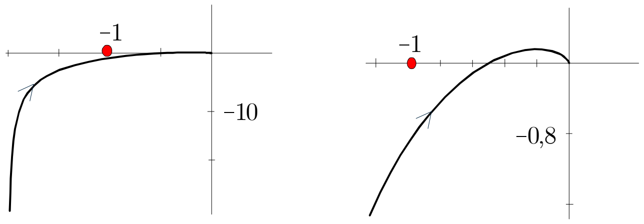
Wniosek 3.2 *Załóżmy, że system otwarty ma jeden biegun w punkcie $s = 0$ i pozostałe stabilne. System zamknięty jest stabilny wtedy i tyko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego*

- *ani nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$*
- *ani go nie obejmuje.*

Przykład 3.3 *Transmitancja systemu otwartego $K(s) = 1/s(s+1)^3$ ma jeden biegun w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Ponieważ z rys. 3.7 wynika, że*

$$\Delta \arg_{0<\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = \frac{\pi}{2}.$$

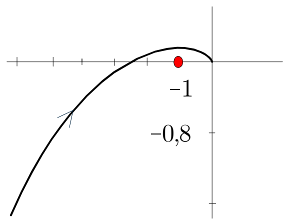
System zamknięty więc jest stabilny.



Rys. 3.7: Wykres Nyquista (fragment w powiększeniu), Przykład 3.3, $\Delta \arg_{0<\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = \pi/2$.

Przykład 3.4 *Niech $K(s) = 4/s(s+1)^3$. System zamknięty jest niestabilny, ponieważ z rys. 3.8 wynika, że*

$$\Delta \arg_{0<\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = \frac{3}{2}\pi \neq \frac{\pi}{2}.$$



Rys. 3.8: Przykład 3.4, $\Delta \arg_{0<\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = 3\pi/2$.

3.3 System otwarty ma bieguny w prawej półpłaszczyźnie

Podamy teraz kryterium w wersji dostosowanej do sytuacji, w której układ otwarty jest niestabilny, ma bieguny w prawej półpłaszczyżnie. Ich liczbę można ustalić stosując Twierdzenie Routha-Hurwitza.

Twierdzenie 3.3 *Załóżmy, że transmitancja $K(s)$ systemu otwartego ma m_+ biegunów w prawej, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko, gdy spełniony jest warunek (3.3) i ponadto*

$$\mathop{\Delta \arg}_{0<\omega<\infty} [1 + K(j\omega)] = m_+\pi.$$

Dowód. Wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego $M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie z wyjątkiem m_+ po prawej, skąd wynika

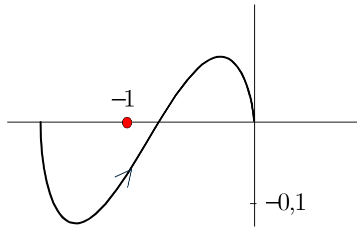
$$\mathop{\Delta \arg}_{0<\omega<\infty} M(j\omega) = (m - 2m_+)\frac{\pi}{2}.$$

Przywołanie Uwagi 3.2 kończy dowód. □

Przykład 3.5 *System otwarty o transmitancji*

$$K(s) = \frac{12}{(s+4)(s+2)(s-1)}$$

nie jest stabilny, gdyż ma ona biegun w prawej półpłaszczyźnie. Na rys. 3.9 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową. Wynika z niego, że $\Delta \arg_{0<\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = \pi$, skąd wyciągamy wniosek, że system zamknięty jest stabilny.



Rys. 3.9: Przykład 3.5, $\Delta \arg_{0<\omega<\infty}[1 + K(j\omega)] = \pi$.

4 Podsumowanie

Kryterium Nyquista służy do badania stabilności systemów z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. O stabilności decyduje położenie punktu $(-1, j0)$ względem charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego. Podaje ono warunek, który jest jednocześnie konieczny i wystarczający. Spełnienie warunku jest równoznaczne stabilności, brak spełnienia jest równoznaczny z niestabilnością.

Analityczna forma kryterium jest inna gdy system otwarty jest stabilny, inna gdy zawiera on element całkujący. Geometryczna wersja jest jednakowa w obu przypadkach, a mianowicie:

System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego

- *ani nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$*
- *ani go nie obejmuje.*

Jeśli transmitancja układu otwartego ma bieguny w prawej półpłaszczyźnie, to należy korzystać z postaci analitycznej kryterium.