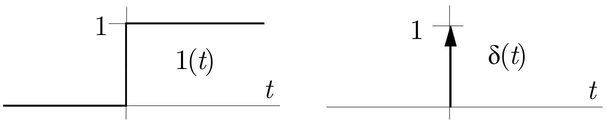
1 Sygnały

Przedmiotem naszego zainteresowania będą sygnały, czyli funkcje czasu oznaczonego symbolem t, określone na całej prostej. Przykładem jest skok jednostkowy $1(t)$, rys. 1.1, czyli funkcja zdefiniowana jak poniżej:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0 \\ 1, & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$



Rys. 1.1: Skok jednostkowy $1(t)$ i impuls Diraca $\delta(t)$.

Specyficznym i ważnym sygnałem jest $\delta(t)$, czyli tzw. impuls (delta) Diraca, patrz Uwaga 1.1, przedstawiony także na rys. 1.1. Sygnał ten nie jest klasycznie rozumianą funkcją, ma on bowiem własności jak poniżej:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty, & \text{dla } t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{1.1}$$

Ponadto, dla dowolnej funkcji $f(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0). \tag{1.2}$$

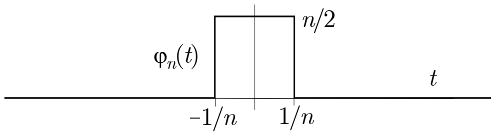
Dodajmy, że

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = 1(t)$$

oraz na mocy umowy, bowiem $1(t)$ nie ma klasycznie rozumianej pochodnej w punkcie $t = 0$,

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t).$$

Uwaga 1.1 *Impuls Diraca to specyficznie rozumiana granica ciągu funkcji $\varphi_n(t)$, patrz rys. 1.2, dla których $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)dt = 1$. Jego klasycznie rozumiana granica $\varphi(x)$*



Rys. 1.2: Funkcja $\varphi_n(t)$.

nie zachowuje tej własności, gdyż $\varphi(x) = 0$ dla $x \neq 0$, a zatem $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 0$. Impuls Diraca $\delta(t)$ można jednak uważać za swoiście rozumianą granicę, która tę własność zachowuje, bowiem $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$. Granica ta, czyli $\delta(t)$, nie jest bowiem funkcją, lecz tzw. dystrybucją. Na tej zasadzie, wyrażenie po lewej stronie w (1.2) jest równe

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t - t_0)f(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{t_0-1/n}^{t_0+1/n} f(t)dt \\ &= f(t_0). \end{aligned}$$

2 Transformacja Laplace'a

2.1 Definicja

Definicja 2.1 *Funkcję $F(s)$ zdefiniowaną wzorem*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.1}$$

nazywa się transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$.

Transformata zależy tylko od $f(t)$ dla $t \geq 0$, nie zależy od $f(t)$ dla $t < 0$.

O ile $F(s)$ nazywa się transformatą, to $f(t)$ jej oryginałem. Operacja prowadząca od $f(t)$ do $F(s)$ nazywa się natomiast transformacją Laplace'a.

Często stosuje się zapisy skrócone: $F(s) \;\widehat{=}\; f(t)$, $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$ lub $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$. Zgodnie z ogólnie przyjętą konwencją transformata funkcji oznaczonej małą literą zapisywana jest literą wielką, np. $G(s) \;\widehat{=}\; g(t)$.

Na rzecz rozważań dotyczących transformacji Laplace'a przyjmujemy, że (porównaj z (1.1))

$$\int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Odwołując się bezpośrednio do definicji wyznaczymy teraz transformaty kilku funkcji.

Przykład 2.1 (impuls Diraca) *Na mocy definicji*

$$\delta(t) \;\widehat{=}\; 1,$$

bowiem

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1.$$

Przykład 2.2 (skok jednostkowy) *Aby wykazać, że*

$$1(t) \;\widehat{=}\; \frac{1}{s},$$

korzystamy z definicji i otrzymujemy

$$1(t) \;\widehat{=}\; \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s}.$$

Przykład 2.3 (funkcja wykładnicza) *Wykażemy, że*

$$e^{-at} \;\widehat{=}\; \frac{1}{s+a}.$$

Na mocy definicji, bowiem

$$e^{-at} \;\widehat{=}\; \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}.$$

Przykład 2.4 (sinusoida) *Sprawdzimy, że*

$$\sin\omega t \;\widehat{=}\; \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Zaczynamy od równości

$$\sin\omega t = -\frac{1}{2}j\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right),$$

którą można otrzymać odejmując stronami co poniżej

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\sin\omega t, \\ e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\sin\omega t. \end{aligned}$$

Korzystając następnie z Przykładu 2.3, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{\sin\omega t\} &= -\frac{1}{2}j\left(\mathfrak{L}\{e^{j\omega t}\} - \mathfrak{L}\{e^{-j\omega t}\}\right) \\ &= -\frac{1}{2}j\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Na podobnej zasadzie

$$\cos\omega t \mathrel{\widehat{=}} \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Przykład 2.5 *Relacja*

$$\sin(\omega t+\varphi) \mathrel{\widehat{=}} \frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$$

wynika z Przykładu 2.4 i równości $\sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$. *Podobnie*

$$\cos(\omega t+\varphi) \mathrel{\widehat{=}} \frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}.$$

Przykład 2.6 (opóźnienie o τ) *Jeśli $f(t) = 0$ dla $t < 0$, to*

$$f(t-\tau) \mathrel{\widehat{=}} e^{-s\tau}F(s),$$

ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt &= e^{-s\tau}\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt \\ &= e^{-s\tau}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = e^{-s\tau}F(s). \end{aligned}$$

Przykład 2.7 (splot) *Wykażemy teraz, że jeśli $f(t) = 0$ i $g(t) = 0$ dla $t < 0$, to*

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \mathrel{\widehat{=}} F(s)G(s).$$

Wyrażenie po lewej stronie nazywa się splotem funkcji $f(.)$ i $g(.)$. Jest ono równe $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, ponieważ $g(\tau) = 0$ dla $\tau \in (-\infty, 0]$ i $f(t-\tau) = 0$ dla $\tau \in [t,\infty)$. Jest ono ponadto równe 0 dla $t < 0$. Zatem jego transformatą jest

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right]g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = F(s)G(s). \end{aligned}$$

2.2 Własności

Przejdziemy teraz do omówienia własności transformacji. Jest ona operacją liniową, ponieważ

$$af(t) \pm bg(t) \mathrel{\widehat{=}} aF(s) \pm bG(s), \tag{2.2}$$

co wynika z tego, że polega ona całką. Ponadto, Ćwiczenia 2.1 i 2.2:

$$e^{-at}f(t) \mathrel{\widehat{=}} F(s+a), \tag{2.3}$$

$$tf(t) \mathrel{\widehat{=}} -\frac{d}{ds}F(s). \tag{2.4}$$

Dzięki (2.3) i (2.4) można łatwo wyznaczyć transformaty bardziej skomplikowanych funkcji, co czynimy w § 3.

Ćwiczenie 2.1 (mnożenie przez e^{-at}) *Aby wykazać (2.3) wystarczy skorzystać z definicji, bowiem*

$$e^{-at}f(t) \mathrel{\widehat{=}} \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a).$$

Ćwiczenie 2.2 (mnożenie przez t) *Relacja (2.4) dotycząca mnożenia przez t wynika z poniższego:*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}F(s) &= -\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right) \\ &= -\int_0^\infty f(t)\left(\frac{d}{ds}e^{-st}\right)dt \\ &= \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt \mathrel{\widehat{=}} tf(t). \end{aligned}$$

2.3 Transformaty pochodnej i całki

Przejdziemy teraz do transformat pochodnej i całki. Jeśli funkcja $f(.)$ jest ciągła w punkcie $t = 0$, to

$$f'(t) \mathrel{\widehat{=}} sF(s) - f(0), \tag{2.5}$$

patrz Ćwiczenie 2.3. Jeśli jednak funkcja ta nie jest ciągła w tym punkcie, jeśli $f(0_-) \neq f(0)$, gdzie $f(0_-)$ oznacza jej granicę lewostronną w punkcie $t = 0$, to obowiązuje reguła jak poniżej, patrz Ćwiczenie 2.4:

$$f'(t) \mathrel{\widehat{=}} sF(s) - f(0_-), \tag{2.6}$$

którą przyjmujemy jako podstawową, i która będzie nas obowiązywać. Mówimy, że wyraz $f(0_-)$ uwzględnia tzw. warunek początkowy.

Z (2.6) wynika (Ćwiczenie 2.5), że

$$f''(t) \mathrel{\widehat{=}} s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-). \tag{2.7}$$

Dla trzeciej pochodnej

$$f^{(3)}(t) \mathrel{\widehat{=}} s^3F(s) - s^2f(0_-) - sf'(0_-) - f''(0_-)$$

oraz, ogólnie,

$$f^{(n)}(t) \mathrel{\widehat{=}} s^nF(s) - P_{n-1}(s),$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_{n-1}(s) = s^{n-1}f(0_-) &+ s^{n-2}f^{(1)}(0_-) \\ &+ \cdots + sf^{(n-2)}(0_-) + f^{(n-1)}(0_-) \end{aligned}$$

jest wielomianem stopnia $n-1$. Gdy rząd pochodnej rośnie, wielomian warunku początkowego rozrasta się, jego stopień jest o 1 mniejszy od rzędu pochodnej.

Jeśli chodzi o transformatę całki, to (patrz Ćwiczenie 2.6)

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{s}F(s). \tag{2.8}$$

Z uwagi na (2.6) i (2.8), można powiedzieć, że różniczkowaniu w dziedzinie t odpowiada mnożenie w dziedzinie s (z dokładnością do warunku początkowego), natomiast całkowaniu odpowiada dzielenie przez s. Z tego też względu s nazywa się operatorem różniczkowania, a $1/s$ operatorem całkowania.

Ćwiczenie 2.3 (pochodna funkcji ciągłej) *Na mocy definicji*

$$f'(t) \mathrel{\widehat{=}} \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt.$$

Całkując przez części i przyjmując $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$, *stwierdzamy, że wyrażenie po prawej stronie jest równe*

$$\begin{aligned} & f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty f(t)\left(\frac{d}{dt}e^{-st}\right)dt \\ &= \left(\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(t)e^{-st}\big|_{t=0}\right) - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2.4 (pochodna dowolnej funkcji) *Skok jednostkowy nie jest ciagły w punkcie* $t = 0$ *i dlatego wzór (2.5) nie ma zastosowania, bowiem według niego, np.*

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0) = s\frac{1}{s} - 1 = 0,$$

co nie jest prawdą z tej racji, że

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = \mathfrak{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

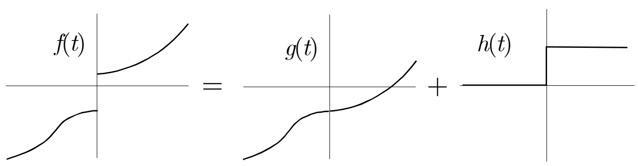
Według (2.6), zgodnie z prawdą,

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0_-) = s\frac{1}{s} - 0 = 1.$$

Jeśli natomiast funkcja $f(t)$, *podobnie jak skok jednostkowy, nie jest lewostronnie ciągła w punkcie* $t = 0$, *to można ją przedstawić w postaci* $g(t) + h(t)$, *gdzie*

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dla } t < 0 \\ f(t) - f(0_-), & \text{dla } t \geq 0, \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą, a $h(t) = (f(0) - f(0_-)) \times 1(t)$ *nieciągłą, rys. 2.1. Wobec* $g(t)$ *jako funkcji ciągłej mają więc zastosowanie obydwa wzory, tzn. (2.5) i (2.6), wobec* $f(t)$ *i* $h(t)$ *jedynie ten drugi.*



Rys. 2.1: Funkcja $f(t)$ jako suma funkcji ciągłej $g(t)$ i skoku $h(t)$.

Ćwiczenie 2.5 (pochodna drugiego rzędu) *W celu sprawdzenia (2.7), przepiszemy (2.6) w postaci*

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{g(t)\} - g(0_-),$$

skąd wynika, że

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}f'(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{f'(t)\} - f'(0_-),$$

które to wyrażenie jest równe

$$s\left[sF(s) - f(0_-)\right] - f'(0_-) = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-).$$

Ćwiczenie 2.6 (całka) *Wykazanie (2.8) nie jest trudne. Całkując bowiem przez części i zakładając, że* $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$, *otrzymujemy*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(t)d\tau\right\} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-st}dt \\ &= \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s}F(s). \end{aligned}$$

2.4 Twierdzenia graniczne

Twierdzenia graniczne podają związki pomiędzy $\lim_{t\to 0} f(t)$ i $\lim_{t\to\infty} f(t)$ czyli granicami funkcji w dziedzinie czasu, a jej transformatą $F(s)$.

Twierdzenie 2.1 *Jeśli granica* $\lim_{t\to 0} f(t)$ *istnieje, to*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

W powyższym twierdzeniu $\lim_{t\to 0} f(t)$ jest granicą prawostronną.

Twierdzenie 2.2 *Jeśli granica* $\lim_{t\to\infty} f(t)$ *istnieje, to*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

Założenie o tym, że granica w dziedzinie czasu istnieje jest istotne. Zauważmy bowiem np., że $\mathfrak{L}\{\sin(\omega t)\} = s/\left(s^2 + \omega^2\right)$, skąd wynika $\lim_{s\to 0} s\mathfrak{L}\{\sin\omega t\} = 0$. Nie upoważnia to jednak do wyciągnięcia wniosku, że granica $\lim_{t\to\infty} \sin\omega t$ jest równa zero.

3 Transformaty wybranych funkcji

Wykorzystując podane wcześniej własności (2.3) i (2.4), wyznaczymy teraz transformaty Laplace'a kilku ważnych funkcji.

Przykład 3.1 *Dzięki (2.4),*

$$\mathfrak{L}\{t\} = \mathfrak{L}\{t \times 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{1(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

Przykład 3.2 *Korzystając z (2.3), otrzymujemy*

$$\mathfrak{L}\{te^{-at}\} = \mathfrak{L}\{t\}|_{s=s+a} = \frac{1}{s^2}\bigg|_{s=s+a} = \frac{1}{(s+a)^2}.$$

Przykład 3.3 *Z (2.3) i Przykładu 2.4 wynika, że*

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t}\sin\omega t &\mathrel{\widehat{=}} \mathfrak{L}\{\sin\omega t\}|_{s=s+\sigma} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\bigg|_{s=s+\sigma} \\ &= \frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \end{aligned}$$

jak również

$$e^{-\sigma t}\cos\omega t \mathrel{\widehat{=}} \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}.$$

Przykład 3.4 *Z (2.4) i Przykładu 2.4 wynika*

$$t\sin\omega t \;\widehat{=}\; -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{\sin\omega t\} = -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

oraz

$$t\cos\omega t \;\widehat{=}\; \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

Przykład 3.5 *Korzystając z (2.3) i Przykładu 3.4, wnioskujemy, że*

$$te^{-\sigma t}\sin\omega t \;\widehat{=}\; \mathfrak{L}\{t\sin\omega t\}|_{s=s+\sigma} = \frac{2\omega(s+\sigma)}{((s+\sigma)^2+\omega^2)^2}$$

oraz

$$te^{-\sigma t}\cos\omega t \;\widehat{=}\; \frac{(s+\sigma)^2-\omega^2}{((s+\sigma)^2+\omega^2)^2}.$$

W przykładzie poniżej korzystamy z zasady liniowości (2.2).

Przykład 3.6 *Aby wyznaczyć transformatę funkcji* $2e^{3t}+\ 4e^{-5t}$*. korzystamy z (2.2), aby napisać*

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}\{\ 2e^{3t}+4e^{-5t}\} \\ = \;& 2\mathfrak{L}\{e^{3t}\}+4\mathfrak{L}\{e^{-5t}\} = 2\frac{1}{s-3}+4\frac{1}{s+5} \\ = \;& \frac{6s-2}{(s-3)\,(s+5)}. \end{aligned}$$

4 Rozkład na ułamki proste

Transformaty Laplace'a funkcji, które nas interesują mają postać

$$\frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami o stopniach l oraz m. Są to zatem funkcje wymierne. Omówimy teraz problem znalezienia ich oryginałów, czyli

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\}.$$

Istotny dla naszych rozważań jest mianownik

$$\begin{aligned} M(s) &= a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0 \\ &= a_m(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m), \end{aligned}$$

gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, s_m$ są jego pierwiastkami. Mogą być one rzeczywiste lub zespolone. Zespolone występują parami, każdemu zespolonemu towarzyszy bowiem drugi sprzeżony z nim. Zarówno pierwiastki rzeczywiste jak i pary zespolone mogą być pojedyncze lub wielokrotne. Istotne znaczenie ma dla nas

Własność 4.1 *Załóżmy, że wszystkie pierwiastki wielomianu $M(s)$ są jednokrotne. Jeśli*

• *$l<m$, to istnieją liczby A_1, A_2, …, A_m takie, że*

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_m}{s-s_m},$$

• *$l=m$, to istnieją liczby A_0, A_1, …, A_m takie, że*

$$\frac{L(s)}{M(s)} = A_0+\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_m}{s-s_m}.$$

W obydwu przypadkach równości zachodzą dla wszystkich $s\in(-\infty,\infty)$.

Dla $l<m$ zatem

$$\frac{L(s)}{M(s)} \;\widehat{=}\; A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_me^{s_mt},$$

dla $l=m$ natomiast

$$\frac{L(s)}{M(s)} \;\widehat{=}\; A_0\delta(t)+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_me^{s_mt}.$$

Uwaga 4.1 *W rozkładzie na ułamki proste, jeśli s_i jest rzeczywiste, to A_i jest rzeczywiste, jeśli zespolone, to A_i jest także zespolone, jeśli $s_1=\overline{s}_2$, to $A_1=\overline{A}_2$, np.*

$$\frac{s+3}{(s-2)(s-j)(s+j)} = \frac{1}{s-2}+\frac{-1+j}{2(s-j)}+\frac{-1-j}{2(s+j)}$$

Przykład 4.1 ($l<m$) *Przykładem rozkładu dla sytuacji $l<m$ jest*

$$\frac{2s+3}{(s+4)(s+5)} = \frac{A_1}{s+4}+\frac{A_2}{s+5}.$$

Przykład 4.2 ($l=m$) *Jako przykład rozkładu dla sytuacji $l=m=2$, może służyć*

$$\frac{s^2+s+1}{(2s+3)(5s+4)} = A_0+\frac{A_1}{2s+3}+\frac{A_2}{5s+4}.$$

Uwaga 4.2 ($l=m$) *Rozkład*

$$\frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2}$$

niezgodny z Własnością 4.1, nie jest poprawny, ponieważ

$$\frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2} = \frac{(a+b)s+(2a+b)}{(s+1)(s+2)},$$

skąd wynika, że wyrażenie w liczniku ułamka po prawej stronie nie jest wielomianem stopnia 2.

Dzięki Własności 4.1 funkcja wymierna $L(s)/M(s)$, której bieguny, czyli pierwiastki równania $M(s)=0$, są jednokrotne, została rozłożona na ułamki proste, czyli ułamki o postaci

$$\frac{1}{s-s_i}.$$

Jeśli natomiast bieguny te są wielokrotne, to rozkład wymaga modyfikacji, co pokazuje Przykład 4.8. Jedynym problemem jest zatem wyznaczenie współczynników omówionych rozkładów. Metody ich ustalania przedstawimy na przykładach.

Przykład 4.3 ($l<m$) *Na podstawie Własności 4.1 możemy napisać*

$$\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha}{s+2}+\frac{\beta}{s+3}.$$

Mnożąc obie strony przez $(s+2)(s+3)$, pozbywamy się ułamków i otrzymujemy

$$5s+11 = \alpha(s+3)+\beta(s+2), \tag{4.1}$$

czyli

$$5s+11 = (\alpha+\beta)s+(3\alpha+2\beta).$$

Porównanie współczynników przy jednakowych potęgach zmiennej s stojących po obu stronach równości prowadzi do układu równań

$$\left.\begin{array}{r}5=\alpha+\beta\\ 11=3\alpha+2\beta\end{array}\right\},\tag{4.2}$$

który rozwiązujemy, otrzymując $\alpha=1$ oraz $\beta=4$. Zatem

$$\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}+\frac{4}{s+3}\;\widehat{=}\;e^{-2t}+4e^{-3t}.$$

Przykład 4.4 *Zadanie jak w poprzednim przykładzie rozwiążemy w prostrzy sposób. Ponieważ funkcje po obu stronach (4.1) są identyczne, zatem w szczególności są sobie równe dla $s=-2$ i $s=-3$. Wartości te podstawiamy kolejno do obydwu stron i otrzymujemy w ten sposób $\alpha=1$, $\beta=4$. Dzięki tym podstawieniom uniknęliśmy rozwiązywania układu (4.2) dwóch równań o dwóch niewiadomych.*

Przykład 4.5 ($l=m$) *W tym przykładzie stopnie wielomianów w liczniku i mianowniku są jednakowe:*

$$\frac{s^2+s+1}{(s+3)(s+4)}=\beta_0+\frac{\beta_1}{s+3}+\frac{\beta_2}{s+4},$$

skąd wynika $s^2+s+1=\beta_0(s+3)(s+4)+\beta_1(s+4)+\beta_2(s+3)$. Podstawiając kolejno $s=-3$ oraz $s=-4$, znajdujemy $\beta_1=7$ oraz $\beta_2=-13$. Aby wyznaczyć β_0, można teraz podstawić np. $s=0$, skąd wynika, że $\beta_0=1$. Zatem oryginałem jest $\delta(t)+7e^{-3t}-13e^{-4t}$.

Przykład 4.6 (pierwiastki zespolone) *Wykażemy, że bieguny zespolone związane są z sygnałem periodycznym. Jeśli bowiem mianownik funkcji wymiernej ma parę takich pierwiastków, powiedzmy $s_1=\sigma+j\omega$ i $s_2=\overline{s}_1=\sigma-j\omega$, to w jej rozkładzie pojawia się wyrażenie*

$$G(s)=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2},\tag{4.3}$$

w którym A i B są liczbami zespolonymi, patrz Uwaga 4.1. Jest ono równe

$$\begin{aligned}&\frac{A}{(s-\sigma)-j\omega}+\frac{B}{(s-\sigma)+j\omega}\\ =\;&\frac{(A+B)(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}+j\frac{(A-B)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2},\end{aligned}$$

Ponieważ dla rzeczywistych s przyjmuje ono wartości rzeczywiste (jako transformata rzeczywistej funkcji czasu), zatem $j(A-B)$ jest liczbą rzeczywistą, skąd wynika, że $B=\overline{A}$. Oznaczając $A=-\alpha-j\beta$, dochodzimy w ten sposób do wniosku, że $B=-\alpha+j\beta$. Badane wyrażenie jest więc równe

$$\frac{2\beta\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}-\frac{2\alpha(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2},\tag{4.4}$$

czego oryginałem jest

$$\begin{aligned}&2e^{\sigma t}(\beta\sin\omega t-\alpha\cos\omega t)\\ =\;&2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\sigma t}\left[\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\omega t-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\omega t\right]\\ =\;&2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\sigma t}[\cos\varphi\sin\omega t-\sin\varphi\cos\omega t]\\ =\;&2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\sigma t}\sin(\omega t-\varphi),\end{aligned}$$

przy czym $\sin\varphi=\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. W rezultacie

$$g(t)=2|A|e^{\sigma t}\sin(\omega t-\varphi),$$

która to funkcja jest periodyczna. Z (4.4) wynika ponadto, że rozkładając funkcję na ułamki można, zamiast wyrażenia jak w (4.3), zastosować ułamek o postaci

$$\frac{as+b}{(s-s_1)(s-s_2)},$$

gdzie $a=-2\alpha$, $b=2\alpha\sigma+2\beta\omega$ są liczbami rzeczywistymi.

Przykład 4.7 (pierwiastki zespolone) *Nawiązując do Przykładu 4.6, możemy napisać*

$$\int_0^t g(\tau)d\tau=2|A|\int_0^t e^{\sigma\tau}\sin(\omega\tau-\varphi)d\tau,$$

gdzie całka po prawej stronie jest równa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sigma^2+\omega^2}(\omega\cos\varphi+\sigma\sin\varphi)\\ &-\frac{1}{\sigma^2+\omega^2}e^{\sigma t}(\omega\cos(\omega t-\varphi)-\sigma\sin(\omega t-\varphi)),\end{aligned}$$

która to wielkość jest z kolei równa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}[(\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)\\ &-e^{\sigma t}(\cos\psi\cos(\omega t-\varphi)-\sin\psi\sin(\omega t-\varphi))]\\ =\;&\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\left(\cos(\psi-\varphi)-e^{\sigma t}\cos(\omega t+\psi-\varphi)\right),\end{aligned}$$

przy czym $\sin\psi=\sigma/\sqrt{\sigma^2+\omega^2}$. Zatem

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}G(s)\;&\widehat{=}\;\int_0^t g(\tau)d\tau\\ =\;&\frac{2|A|\cos\phi}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\left(1-\frac{1}{\cos\phi}e^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)\right),\end{aligned}$$

gdzie $\phi=\psi-\varphi$.

Przykład 4.8 (pierwiastek wielokrotny) *Ponieważ jeden z pierwiastków mianownika w (4.5) jest dwukrotny, więc Własność 4.1 nie ma zastosowania. Rozkład na ułamki proste jest bowiem następujący:*

$$\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}.\tag{4.5}$$

Zatem

$$1=A(s-1)^2+Bs(s-1)+Cs.$$

Podstawiając $s=0$ i $s=1$, wyliczamy $A=1$ oraz $C=1$. Zatem $1=(s-1)^2+Bs(s-1)+s$, skąd wynika, że $B=-1$. Ostatecznie

$$\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Ponieważ

$$\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}=\frac{bs+c}{(s-1)^2},$$

gdzie $b=B$, $c=C-B$, zatem rozkład

$$\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta s+\gamma}{(s-1)^2}$$

jest także poprawny.

5 Równanie różniczkowe

Liniowe równanie różniczkowe rzędu n ma postać

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t),$$

gdzie $u(t)$ jest znaną funkcją, przy czym $t \in [0, \infty)$. Towarzyszy mu tzw. warunek początkowy, czyli zestaw n liczb

$$y^{(n-1)}(0_-), y^{(n-2)}(0_-), \ldots, y^{(1)}(0_-), y(0_-).$$

Korzystając z narzędzia jakim jest transformacja Laplace'a, możemy je rozwiązać, tzn. potrafimy wyznaczyć funkcję $y(t), t \in [0, \infty)$, która je spełnia.

Przykład 5.1 *Rozwiążemy teraz równanie różniczkowe pierwszego rzędu*

$$y'(t) + ay(t) = 0,$$

przy warunku początkowym $y(0_-)$. Dokonując przekształcenia Laplace'a wobec obydwu jego stron otrzymujemy

$$sY(s) - y(0_-) + aY(s) = 0,$$

patrz (2.6), skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{y(0_-)}{s+a}.$$

Zatem

$$y(t) = y(0_-)e^{-at}.$$

Przykład 5.2 *Równaniu różniczkowemu drugiego rzędu*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \delta(t)$$

towarzyszy warunek początkowy $y'(0_-), y(0_-)$. Ponieważ

$$\mathfrak{L}\{y(t)\} = Y(s), \quad \mathfrak{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0_-),$$

$$\mathfrak{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-),$$

patrz (2.6), (2.7) i Przykład 2.1, zatem dokonując transformacji Laplace'a wobec obydwu stron równania otrzymujemy

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)\right] + 3\left[sY(s) - y'(0_-)\right] + 2Y(s) = 1,$$

skąd wynika

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = [sy(0_-) + 4y'(0_-)] + 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sy(0_-) + 4y'(0_-) + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{sy(0_-) + 4y'(0_-) + 1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}, \end{aligned}$$

gdzie $a = 4y'(0_-) - y(0_-) + 1$, $b = -4y'(0_-) + 2y(0_-) - 1$. W rezultacie

$$y(t) = ae^{-t} + be^{-2t}.$$

Przykład 5.3 *Rozwiążemy teraz równanie*

$$y'' + y = 0,$$

przy warunku początkowym $y'(0_-), y(0_-)$. Stosując transformację Laplace'a, otrzymujemy

$$(s^2 + 1)Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) - y(0_-) = 0,$$

skąd wynika

$$Y(s) = \frac{As}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+1},$$

gdzie $A = y(0_-)$, $B = -y'(0_-) - y(0_-)$. Zatem

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos t + B\sin t \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin t\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\sin\varphi\cos t + \cos\varphi\sin t) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(t+\varphi), \end{aligned}$$

przy czym $\sin\varphi = A/\sqrt{A^2+B^2}$.

6 Tablica transformat

$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\sigma t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{-\sigma t}\cos\omega t$	$\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$te^{-\sigma t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(s+\sigma)}{\left((s+\sigma)^2+\omega^2\right)^2}$
$te^{-\sigma t}\cos\omega t$	$\frac{(s+\sigma)^2-\omega^2}{\left((s+\sigma)^2+\omega^2\right)^2}$