

Włodzimierz Greblicki

Podstawy automatyki



Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2006

Opiniodawca
Leszek RUTKOWSKI

Opracowanie redakcyjne i korekta
Dorota RAWA

Projekt okładki
Zofia i Dariusz GODLEWSCY

© Copyright by Włodzimierz Greblicki, Wrocław 2006

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
<http://www.pwr.wroc.pl/~oficwyd>
e-mail:oficwyd@pwr.wroc.pl

ISBN 83-7085-937-2

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 101/2006

Spis rzeczy

1. Wstęp	9
2. Opisy liniowych systemów dynamicznych	11
2.1. Wprowadzenie	11
2.2. Równanie różniczkowe	11
2.2.1. Liniowe równanie różniczkowe	11
2.2.2. Równanie liniowe jako rezultat linearyzacji	14
2.2.3. Proces, system, opis	16
2.3. Transmitancja	18
2.3.1. Definicja. Liniowość systemu	18
2.3.2. Transmitancja systemów złożonych	19
2.4. Odpowiedzi na standardowe pobudzenia	20
2.4.1. Odpowiedź impulsowa	20
2.4.2. Odpowiedź skokowa	22
2.4.3. Odpowiedzi systemu a bieguny transmitancji	25
2.5. Transmitancja widmowa	26
2.5.1. Definicja	27
2.5.2. Charakterystyki częstotliwościowe	27
2.6. Splot	29
2.7. Równanie fazowe	29
2.8. Związki między opisami	31
2.9. Uwagi końcowe	32
3. Człony dynamiczne	33
3.1. Człon proporcjonalny	33
3.2. Człony inercyjne	34
3.2.1. Człon inercyjny pierwszego rzędu	34
3.2.2. Człon inercyjny drugiego rzędu	35
3.2.3. Człony inercyjne wyższych rzędów	36
3.3. Człon oscylacyjny	37

3.4.	Człony całkujące	39
3.4.1.	Człon całkujący	39
3.4.2.	Człon całkujący z inercją	39
3.5.	Człony różniczkujące	41
3.5.1.	Człon różniczkujący	41
3.5.2.	Człon różniczkujący z inercją	41
3.6.	Przybliżone charakterystyki logarytmiczne	42
3.7.	Uwagi końcowe	45
4.	Stabilność	47
4.1.	Definicja	47
4.2.	Twierdzenie o stabilności	48
4.3.	Własności systemów stabilnych	52
4.3.1.	Odpowiedź impulsowa	52
4.3.2.	Odpowiedź skokowa	53
4.3.3.	Transmitancja widmowa	54
4.3.4.	Równanie fazowe	56
4.3.5.	Ograniczone wejście – ograniczone wyjście	58
4.4.	Własności systemów niestabilnych	59
5.	Kryteria stabilności	61
5.1.	Systemy o dowolnej strukturze	62
5.1.1.	Twierdzenie o znaku współczynników	62
5.1.2.	Kryterium Routha–Hurwitza	63
5.1.3.	Kryterium Hurwitza	66
5.1.4.	Kryterium Michajłowa	67
5.2.	Systemy ze sprzężeniem zwrotnym	72
5.2.1.	Wprowadzenie	72
5.2.2.	Kryterium Nyquista	74
6.	Równanie stanu	83
6.1.	Wprowadzenie	83
6.2.	System sterowalny	85
6.3.	System obserwowalny	88
6.4.	Struktura systemu	91
6.4.1.	Struktura a sterowalność	91
6.4.2.	Struktura a obserwowalność	93
6.4.3.	Pełna struktura systemu	95
6.5.	Równanie stanu, równanie różniczkowe, transmitancja	97
6.5.1.	Równanie stanu, równanie różniczkowe	97
6.5.2.	Dowody równoważności opisów	100
6.5.3.	Równanie różniczkowe, transmitancja	104
6.6.	Stabilność względem stanu	108

7. Regulacja automatyczna	111
7.1. Wstęp	111
7.2. Wymagania	113
7.2.1. Stabilność	113
7.2.2. Uchyb w stanie ustalonym	113
7.2.3. Szybkość regulacji	113
7.2.4. Podsumowanie	114
7.3. Regulacja statyczna, czyli P	114
7.3.1. Własności	114
7.3.2. Regulacja z obiektem inercyjnym	116
7.4. Regulacja astatyczna	118
7.4.1. Własności	118
7.4.2. Regulacja I	118
7.4.3. Regulacja PI	120
7.4.4. Regulacja PID	121
7.4.5. Porównanie regulacji P, PI oraz PID	122
7.5. Inne sygnały wartości zadanej	123
8. Sygnały losowe w systemach ciągłych	125
8.1. Wprowadzenie	125
8.2. System pobudzany białym szumem	126
8.3. System przy pobudzeniu skorelowanym	129
8.4. Regulacja w obecności sygnału losowego	130
8.4.1. Wartość zadana procesem stochastycznym	131
8.4.2. Zaszumiony sygnał wartości zadanej	132
9. Opisy systemów dyskretnych	135
9.1. Równanie różnicowe	135
9.2. Transmitancja	140
9.2.1. Definicja. Liniowość systemu	140
9.2.2. Systemy z opóźnieniem	141
9.2.3. Transmitancja systemów złożonych	141
9.3. Transmitancja widmowa	142
9.4. Odpowiedzi na standardowe pobudzenia	143
9.4.1. Odpowiedź impulsowa	143
9.4.2. Odpowiedź skokowa	146
9.5. Splot dyskretny	148
9.6. Równanie fazowe	148
9.7. System ciągle sterowany dyskretnie	149
9.7.1. Impulsator, ekstrapolator	149
9.7.2. Transmitancja	150
9.8. Związki między opisami	154

10. Stabilność systemów dyskretnych	155
10.1. Definicja	155
10.2. Twierdzenie o stabilności	156
10.3. Własności systemów stabilnych	158
10.3.1. Odpowiedź impulsowa i skokowa	159
10.3.2. Transmitancja widmowa	160
10.3.3. Równanie fazowe	161
10.3.4. Ograniczone wejście – ograniczone wyjście	162
10.4. Własności systemów niestabilnych	163
11. Kryteria stabilności systemów dyskretnych	165
11.1. Kryterium Schura–Cohna	165
11.2. Kryterium Jury’ego	171
11.3. Kryterium Michajłowa	172
11.4. Przekształcenie półpłaszczyzny w koło	175
11.5. Inne kryteria	180
11.6. System ze sprzężeniem zwrotnym, kryterium Nyquista	181
12. Równanie stanu systemu dyskretnego	187
12.1. Wprowadzenie	187
12.2. System sterowalny	188
12.2.1. System obserwowalny	189
12.3. Struktura systemu	190
12.3.1. Struktura a sterowalność	190
12.3.2. Struktura a obserwowalność	191
12.3.3. Pełna struktura systemu	192
12.4. Równanie stanu, równanie różnicowe, transmitancja	194
12.4.1. Równoważne równania stanu	194
12.4.2. Dowody równoważności opisów	195
12.4.3. Równanie różnicowe, transmitancja	198
12.5. Stabilność względem stanu	201
12.6. System ciągły sterowany dyskretnie	203
13. Dyskretna regulacja automatyczna	205
13.1. System automatycznej regulacji	205
13.2. Regulacja statyczna, czyli P	207
13.3. Regulacja astatyczna	207
13.3.1. Regulacja I	207
13.3.2. Regulacja PI	208
13.4. Regulacja z obiektem ciągłym	209
14. Sygnały losowe w systemach dyskretnych	213
14.1. Wprowadzenie	213
14.2. System pobudzany białym szumem	213

14.3. System przy pobudzeniu skorelowanym	215
14.4. Regulacja w obecności sygnału losowego	216
14.4.1. Wartość zadana procesem stochastycznym	216
14.4.2. Zaszumiony sygnał wartości zadanej	217
Dodatek A. Transformacja Laplace'a	219
A.1. Skok jednostkowy i impuls Diraca	219
A.2. Definicja i własności	222
A.2.1. Definicja	222
A.2.2. Podstawowe własności	223
A.2.3. Transformata pochodnej	224
A.3. Transformaty wybranych funkcji	225
A.4. Rozkład na ułamki proste, funkcja oryginalna	228
A.4.1. Rozkład na ułamki proste	228
A.4.2. Twierdzenia o funkcji oryginalnej	232
A.5. Własności graniczne	236
A.6. Równanie różniczkowe	238
A.7. Transformacja Fouriera	240
Dodatek B. Transformacja \mathcal{Z}	243
B.1. Definicja i własności	243
B.1.1. Definicja	243
B.1.2. Transformaty wybranych ciągów	245
B.2. Oryginały funkcji wymiernych	247
B.3. Własności graniczne	250
B.4. Dyskretna transformacja Fouriera	251
B.5. Równanie różnicowe	252
B.6. Transformacja \mathcal{Z} a transformacja Laplace'a	255
Dodatek C. Wektory, macierze, funkcje macierzowe	257
C.1. Wektory, macierze	257
C.2. Wektor własny, wartość własna	261
C.3. Macierze podobne, diagonalizacja	262
C.4. Wielomiany macierzowe	264
C.5. Macierz fazowa	265
C.6. Funkcja $e^{\mathbf{A}t}$	269
C.6.1. Definicja	269
C.6.2. Własności	270
C.7. Ciąg \mathbf{A}^n	273
Dodatek D. Sterowalność, obserwowalność	275
D.1. Systemy ciągłe	275
D.1.1. Sterowalność	275
D.1.2. Obserwowalność	277

D.2. Systemy dyskretne	279
D.2.1. Sterowalność	279
D.2.2. Obserwowalność	280
Dodatek E. Procesy stochastyczne drugiego rzędu	281
E.1. Procesy z czasem ciągłym	281
E.1.1. Funkcja korelacji, gęstość widmowa	281
E.1.2. Biały szum	283
E.1.3. Całka i pochodna procesu	283
E.2. Procesy z czasem dyskretnym	284
Dodatek F. Tablice transformat	287
F.1. Transformacja Laplace'a	287
F.2. Transformacja \mathcal{Z}	289
Bibliografia	291
Indeks	293

Rozdział 1

Wstęp

Podręcznik składa się z części zasadniczej, obszernych dodatków oraz tablic transformacji Laplace'a i \mathcal{Z} . Rozdziały 2–8 są poświęcone systemom ciągłym, natomiast 9–14 systemom z czasem dyskretnym. Przedstawiono w nich różne sposoby opisu własności liniowych systemów dynamicznych, a mianowicie: równanie różniczkowe i różnicowe, równanie fazowe, splot, transmitancję, transmitancję widmową oraz charakterystyki częstotliwościowe. Omówiono także odpowiedzi na standardowe wymuszenia: impuls Diraca, skok jednostkowy i sinusoidę. Dużo uwagi poświęcono stabilności, podano metody jej badania, czyli kryteria stabilności. Szczegółowo omówiono własności systemów stabilnych. Zaprezentowano systemy automatycznej regulacji, omówiono zadania im stawiane i sposoby ich realizacji. Przeprowadzono analizę stabilności takich systemów, poddano analizie ich reakcję na różne sygnały wymuszające. Zbadano także ich zachowanie, gdy działają na nie sygnały o charakterze losowym.

Z wyjątkiem rozdziałów 6 oraz 12 podręcznik rzadko odwołuje się do pojęć wektora i macierzy. Przy prezentacji równania stanu jest to jednak niezbędne i ze względów dydaktycznych omówiono je w osobnych rozdziałach.

Przed przystąpieniem do studiowania zasadniczych partii podręcznika warto zapoznać się z zamieszczonymi na końcu dodatkami. Dodatek A dotyczy transformacji Laplace'a, jej zastosowań i spraw pokrewnych. Podano w nim własności transformacji, które są wykorzystywane w zasadniczej części podręcznika. Wyznaczono także transformaty najczęściej spotykanych funkcji. Pokazano ponadto, w jaki sposób za jej pomocą rozwiązuje się liniowe równania różniczkowe. Przedstawiono wreszcie spokrewnioną z nią transformację Fouriera.

W dodatku B omówiono transformację \mathcal{Z} , która jest podstawowym narzędziem stosowanym w analizie systemów dyskretnych. Podano jej definicję i własności. Wyznaczono przydatne transformaty \mathcal{Z} ciągów liczbowych, czyli sygnałów dyskretnych. Pokazano, w jaki sposób transformację tę wykorzystuje się do rozwiązywania równań różnicowych. Wskazano ponadto na związki między transformacjami Laplace'a i \mathcal{Z} . Przedstawiono także rezultaty dotyczące dyskretnej transformacji Fouriera.

W dodatku C przedstawiono fakty dotyczące wektorów i macierzy, które niezbędne są dla zrozumienia treści podanych w rozdziałach 6 oraz 12 dotyczących równania stanu. Podobną rolę spełnia dodatek D, w którym omówiono pojęcia sterowalności i obserwowalności.

Dodatek E zawiera podstawowe informacje na temat procesów stochastycznych o czasie ciągłym, jak również dyskretnym. Są one przydatne przy analizie systemów, w których sygnały wymuszające mają charakter losowy.

Często podawane przykłady oraz ćwiczenia, którym towarzyszą liczne wykresy i rysunki, pełnią rolę wyjaśniającą i ilustracyjną, a także przekazują treści leżące obok zasadniczego nurtu rozważań. Przedstawione rezultaty mają pełne i dokładne uzasadnienie. Wyjątkami są jedynie algebraiczne kryteria stabilności oraz pojęcie całki średniokwadratowej procesu stochastycznego.

Autor ma przyjemność złożyć podziękowania Pani mgr Dorocie Rawie za wyrozumiałość i cierpliwość okazaną przy korekcie rękopisu.

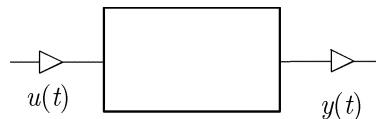
Rozdział 2

Opisy liniowych systemów dynamicznych

2.1. Wprowadzenie

System dynamiczny będziemy przedstawiać graficznie w postaci prostokąta jak na rys. 2.1. Mówimy, że ma on wejście u oraz wyjście y . Sygnały wejściowy $u(t)$ i wyjściowy $y(t)$ są funkcjami czasu, których dziedzina, czyli zakres zmienności argumentu t , może być różna, np. może być tak, że $t \in [0, \infty)$ lub $t \in (-\infty, \infty)$. System dynamiczny przekształca więc sygnał wejściowy $u(t)$ w wyjściowy $y(t)$, czyli jedną funkcję czasu w drugą.

Zachowanie się takich systemów można opisać różnymi sposobami, które kolejno omówimy w poniższym rozdziale. Zbadamy także związki między tymi opisami.



Rys. 2.1. System dynamiczny

2.2. Równanie różniczkowe

2.2.1. Liniowe równanie różniczkowe

Podstawowym dla nas opisem systemu dynamicznego jest następujące liniowe równanie różniczkowe:

$$a_m y^{(m)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_l u^{(l)}(t) + \dots + b_1^{(1)} u(t) + b_0 u(t), \quad (2.1)$$

przy czym $a_m \neq 0$, $b_l \neq 0$ oraz $t \in (-\infty, \infty)$. System, podobnie jak równanie, nazywa się liniowy. Mówimy, że m jest rzędem równania, czyli także systemu. Zestaw m liczb

$$y(0-), y^{(1)}(0-), \dots, y^{(m-1)}(0-)$$

tworzy tzw. warunek początkowy. W szczególności, jeśli

$$y(0-) = y^{(1)}(0-) = \dots = y^{(m-1)}(0-) = 0,$$

to mówimy, że jest on zerowy. Należy w tym miejscu wyjaśnić, że $y(0-)$ oznacza lewostronną granicę funkcji $y(t)$ w punkcie $t = 0$. Uwaga ta dotyczy także pozostałych składników warunku początkowego.

Jak wiadomo, dla każdego warunku początkowego i funkcji $u(t)$ odcinkami ciągłej na półprostej $[0, \infty)$, równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie dla $t \in [0, \infty)$. Zakładamy dodatkowo, że funkcja ta jest taka, że

$$u(0-) = u^{(1)}(0-) = \dots = u^{(l-1)}(0-) = 0. \quad (2.2)$$

Rozwiązanie to jest jednoznaczne także wtedy, gdy do takiego $u(t)$ dodany zostanie ponadto impuls Diraca lub jego pochodne. Sygnały takie będziemy nazywać wymuszeniami lub pobudzeniami.

Definicja 2.2.1. *Wymuszeniem, czyli pobudzeniem, nazywamy sygnał $u(t)$ określony na całej prostej $t \in (-\infty, \infty)$, będący sumą funkcji odcinkami ciągłej, impulsu Diraca i jego pochodnych, który spełnia warunek (2.2).*

Ustaliliśmy zatem, że rozwiązanie równania informuje w sposób jednoznaczny o tym, jaka, przy danym warunku początkowym, jest reakcja systemu na pobudzenie. Z tego względu, system będziemy utożsamiać z równaniem różniczkowym, jak również z innymi równoważnymi mu opisami, które poznamy później.

Wielomian

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.3)$$

nazywa się charakterystycznym, a $M(s) = 0$ równaniem charakterystycznym równania różniczkowego. Ma ono m rozwiązań:

$$s_1, s_2, \dots, s_m$$

nazywanych pierwiastkami charakterystycznymi. Są one rzeczywiste lub zespolone. Zespolone występują parami, w których jeden jest sprzężony względem drugiego, patrz lemat A.4.1. Pierwiastki rzeczywiste i pary sprzężonych pierwiastków zespolonych mogą być przy tym pojedyncze lub wielokrotne. Oznaczamy ponadto

$$L(s) = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (2.4)$$

i zakładamy dodatkowo, że $M(s)$ i $L(s)$ nie mają wspólnych pierwiastków, patrz uwagi w podrozdziale 2.8.

W celu wyznaczenia reakcji systemu na pobudzenie $u(t)$, tzn. w celu rozwiązania równania (2.1), dokonujemy obustronnego przekształcenia Laplace'a. Uwzględniamy przy tym warunek początkowy i regułę o transformacji pochodnej, tzn. bierzemy pod uwagę to, że:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{y^{(1)}(t)\} &= sY(s) - y(0-), \\ \mathfrak{L}\{y^{(2)}(t)\} &= s^2 Y(s) - sy(0-) - y^{(1)}(0-), \\ &\vdots \\ \mathfrak{L}\{y^{(m)}(t)\} &= s^m Y(s) - s^{m-1} y(0-) - \dots - y^{(m-1)}(0-). \end{aligned}$$

Pamiętamy także, że ze względu na (2.2), $\mathfrak{L}\{u^{(1)}(t)\} = sU(s)$, \dots , $\mathfrak{L}\{u^{(l)}(t)\} = s^l U(s)$. Nie trzeba przy tym wyjaśniać, że $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$ oraz $U(s) = \mathfrak{L}\{u(t)\}$. Zatem

$$M(s)Y(s) - W(s) = L(s)U(s),$$

gdzie $W(s)$ jest wielomianem stopnia $m - 1$ o współczynnikach zależnych od warunku początkowego oraz a_1, \dots, a_m . Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie równania różniczkowego wyrażone w formie operatorowej, a mianowicie:

$$Y(s) = \frac{W(s)}{M(s)} + \frac{L(s)}{M(s)}U(s). \quad (2.5)$$

Wynika stąd ostatecznie, że odpowiedź systemu na pobudzenie $u(t)$ ma następującą postać:

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} + \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{M(s)} U(s) \right\}. \quad (2.6)$$

Reakcja $y(t)$ systemu zależy więc od:

- pobudzenia,
- warunku początkowego,
- własności systemu, czyli współczynników a_0, \dots, a_m oraz b_0, \dots, b_l .

Jej pierwsza składowa od:

- warunku początkowego,
- własności systemu,
- lecz nie zależy od pobudzenia.

Jest ona odpowiedzią systemu na pobudzenie zerowe, gdyż w takiej sytuacji $U(s) = 0$. Innymi słowy, jest ona rozwiązaniem równania jednorodnego

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (2.7)$$

Druga składowa zależy natomiast od:

- pobudzenia,
- własności systemu,
- lecz nie zależy od warunku początkowego.

Jest ona reakcją systemu na pobudzenie $u(t)$ przy zerowym warunku początkowym, wtedy bowiem $W(s) = 0$.

Przykład 2.2.1. Równanie różniczkowe opisujące system ma postać:

$$Ty'(t) + y(t) = ku(t),$$

przy czym warunkiem początkowym jest $y(0-)$, a wymuszeniem $u(t) = 1(t)$. Przekształcenie Laplace'a dokonane wobec obydwu stron równania doprowadza do następnego równania

$$(Ts + 1)Y(s) - Ty(0-) = kU(s),$$

skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{T}{Ts + 1} y(0-) + \frac{k}{Ts + 1} U(s).$$

Ponieważ $U(s) = 1/s$, więc

$$Y(s) = \frac{T}{Ts + 1}y(0-) + \frac{k}{s(Ts + 1)}.$$

Zatem

$$y(t) = y(0-)e^{-t/T} + k(1 - e^{-t/T}).$$

Pierwsza składowa $y(0-)e^{-t/T}$ pochodzi od warunku początkowego, natomiast druga, czyli $k(1 - e^{-t/T})$, jest skutkiem wymuszenia $u(t) = 1(t)$.

Przykład 2.2.2. Równanie systemu ma następującą postać:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u'(t) + u(t).$$

Znajdziemy odpowiedź $y(t)$ na wymuszenie $u(t) = \delta(t)$ przy warunku początkowym $y'(0-)$, $y(0-)$. Po dokonaniu w tym celu transformacji Laplace'a wobec obydwu stron równania otrzymujemy

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - [3sy(0-) + 3y'(0-) + 2y(0-)] = (4s + 1)U(s).$$

Uwzględniając to, że $U(s) = 1$ i że $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$, stwierdzamy:

$$Y(s) = \frac{3sy(0-) + 3y'(0-) + 2y(0-)}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{4s + 1}{(s + 1)(s + 2)}.$$

Rozkład na ułamki proste doprowadza nas następnie do wniosku, że

$$Y(s) = \frac{-y(0-) + 3y'(0-)}{s + 1} + \frac{4y(0-) - 3y'(0-)}{s + 2} - \frac{3}{s + 1} + \frac{7}{s + 2}.$$

Zatem $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, gdzie

$$y_1(t) = [-y(0-) + 3y'(0-)]e^{-t} + [4y(0-) - 3y'(0-)]e^{-2t}$$

oraz

$$y_2(t) = -3e^{-t} + 7e^{-2t}.$$

Składowa $y_1(t)$ pochodzi przy tym od warunku początkowego, natomiast $y_2(t)$ od wymuszenia.

2.2.2. Równanie liniowe jako rezultat linearyzacji

Liniowe równanie różniczkowe albo wprost opisuje system rzeczywisty, albo, co jest znacznie częstsze, jest jedynie pewnym przybliżeniem jego zachowań. Z reguły bowiem systemy realnie istniejące są nieliniowe. Aby przedstawić, na czym polega to przybliżenie, czyli liniowa aproksymacja nazywana także linearyzacją, weźmy pod uwagę system o wejściu $\xi(t)$ i wyjściu $\eta(t)$ opisywany nieliniowym równaniem różniczkowym

$$\eta^{(m)} = \varphi(\eta^{(m-1)}, \dots, \eta^{(1)}, \eta; \xi^{(l)}, \dots, \xi^{(1)}, \xi),$$

gdzie φ jest pewną funkcją, zazwyczaj nieliniową. Dla prostoty oznaczeń pominiemy zmienną t .

Niech teraz (ξ_0, η_0) będzie tzw. punktem odniesienia, tzn. niech będzie tak, że jeśli $\xi(t) = \xi_0$ dla $t \in (-\infty, \infty)$, to $\eta(t) = \eta_0$ dla $t \in (-\infty, \infty)$. Oznacza to, że

$$0 = \varphi(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0).$$

Jeśli bowiem system pozostaje w punkcie odniesienia, to jest w spoczynku, skąd wynika, że $\xi^{(1)}(t) = \dots = \xi^{(l)}(t) = 0$ i $\eta^{(1)}(t) = \dots = \eta^{(m)}(t) = 0$. Rozwijając funkcję φ w szereg Taylora w punkcie $(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \eta^{(m)} &= \varphi(\eta^{(m-1)}, \dots, \eta^{(1)}, \eta; \xi^{(l)}, \dots, \xi^{(1)}, \xi) - \varphi(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0) \\ &= -a_{m-1}(\eta - \eta_0)^{(m-1)} - \dots - a_1(\eta - \eta_0)^{(1)} - a_0(\eta - \eta_0) \\ &\quad + b_l(\xi - \xi_0)^{(l)} + \dots + b_1(\xi - \xi_0)^{(1)} + b_0(\xi - \xi_0) + R, \end{aligned}$$

gdzie

$$a_i = -\frac{\partial}{\partial \eta^{(i)}} \varphi \Big|_{(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0)}, \quad b_i = \frac{\partial}{\partial \xi^{(i)}} \varphi \Big|_{(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0)},$$

natomiast R jest resztą zawierającą wyrazy wyższego rzędu. Z dokładnością do tej reszty możemy zatem napisać

$$\begin{aligned} \eta^{(m)} &= -a_{m-1}(\eta - \eta_0)^{(m-1)} - \dots - a_1(\eta - \eta_0)^{(1)} - a_0(\eta - \eta_0) \\ &\quad + b_l(\xi - \xi_0)^{(l)} + \dots + b_1(\xi - \xi_0)^{(1)} + b_0(\xi - \xi_0). \end{aligned}$$

Oznaczając teraz $y(t) = \eta(t) - \eta_0$ oraz $u(t) = \xi(t) - \xi_0$ i zauważając, że $\eta^{(i)} = y^{(i)}$ oraz $\xi^{(i)} = u^{(i)}$, dla $i = 1, 2, \dots$, otrzymujemy ostatecznie

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_0y = b_lu^{(l)} + b_{l-1}u^{(l-1)} + \dots + b_0u,$$

czyli liniowe równanie (2.1).

Należy zwrócić uwagę na to, że $\xi(t)$ oraz $\eta(t)$ mają charakter bezwzględny, natomiast $u(t)$ oraz $y(t)$ są względne, gdyż świadczą o odchyleniu $\xi(t)$ od ξ_0 oraz $\eta(t)$ od η_0 .

Przykład 2.2.3. Przy braku tarcia ruch ciała o masie 1 pod wpływem siły F po poziomej płaszczyźnie można opisać równaniem

$$\frac{d}{dt}v(t) + r(v(t))v(t) = F(t),$$

gdzie v jest prędkością, $r(v) = v^2$ oporem ośrodka zależnym tutaj kwadratowo od prędkości. Punktem odniesienia, czyli typowym punktem pracy, jest (F_0, v_0) , gdzie v_0 to stała prędkość osiągana przez ciało pod wpływem siły F_0 , tzn. taka, dla której $r(v_0)v_0 = F_0$, czyli taka, że $v_0 = F_0^{1/3}$. Przepisując równanie ruchu w postaci

$$\frac{d}{dt}v(t) = \varphi(v(t), F(t)),$$

gdzie $\varphi(v, F) = -r(v)v + F = -v^3 + F$, pamiętamy, że $\varphi(v_0, F_0) = 0$, i rozwijając φ w szereg Taylora, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \varphi(v(t), F(t)) - \varphi(v_0, F_0) \\ &= (v(t) - v_0) \left. \frac{d}{dv}\varphi(v, F) \right|_{(v_0, F_0)} + (F(t) - F_0) \left. \frac{d}{dF}\varphi(v, F) \right|_{(v_0, F_0)} + R(t), \end{aligned}$$

gdzie $R(t)$ jest resztą o wyrazach wyższego rzędu. Oznaczając $u(t) = F(t) - F_0$ oraz $y(t) = v(t) - v_0$, możemy zatem napisać

$$\frac{d}{dt}y(t) + ay(t) = u(t) + R(t),$$

gdzie:

$$a = - \left. \frac{d}{dv}\varphi(v, F) \right|_{(v_0, F_0)} = 3v_0^2 \text{ oraz } b = \left. \frac{d}{dF}\varphi(v, F) \right|_{(v_0, F_0)} = 1.$$

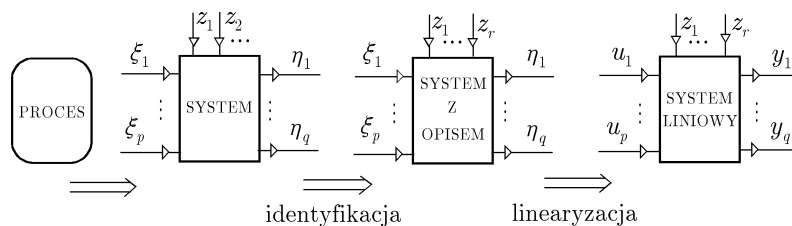
Pomijając wyrazy wyższego rzędu, otrzymujemy równanie będące liniowym przybliżeniem podanego na początku

$$\frac{d}{dt}y(t) + ay(t) = u(t).$$

Opisuje ono w sposób przybliżony ruch ciała, gdy działająca siła i wynikająca z niej prędkość niewiele się różnią od F_0 i v_0 .

2.2.3. Proces, system, opis

Zarówno nieliniowe równanie różniczkowe, jak i liniowe, będące rezultatem jego linearyzacji, mają charakter abstrakcyjny. Ich zadaniem jest jednak opis rzeczywistego procesu. Przedstawimy teraz drogę, która prowadzi od procesu do równania, czyli od realnego procesu do jego matematycznej reprezentacji, patrz rys. 2.2.



Rys. 2.2. Od rzeczywistego procesu do systemu liniowego

Proces

Rzeczywisty proces może mieć różnoraki charakter. Może to być zespół zjawisk zachodzących w reaktorze chemicznym, kotle ciepłowniczym czy na rynku pewnego produktu.

Procesem tym może być także to, co dzieje się z lecącym samolotem. Natura zachodzących zjawisk może być całkowicie dowolna, mogą one mieć charakter chemiczny, fizyczny, ekonomiczny czy też społeczny.

System

W procesie wyróżniamy zestaw wielkości, co do których będziemy stawiać pewne wymagania. Nazywamy je wielkościami wyjściowymi. Na rys. 2.2 oznaczono je jako η_1, \dots, η_q . Po określeniu wielkości wyjściowych przychodzi kolej na wyróżnienie wielkości, za pomocą których będziemy się starali oddziaływać na proces tak, aby ustalone przed chwilą wielkości wyjściowe zachowywały się w pożądanym sposób. Zaznaczone jako ξ_1, \dots, ξ_p są nazywane wejściowymi. Pozostałe, w nieznaną zazwyczaj liczbę, oznaczone jako z_1, z_2, \dots , mające wpływ na wyjścia są zakłóceniami. Jest przy tym oczywiste, że niektórych takich wielkości zakłócających możemy nie znać. Wynikiem tych wszystkich podjętych przez nas wyborów jest to, co nazywamy systemem. Jest to zatem proces z wyróżnionymi zestawami wielkości wejściowych i wyjściowych oraz zakłóceniami.

System z opisem

Określamy następnie opis systemu, np. równanie różniczkowe, zwykle nieliniowe. Procedura ustalania opisu nazywa się identyfikacją systemu. Jest ona wykonywana na podstawie tzw. informacji apriorycznej o systemie, np. równań wynikających z praw fizyki, oraz danych empirycznych, czyli wynikach pomiarów przeprowadzonych na sygnałach wejściowych i wyjściowych systemu.

System liniowy

Jeśli nieliniowości otrzymanego równania nie są znaczne, to po przeprowadzeniu liniaryzacji wokół nominalnego punktu pracy otrzymujemy liniowy system dynamiczny opisywany liniowym równaniem różniczkowym. Jego wielkości wejściowe u_1, \dots, u_p i wyjściowe y_1, \dots, y_q mają, jak już wiemy, charakter względny, tzn. są odniesione do punktu pracy. My przyjmujemy, że system ma tylko po jednym wejściu i wyjściu oznaczonymi jako u oraz y . Zakładamy ponadto, że nie działają nań żadne zakłócenia.

Przykład 2.2.4. Niech procesem będzie zespół zjawisk zachodzących w lecącym samolocie. Przyjmując wysokość lotu, kurs i szybkość jako wielkości wyjściowe oraz położenie sterów wysokości, kierunku oraz natężenie dopływu paliwa jako wejściowe, traktujemy ten proces jako system dynamiczny o trzech wejściach oraz trzech wyjściach. Zakłóceniami są np. szybkość i kierunek wiatru czy też ciśnienie powietrza. Korzystając następnie z praw aerodynamiki i danych pomiarowych, ustala się w procesie identyfikacji opis takiego systemu, np. w postaci równań różniczkowych.

Przykład 2.2.5. W tzw. procesie pH do zbiornika, w którym stale zachodzi mieszanie, wlewa się trzy substancje, silną zasadę, silny kwas oraz, ze stałym natężeniem dopływu, stabilizator. Celem jest otrzymanie cieczy o zadanym pH, tzn. o zadanym poziomie kwasowości. Jako wielkości wyjściowe można przyjąć poziom cieczy w zbiorniku oraz

współczynnik pH w cieczy go opuszczającej. Wielkości wejściowe to natężenia dopływu kwasu i zasady. Tak zdefiniowany system ma po dwie wielkości wejściowe i wyjściowe.

Przykład 2.2.6. Silnik elektryczny obraca się pod wpływem podanego napięcia. Jeśli celem jest utrzymanie prędkości obrotowej na właściwym poziomie, to wielkością wejściową jest napięcie, a wyjściową prędkość. Jeśli natomiast celem jest to, aby obrócić się on o zadany kąt, to wielkością wyjściową jest kąt obrotu. To co jest wielkością wyjściową, nie jest zatem właściwością procesu, lecz zależy od nas, od zadania jaki stawiamy procesowi.

2.3. Transmitancja

2.3.1. Definicja. Liniowość systemu

Podamy teraz następujący opis systemu liniowego nazywanego transmitancją. Przypominamy przy tym, że $M(s)$ i $L(s)$ są wielomianami jak we wzorach (2.3) oraz (2.4).

Definicja 2.3.1. *Transmitancją systemu o równaniu różniczkowym (2.1) nazywamy następującą funkcję:*

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}.$$

Bezpośrednio z zależności (2.5) wynika następująca własność:

Własność 2.3.1. *Przy zerowym warunku początkowym*

$$Y(s) = K(s)U(s).$$

Transmitancja wiąże zatem transformaty Laplace'a sygnałów na wejściu oraz wyjściu tylko wtedy, gdy warunek początkowy jest zerowy. Jest ona funkcją wymierną, a jej bieguny są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $M(s)$. Z powyższej własności wynika ważne twierdzenie dotyczące istotnej cechy systemu, a mianowicie liniowości.

Twierdzenie 2.3.1 (liniowość systemu). *Niech warunek początkowy będzie zerowy. Jeśli na pobudzenia $u_1(t)$, $u_2(t)$ i $u(t)$ reakcjami systemu są odpowiednio $y_1(t)$, $y_2(t)$ i $y(t)$, to odpowiedziami na pobudzenia $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$, $\int_0^t u(\tau) d\tau$ oraz $u'(t)$ są odpowiednio $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, $\int_0^t y(\tau) d\tau$ oraz $y'(t)$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 2.3.1. ■

Z twierdzenia 2.3.1 wynika, że operacji liniowej na sygnałach wejściowych odpowiada taka sama operacja na sygnałach wyjściowych. Należy podkreślić przy tym, że system ma własność liniowości jedynie wtedy, gdy warunek początkowy jest zerowy.

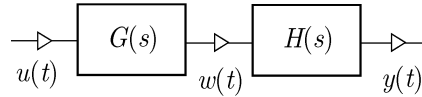
Zauważmy na koniec, że posługując się pojęciem transmitancji, odpowiedź (2.6) systemu na pobudzenie $u(t)$ można, przy dowolnym warunku początkowym, zapisać jako

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} + \mathfrak{L}^{-1} \{ K(s)U(s) \}. \quad (2.8)$$

2.3.2. Transmitancja systemów złożonych

Łącząc proste systemy, nazywane często elementami lub członami, otrzymuje się bardziej skomplikowane struktury. Najprostszą jest połączenie szeregowe, czyli kaskadowe, rys. 2.3. Nietrudno sprawdzić, że transmitancją utworzonego w ten sposób systemu o wejściu u i wyjściu y , czyli ilorazem $Y(s)/U(s)$, jest

$$K(s) = G(s)H(s).$$

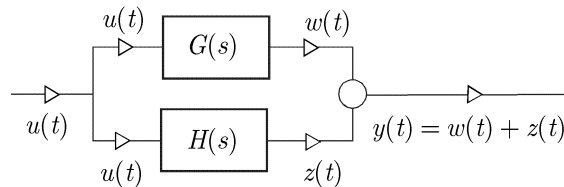


Rys. 2.3. Struktura szeregową

System powstały przez połączenie równoległe, pokazany na rys. 2.4, ma natomiast transmitancję wyrażającą się wzorem

$$K(s) = G(s) + H(s).$$

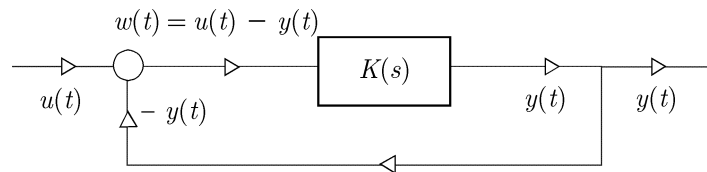
Zauważmy przy tym sposób, w jaki zaznaczono węzeł, przez który przepływa sygnał $u(t)$ oraz węzeł, w którym dodają się sygnały $w(t)$ oraz $z(t)$.



Rys. 2.4. Struktura równoległa

Bardziej skomplikowana jest struktura ze sprzężeniem zwrotnym przedstawiona na rys. 2.5. Wejściem systemu jest sygnał u , a wyjściem y . Ponieważ $w(t) = u(t) - y(t)$, mówimy, że sprzężenie jest ujemne (dla $w(t) = u(t) + y(t)$ nazywamy je dodatnim). Z równości $W(s) = U(s) - Y(s)$ oraz $Y(s) = K(s)W(s)$ wynika, że transmitancją takiego systemu jest

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s)}{1 + K(s)}.$$



Rys. 2.5. Sprzężenie zwrotne

Ćwiczenie 2.3.1. Wykazać, że dla dodatniego sprzężenia zwrotnego transmitancją systemu zamkniętego jest $K_Z(s) = 1/(1 - K(s))$.

2.4. Odpowiedzi na standardowe pobudzenia

Zbadamy teraz odpowiedzi systemu na dwa standardowe pobudzenia, a mianowicie impuls Diraca $\delta(t)$ oraz skok jednostkowy $1(t)$. Później zajmiemy się także reakcją na trzecie takie pobudzenie, a mianowicie sinusoidę $\sin \omega t$, patrz punkt 4.3.3. Przypomnimy, że $K(s) = L(s)/M(s)$, gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami jak we wzorach (2.4) i (2.3) o stopniach l oraz m .

2.4.1. Odpowiedź impulsowa

Definicja 2.4.1. *Odpowiedzią impulsową $k(t)$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie impulsem Diraca $\delta(t)$ w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Relację między odpowiedzią impulsową i transmitancją ustala poniższa własność:

Własność 2.4.1. *Związek pomiędzy odpowiedzią impulsową i transmitancją jest następujący:*

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}.$$

Dowód. Aby wykazać prawdziwość równości bierzemy pod uwagę to, że $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ i korzystamy z własności 2.3.1. ■

Jest oczywiste, że powyższą własność rozumiemy w ten sposób, że $k(t) = 0$ dla $t < 0$ i $k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}$ dla $t \geq 0$.

W celu wyznaczenia odpowiedzi impulsowej wyszczególnimy bieguny transmitancji. Jako rozwiązania równania $M(s) = 0$ mogą być one rzeczywiste lub zespolone. Zespolone występują w parach, w których jeden jest sprzężony względem drugiego, patrz lemat A.4.1. Są one zatem jak następuje:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rzeczywiste } \xi_1, \dots, \xi_p, \text{ różne o krotnościach } k_1, \dots, k_p, \\ \text{pary zespolone } (\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q), \text{ różne o krotnościach } \kappa_1, \dots, \kappa_q, \\ \text{przy czym } \eta_i = \sigma_i + j\omega_i, i = 1, \dots, q. \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

Jest przy tym oczywiste, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = m$. Omówimy najpierw sytuację, w której $l < m$.

Własność 2.4.2. *Niech $l < m$, a bieguny transmitancji będą jak w (2.9). System ma następującą odpowiedź impulsową:*

$$k(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{ij}), \quad (2.10)$$

gdzie:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i - j}}{ds^{k_i - j}} [(s - \xi_i)^{k_i} K(s)],$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i - j}}{ds^{\kappa_i - j}} [(s - \eta_i)^{\kappa_i} K(s)],$$

$\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$. Ponadto $\alpha_{ik_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Aby znaleźć odpowiedź impulsową, wystarczy zauważyć, że jest ona oryginałem funkcji wymiernej $K(s) = L(s)/M(s)$ i że

$$k(t) \hat{=} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{\kappa_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(s - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(s - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

patrz twierdzenie A.4.3, a następnie, korzystając z (A.12) oraz (A.16), znaleźć oryginał każdego ułamka. To, że $\alpha_{ik_i} \neq 0$ oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, wynika z drugiej części przywołanego twierdzenia. ■

Kolejna własność, z której będziemy nieraz korzystać, jest oczywista.

Własność 2.4.3. Dla $l < m$ odpowiedź impulsowa $k(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na domkniętej półprostej $t \in [0, \infty)$.

Jeśli bieguny transmitancji są jednokrotne, to odpowiedź impulsową można przedstawić w znacznie prostszej postaci.

Wniosek 2.4.1 (bieguny jednokrotne). Niech $l < m$, a bieguny transmitancji będą oznaczone jak w (2.9), przy czym wszystkie jednokrotne (co oznacza, że $p + 2q = m$). Wówczas

$$k(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\xi_i t} + 2 \sum_{j=1}^q |\beta_j| e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_j),$$

gdzie:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) K(s), \beta_i = \lim_{s \rightarrow \eta_i} (s - \eta_i) K(s), \varphi_i = \arg \beta_i.$$

Zbadamy teraz własności odpowiedzi impulsowej w punkcie $t = 0$, które związane są z szybkością, z jaką system reaguje na pobudzenie. Zauważmy przede wszystkim, że, dzięki własności 2.4.3, odpowiedź ta ma w tym punkcie wszystkie (prawostronne) pochodne.

Własność 2.4.4. Niech $p = m - l$. Dla $p \geq 1$,

$$k(0) = k^{(1)}(0) = \dots = k^{(p-2)}(0) = 0 \text{ i dopiero } k^{(p-1)}(0) = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Wystarczy odwołać się do lematu A.5.2. ■

Ostatnia własność stwierdza więc, że odpowiedź impulsowa systemu oraz jej pochodne rzędu $1, 2, \dots, p - 2$ zerują się w punkcie $t = 0$ i dopiero pochodna rzędu $p - 1$ jest niezerowa. Liczba p jest przy tym różnicą między stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku transmitancji. Jest oczywiste, że im większa ta różnica, tym więcej pochodnych zeruje się, czyli tym wolniejsze narastanie odpowiedzi impulsowej w jej początkowym przebiegu. Innymi słowy, im większe p , tym większa bezwładność systemu.

Przykład 2.4.1. Niech $K(s) = (3s+1)/s(s+1)$. Dokonując rozkładu na ułamki proste, dochodzimy do wniosku, że odpowiedzią impulsową jest $k(t) = 1 + 2e^{-t}$.

Przykład 2.4.2. W systemie o transmitancji $1/(s+1)(s+2)$ odpowiedzią impulsową jest $e^{-t} - e^{-2t}$. Każda z jej składowych jest związana z jednym biegunem transmitancji.

Przykład 2.4.3. Dla $K(s) = (4s+1)/(s+1)(s-2)$ otrzymujemy odpowiedź impulsową o postaci $k(t) = e^{-t} + 3e^{2t}$.

Przykład 2.4.4. Niech $K(s) = s(s-1)/(s+1)(s^2+1)$. Zatem $k(t) = e^{-t} - \sin t$.

Przykład 2.4.5. Dla $K(s) = 1/(s+3)^2$ odpowiedzią impulsową jest te^{-3t} .

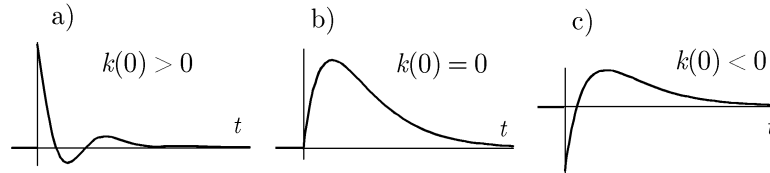
Przykład 2.4.6. Na rys. 2.6 pokazano odpowiedzi impulsowe systemów o transmitancjach:

a) $(5s^2 + 8s + 20)/(s+1)(s^2 + 4s + 20)$,

b) $2/(s+1)(s+2)$,

c) $(-s+2)/(s+1)(s+2)$.

W pierwszej, $m-l=1$, a co za tym idzie $k(0) = 5 > 0$. W drugiej, $m-l=2$, a zatem $k(0) = 0$ oraz $k'(0) = 2$. W trzeciej, $m-l=1$ i $k(0) = -1 < 0$.



Rys. 2.6. Odpowiedzi impulsowe, przykład 2.4.6

Przykład 2.4.7. Dla transmitancji $K(s) = (7s+6)/(2s^3 + s^2 + 4s + 5)$ otrzymujemy $k(0) = 0$, $k'(0) = 7/2$.

Przykład 2.4.8. Dla $K(s) = 1/(2s^3 + 3s^2 + 4s + 5)$ znajdujemy $k(0) = k'(0) = 0$ oraz $k''(0) = 1/2$.

Przykład 2.4.9. Niech $K(s) = 1/(a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0)$. Dla $m \geq 1$ wyliczamy $k(0) = k^{(1)}(0) = \dots = k^{(m-2)}(0) = 0$ i $k^{(m-1)}(0) = 1/a_m$.

2.4.2. Odpowiedź skokowa

Definicja 2.4.2. *Odpowiedzią skokową $\lambda(t)$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie skokiem jednostkowym $1(t)$ w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Związek pomiędzy odpowiedzią skokową i transmitancją wyraża następująca własność:

Własność 2.4.5. *Relacja między odpowiedzią skokową i transmitancją jest dana wzorem:*

$$\lambda(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} K(s) \right\}.$$

Dowód. Wystarczy uwzględnić to, że $\mathfrak{L}\{1(t)\} = s^{-1}$ i skorzystać z własności 2.3.1. ■

Jest oczywiste, że własność powyższą rozumiemy w ten sposób, że $\lambda(t) = 0$ dla $t < 0$ i $\lambda(t) = s^{-1}\mathfrak{L}^{-1}\{K(s)\}$ dla $t \geq 0$.

Relację pomiędzy odpowiedzią skokową i impulsową określa poniższa własność.

Własność 2.4.6. *Odpowiedź impulsowa jest powiązana ze skokową wzorem:*

$$\lambda(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau, \text{ tzn. } k(t) = \lambda'(t).$$

Poniżej wyznaczamy odpowiedź skokową systemu.

Własność 2.4.7. *Niech $l < m$ i niech bieguny transmitancji będą jak w (2.9), przy czym $\xi_1 = 0$. System ma następującą odpowiedź skokową:*

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & \sum_{j=1}^{k_1+1} c_{1j} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t} \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |d_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \psi_{ij}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{1}{(k_1 + 1 - j)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k_1-j+1}}{ds^{k_1-j+1}} [s^{k_1} K(s)], \\ c_{ij} &= \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} \frac{1}{s} K(s) \right], \\ d_{ij} &= \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{ds^{\kappa_i-j}} \left[(s - \eta_i)^{\kappa_i} \frac{1}{s} K(s) \right], \end{aligned}$$

oraz $\psi_{ij} = \arg d_{ij}$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $k_1 + 1$ jest krotnością bieguna $\xi_1 = 0$ funkcji $s^{-1}K(s)$ i że, w związku z tym,

$$\frac{1}{s} K(s) = \sum_{j=1}^{k_1+1} \frac{c_{1j}}{s^j} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{d_{ij}}{(s - \eta_i)^j} + \frac{\bar{d}_{ij}}{(s - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

oraz znaleźć oryginał każdego ułamka, patrz (A.12) i (A.16). ■

Wniosek 2.4.2 (bieguny jednokrotne). *Jeśli bieguny transmitancji są jednokrotne i żaden nie leży w punkcie $s = 0$, to*

$$\lambda(t) = K(0) + \sum_{i=1}^p c_i e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q |d_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \psi_i),$$

gdzie:

$$c_i = \frac{1}{\xi_i} \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) K(s), \quad d_i = \frac{1}{\eta_i} \lim_{s \rightarrow \eta_i} (s - \eta_i) K(s), \quad \psi_i = \arg d_i.$$

Własność 2.4.8. Jeśli $l \leq m$, to odpowiedź skokowa $\lambda(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na domkniętej półprostej $t \in [0, \infty)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla $l \leq m$ odpowiedź skokowa jest oryginałem funkcji wymiernej $s^{-1}K(s)$, w której stopień wielomianu w liczniku jest niższy od stopnia wielomianu w mianowniku. ■

Ustalimy teraz zachowanie się odpowiedzi skokowej w punkcie $t = 0$. Podana poniżej własność w sposób oczywisty koresponduje z własnością 2.4.4 dotyczącą odpowiedzi impulsowej.

Własność 2.4.9. Niech $p = m - l$. Dla $p \geq 0$,

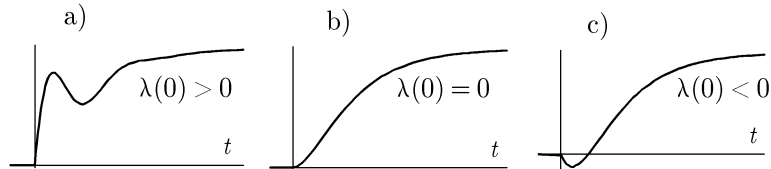
$$\lambda(0) = \lambda^{(1)}(0) = \dots = \lambda^{(p-1)}(0) = 0 \text{ i dopiero } \lambda^{(p)}(0) = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z lematu A.5.3. ■

Liczba pochodnych odpowiedzi skokowej systemu zerujących się w chwili $t = 0$ świadczy o jego bezwładności. Zatem im większa różnica pomiędzy stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku transmitancji, tym większa bezwładność, czyli inercja. Efekt ten zaobserwowaliśmy już, omawiając odpowiedź impulsową.

Przykład 2.4.10. Jest oczywiste, że dla transmitancji $K(s) = 2/(s + 2)$ otrzymujemy $\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}\{2/s(s + 2)\}$. Ponieważ $2/s(s + 2) = 1/s - 1/(s + 2)$, zatem $\lambda(t) = 1 - e^{-2t}$.

Przykład 2.4.11. Dla systemów jak w przykładzie 2.4.6, na rys. 2.7 pokazano odpowiedzi skokowe odpowiadające kolejnym transmitancjom.



Rys. 2.7. Odpowiedzi skokowe, przykład 2.4.11

Przykład 2.4.12. Dla transmitancji $K(s) = (s + 2)/(3s + 5)$ znajdujemy $\lambda(0) = 1/3$.

Przykład 2.4.13. Dla systemu o transmitancji $K(s) = 1/(s + 1)$ wyliczamy $\lambda(0) = 0$ oraz $\lambda'(0) = k(0) = 1$.

Przykład 2.4.14. Dla $K(s) = 1/(2s + 1)$ mamy $\lambda(0) = 0$ oraz $\lambda'(0) = k(0) = 1/2$.

Przykład 2.4.15. Dla $K(s) = 1/(3s^2 + 4s + 5)$ wyliczamy $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ i $\lambda''(0) = 1/3$.

Przykład 2.4.16. W systemie o transmitancji $K(s) = 1/(a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0)$, gdzie $m \geq 1$, $\lambda(0) = \lambda'(0) = \dots = \lambda^{(m-1)}(0) = 0$ i dopiero $\lambda^{(m)}(0) = 1/a_m$.

Przykład 2.4.17. Dla $K(s) = (b_1 s + b_0)/(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)$ otrzymujemy $k(0) = b_1/a_2$ oraz $\lambda(0) = 0$, $\lambda^{(1)}(0) = b_1/a_2$.

Przykład 2.4.18. Dla $K(s) = (b_1s + b_0)/(a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)$ znajdujemy $k(0) = 0$, $k^{(1)}(0) = b_1/a_3$ oraz $\lambda(0) = \lambda^{(1)}(0) = 0$, $\lambda^{(2)}(0) = b_1/a_3$.

2.4.3. Odpowiedzi systemu a bieguny transmitancji

Odpowiedź impulsowa (2.10) zawiera dwa typy składowych, które są związane odpowiednio z biegunami rzeczywistymi oraz parami biegunów zespolonych. Omówimy je teraz kolejno, patrz tabele 2.1–2.3.

Rzeczywisty biegun jednokrotny, powiedzmy ξ , wnosi składową $e^{\xi t}$. Jeśli ma on krotność k , to w odpowiedzi występują składniki postaci:

$$e^{\xi t}, te^{\xi t}, \dots, t^{k-1}e^{\xi t}.$$

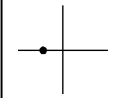
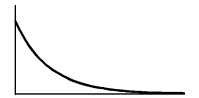
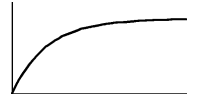
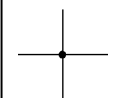


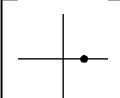


Dla $\xi < 0$ każdy z nich zbiega się do zera, gdy $t \rightarrow \infty$, i to niezależnie od krotności. Dla $\xi = 0$ składowa jest ograniczona, gdy $k = 1$, i nieograniczona, gdy $k \geq 2$. Dla $\xi > 0$ składowa związana z tym biegunem narasta do nieskończoności niezależnie od jego krotności.

Z kolei jednokrotna para biegunów zespolonych $(\sigma + j\omega, \sigma - j\omega)$, $\omega \neq 0$, powoduje pojawienie się składowej typu $e^{\sigma t} \cos \omega t$. Jeśli ma ona krotność k , to odpowiedź impulsowa zawiera składniki typu:

$$e^{\sigma t} \cos \omega t, te^{\sigma t} \cos \omega t, \dots, t^{k-1}e^{\sigma t} \cos \omega t.$$

Dla $\sigma < 0$, niezależnie od krotności pary, każdy z nich maleje do zera, gdy t narasta do nieskończoności. Dla $\sigma = 0$ i $k = 1$, w odpowiedzi występuje natomiast składowa periodyczna $\cos \omega t$ o stałej amplitudzie. Dla $\sigma = 0$ i $k \geq 2$, pojawia się przebieg periodyczny o amplitudzie narastającej do nieskończoności tak szybko jak t^{k-1} . Dla $\sigma > 0$, amplituda tej składowej periodycznej rośnie jeszcze szybciej, z prędkością wyznaczoną przez $t^{k-1}e^{\sigma t}$.

Tabela 2.1. Odpowiedzi systemu. Bieguny rzeczywiste

biegun	$k(t)$	$\lambda(t)$
		
		
		

Kończąc, stwierdzamy, że biegun rzeczywisty powoduje wystąpienie, zarówno w odpowiedzi impulsowej, jak i skokowej, składowej aperiodycznej, natomiast para biegunów zespolonych jest przyczyną pojawiania się składowej okresowej.

Ponadto jeśli $\xi < 0$, to związana z tym biegunem składowa maleje do zera, gdy t narasta do nieskończoności, i to niezależnie od jego krotności. Podobną własność ma składowa związana z parą biegunów zespolonych, jeśli tylko $\sigma < 0$.

Tabela 2.2. Odpowiedzi systemu. Bieguny zespolone

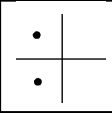

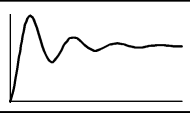
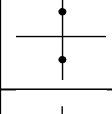
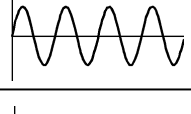
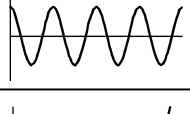
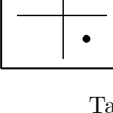
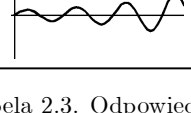
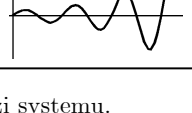
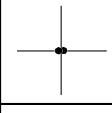
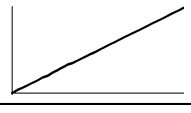
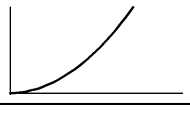
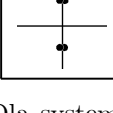
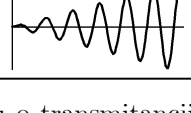
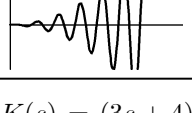
bieguny	$k(t)$	$\lambda(t)$
		
		
		

Tabela 2.3. Odpowiedzi systemu. Bieguny podwójne na osi liczb urojonych

bieguny	$k(t)$	$\lambda(t)$
		
		

Przykład 2.4.19. Dla systemu o transmitancji $K(s) = (3s + 4)/(s + 1)(s + 2)$ znajdujemy $K(s) = 1/(s + 1) + 2/(s + 2)$, skąd wynika, że odpowiedzią impulsową jest $k(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$. Ponieważ $(1/s)K(s) = 2/2 - 1/(s + 1) - 1/(s + 2)$, zatem $\lambda(t) = 2 - e^{-t} - e^{-2}$. Obydwie odpowiedzi zawierają składowe związane z biegunami -1 oraz -2 .

Przykład 2.4.20. Dla transmitancji $K(s) = (s^2 + 3s - 1)/(s + 1)^2(s - 2)$ wyliczamy $K(s) = 1/(s + 1)^2 + 1/(s - 2)$, skąd wynika, że $k(t) = te^{-t} + e^{2t}$. Z uwagi na to, że $(1/s)K(s) = 1/2s - 1/(s + 1)^2 - 1/(s + 1) + 1/2(s - 2)$, odpowiedzią skokową jest $\lambda(t) = 1/2 - te^{-t} - e^{-t} + (1/2)e^t$. Zarówno w odpowiedzi impulsowej, jak i skokowej znajdują się składowe powiązane z biegunami -1 oraz 2 .

Ćwiczenie 2.4.1. Powiązać fakt zbiegania się składowej odpowiedzi impulsowej do zera z położeniem odpowiadającego jej bieguna lub pary biegunów.

2.5. Transmitancja widmowa

Podamy teraz pojęcie transmitancji widmowej, a następnie omówimy charakterystyki częstotliwościowe, czyli różne sposoby jej graficznej reprezentacji.

2.5.1. Definicja

Definicja 2.5.1. *Transmitancją widmową będziemy nazywać następującą funkcję argumentu ω :*

$$K(j\omega) = K(s)|_{s=j\omega},$$

przy czym $\omega \in [0, \infty)$.

Transmitancja widmowa jest funkcją rzeczywistego argumentu ω , który nazywa się pulsacją. Ponieważ $K(j\omega)$ przyjmuje wartości zespolone, można ją zatem przedstawić na dwa sposoby jako

$$K(j\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega) + j \operatorname{Im} K(j\omega)$$

lub też

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j \arg K(j\omega)}.$$

Przykład 2.5.1. Dla systemu o transmitancji

$$K(j\omega) = \frac{1}{s^2 + 3s + 4}$$

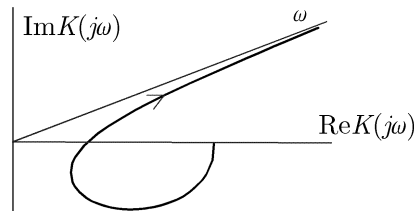
transmitancją widmową jest

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 4} = \frac{-\omega^2 + 4}{\omega^4 + \omega^2 + 16} - j \frac{3\omega}{\omega^4 + \omega^2 + 16} \\ &= \frac{\sqrt{(\omega^2 - 4)^2 + 9\omega^2}}{\omega^4 + \omega^2 + 16} e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{arctg} \varphi(\omega) = 3\omega/(\omega^4 + \omega^2 + 16)$.

2.5.2. Charakterystyki częstotliwościowe

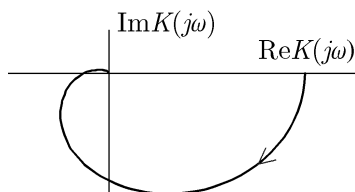
Transmitancja widmowa $K(j\omega)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej ω i przyjmuje wartości zespolone. W sposób graficzny można ją zatem przedstawić jako krzywą w przestrzeni o trzech wymiarach, rys. 2.8. Strzałką pokazano kierunek wzrostu zmiennej ω . Reprezentacji tego wykresu na płaszczyźnie może być zatem wiele. Nazywamy je charakterystykami częstotliwościowymi. Poniżej przedstawimy dwie najważniejsze.



Rys. 2.8. Przykład wykresu $K(j\omega)$ w przestrzeni trójwymiarowej

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

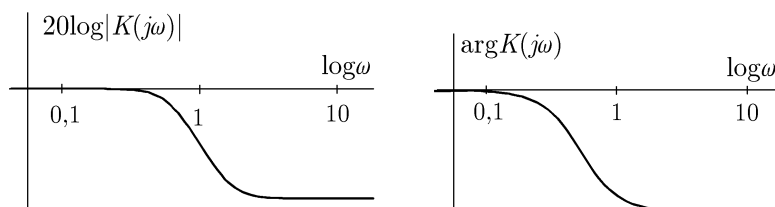
Wykres funkcji $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, na płaszczyźnie zmiennej zespolonej nazywa się charakterystyką amplitudowo-fazową. Przykład pokazano na rys. 2.9. Strzałka oznacza kierunek wzrostu ω . Charakterystyka ta powstaje przez rzutowanie krzywej z rys. 2.8 na płaszczyznę zmiennej zespolonej ($\operatorname{Re} K(j\omega)$, $\operatorname{Im} K(j\omega)$).



Rys. 2.9. Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej

Charakterystyki logarytmiczne

Komplet charakterystyk logarytmicznych tworzą dwa wykresy, a mianowicie charakterystyki amplitudowa i fazowa. Skala osi ω jest na obu logarytmiczna, dekadowa, co oznacza, że punkty odpowiadające pulsacjom różniącym się 10 razy są jednakowo oddalone od siebie. Dla charakterystyki amplitudowej miarą wzmocnienia jest $20 \log |K(j\omega)|$, a jednostką decybel (w skrócie dB), natomiast fazą jest oczywiście $\arg K(j\omega)$. Przykład takich charakterystyk pokazano na rys. 2.10.



Rys. 2.10. Charakterystyki logarytmiczne

Charakterystyki logarytmiczne mają ważną własność addytywności przy połączeniu szeregowym jak na rys. 2.3. Pamiętając, że transmitancją takiego kaskadowego połączenia jest $K(s)G(s)$, zauważamy bowiem, iż

$$20 \log |K(j\omega)G(j\omega)| = 20 \log |K(j\omega)| + 20 \log |G(j\omega)|$$

oraz

$$\arg[K(j\omega)G(j\omega)] = \arg K(j\omega) + \arg G(j\omega).$$

2.6. Splot

Z własności 2.3.1 i reguły o splocie, patrz podrozdział A.2, wynika, że przy zerowym warunku początkowym

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t k(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

gdzie $k(t)$ jest odpowiedzią impulsową.

Przy dowolnym warunku początkowym reakcję (2.8) systemu można teraz zapisać jako

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.12)$$

Ćwiczenie 2.6.1. Niech $u(t)$ będzie odcinkami ciągłe, a warunek początkowy dowolny. Korzystając z własności 2.4.3, wykazać, że:

- jeśli $l < m$, to odpowiedź systemu $y(t)$ jest funkcją ciągłą,
- jeśli $l = m$, to punkty nieciągłości odpowiedzi $y(t)$ oraz pobudzenia $u(t)$ są identyczne.

2.7. Równanie fazowe

Założmy, że w równaniu (2.1) $a_m = 1$. Ponadto pobudzenie jest zerowe, tzn. $u(t) = 0$ dla $t \in [0, \infty)$. W sytuacji tej zachowanie systemu jest opisywane równaniem jednorodnym (2.7), przy czym $a_m = 1$. Wektor

$$\boldsymbol{\xi}(t) = [y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t)]^T$$

będziemy nazywać fazowym. Jak łatwo sprawdzić,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.13)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

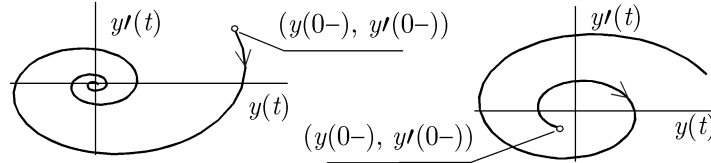
przy czym $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{m-1}]^T$, gdzie T oznacza transpozycję. Macierz ta jest nazywana fazową. Wektorem warunku początkowego jest

$$\boldsymbol{\xi}(0-) = [y(0-), y^{(1)}(0-), \dots, y^{(m-1)}(0-)]^T.$$

Otrzymane jednorodne wektorowe równanie pierwszego rzędu nazywa się fazowym. Jego rozwiązanie ma następującą postać:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\xi}(0-),$$

patrz podrozdział C.6. Wykres, który je przedstawia, czyli wykres krzywej $\xi(t)$ w przestrzeni fazowej, tzn. w m -wymiarowej przestrzeni wszystkich wektorów fazowych, nazywa się trajektorią fazową. Dla $m = 2$, przykłady pokazano na rys. 2.11.



Rys. 2.11. Przykłady trajektorii fazowej

Ponieważ

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (2.15)$$

patrz ćwiczenie 2.7.2, więc $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$. Wielomian charakterystyczny macierzy \mathbf{A} jest więc także wielomianem charakterystycznym (2.3) skalarne równania różniczkowego (2.1). Zatem wartości własne macierzy \mathbf{A} , czyli pierwiastki wielomianu $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, są jednocześnie pierwiastkami równania charakterystycznego systemu, a więc także biegunami transmitancji, co wyrazimy w postaci poniższej własności:

Własność 2.7.1. *Pierwiastki charakterystyczne równania różniczkowego (2.1), czyli bieguny transmitancji $K(s)$, oraz wartości własne macierzy \mathbf{A} są identyczne.*

Ponieważ

$$y(t) = \mathbf{c}^T \xi(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \xi(0-), \quad (2.16)$$

gdzie $\mathbf{c} = [1, 0, \dots, 0]^T$, zatem reakcją systemu na wymuszenie zerowe jest

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \xi(0-),$$

gdzie $W(s)$ jest wielomianem jak w (2.6). Zauważmy na koniec, że odpowiedź (2.12) możemy teraz zapisać jako

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \xi(0-) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Ćwiczenie 2.7.1. Sprawdzić, że dla

$$\boldsymbol{\eta}(t) = [y^{(m-1)}(t), \dots, y^{(1)}(t), y(t)]^T,$$

otrzymujemy równanie

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \begin{bmatrix} -a_{m-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t).$$

Ćwiczenie 2.7.2. Rozwijając $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ względem ostatniego wiersza, wykazać równość (2.15).

2.8. Związki między opisami

Podstawowym opisem systemu jest dla nas skalarne równanie różniczkowe, ale najchętniej będziemy posługiwać się transmitancją. Powstaje więc pytanie o to, czy te dwa opisy, tzn. równanie różniczkowe i transmitancja, są równoważne. Odpowiedź jest negatywna.

Zauważmy przede wszystkim, że równanie jednoznacznie określa transmitancję. Okazuje się jednak, że przejście w drugą stronę nie zawsze jest możliwe, wiele równań różniczkowych prowadzi bowiem do tej samej transmitancji. Dla przykładu, równania

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) + 2u(t)$$

oraz

$$y'(t) + y(t) = u(t)$$

prowadzą do tej samej transmitancji, a mianowicie

$$\frac{1}{s+1}.$$

Jest to spowodowane tym, że wielomiany $M(s) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ oraz $L(s) = s + 2$, które otrzymuje się po dokonaniu obustronnej transformacji Laplace'a pierwszego z tych równań, mają wspólny pierwiastek.

Można wykazać, że równanie różniczkowe i transmitancja są opisami równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy $M(s)$ i $L(s)$ nie mają wspólnych pierwiastków. Z tego też powodu założenie to zostało przez nas przyjęte na samym początku, patrz punkt 2.2.1. Szczegóły są wyjaśnione dokładnie w rozdziale 6.

Na jeden fakt warto jeszcze zwrócić uwagę. Okazuje się, że systemy o różnych transmitancjach mogą mieć jednakowe charakterystyki amplitudowe, ale różne fazowe, np.

$$K(s) \text{ oraz } \frac{s-1}{s+1}K(s),$$

bowiem

$$|K(j\omega)| = \left| \frac{j\omega - 1}{j\omega + 1} K(j\omega) \right|.$$

Z drugiej strony, systemy o transmitancjach $K(s)$ oraz $2K(s)$ mają identyczne charakterystyki fazowe, bowiem $\arg K(j\omega) = \arg[2K(j\omega)]$, ale różne amplitudowe. Wynika stąd zatem wniosek, że ani sama tylko charakterystyka amplitudowa, ani sama fazowa nie określają w sposób jednoznaczny transmitancji.

2.9. Uwagi końcowe

W rozdziale powyższym pewne wyniki są prawdziwe dla wszystkich transmitancji, ale niektóre tylko dla takich, w których $l < m$. Pokażemy teraz, jak one wyglądają, gdy nierówność ta nie jest spełniona.

Badając odpowiedź impulsową, dla $l \geq m$ transmitancję możemy przedstawić w następującej postaci:

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{N(s)}{M(s)} + \sum_{i=0}^{l-m} b_i s^i,$$

gdzie $N(s)$ jest wielomianem o stopniu niższym niż m . Zatem $k(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, gdzie $\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{N(s)/M(s)\}$ oraz $\psi(t) = \sum_{i=0}^{l-m} b_i \delta^{(i)}(t)$. Korzystając z własności A.5.1, stwierdzamy, że $\varphi(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na domkniętej półprostej $t \in [0, \infty)$. Z kolei $\psi(t)$ zawiera impuls Diraca i jego pochodne, tym niemniej $\psi(t) = 0$ dla $t \in (0, \infty)$. Wynika stąd następująca własność:

Własność 2.9.1. *Dla $l \geq m$ odpowiedź impulsowa $k(t)$ zawiera impuls Diraca lub jego pochodne i jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na otwartej półprostej $(0, \infty)$.*

Przechodząc do odpowiedzi skokowej, dla $l > m$ możemy napisać

$$\frac{1}{s}K(s) = \frac{P(s)}{sM(s)} = \frac{N(s)}{sM(s)} + \sum_{i=0}^{l-m-1} b_i s^i,$$

przy czym $P(s)$ jest wielomianem o stopniu nie wyższym niż m , skąd otrzymujemy: $\lambda(t) = \varphi(t) + \phi(t)$, gdzie $\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{P(s)/M(s)\}$ oraz $\phi(t) = \sum_{i=0}^{l-m-1} b_i \delta^{(i)}(t)$. Korzystając z własności A.5.1, wnioskujemy, że $\varphi(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na półprostej domkniętej $t \in [0, \infty)$. Z kolei $\psi(t) = 0$ dla $t \in (0, \infty)$. Wynika stąd kolejna własność:

Własność 2.9.2. *Dla $l > m$ odpowiedź skokowa $\lambda(t)$ zawiera impuls Diraca lub jego pochodne i jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na otwartej półprostej $(0, \infty)$.*

Rozdział 3

Człony dynamiczne

Omówimy teraz charakterystyki prostych systemów nazywanych członami lub elementami dynamicznymi. Zaczniemy od członu proporcjonalnego, potem przejdziemy do inercyjnych. Transmitancje systemów inercyjnych mają bieguny rzeczywiste. Później zajmiemy się systemem oscylacyjnym – jego transmitancja ma parę biegunów zespolonych. Następnie omówimy człony typu całkującego, tzn. systemy, których transmitancje mają biegun w punkcie $s = 0$. Zakończymy na systemach różniczkujących, czyli takich, których transmitancja ma zero w punkcie $s = 0$.

3.1. Człon proporcjonalny

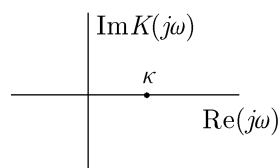
Człon proporcjonalny o wzmocnieniu κ ma transmitancję

$$K(s) = \kappa.$$

Jego odpowiedzią skokową jest

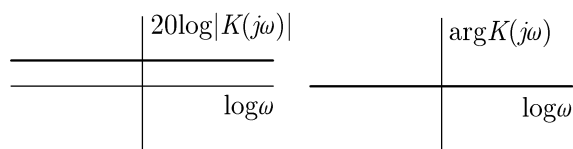
$$\lambda(t) = \kappa 1(t).$$

Odpowiedź na skok jest więc także skokiem, co oznacza, że człon ten nie ma w istocie żadnej dynamiki. Krzywa $y = \kappa u$ jest oczywiście jego charakterystyką statyczną.



Rys. 3.1. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu proporcjonalnego, $\kappa > 0$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest po prostu punktem, patrz rys. 3.1. Charakterystyki logarytmiczne, rys. 3.2, cechują się tym, że ani wzmocnienie amplitudowe, ani faza nie zależą od częstotliwości. Dla dodatniego κ faza jest równa 0, dla ujemnego $-\pi$.

Rys. 3.2. Charakterystyki logarytmiczne członu proporcjonalnego, $\kappa > 1$

3.2. Człony inercyjne

3.2.1. Człon inercyjny pierwszego rzędu

Człon o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{Ts + 1},$$

gdzie $T > 0$, nazywa się inercyjnym pierwszego rzędu, a T jest jego stałą czasową.

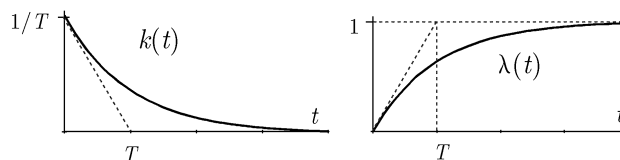
Odpowiedź impulsową i skokową, czyli

$$k(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

oraz

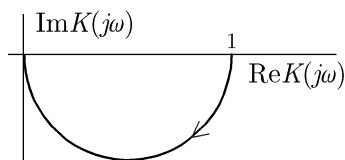
$$\lambda(t) = 1 - e^{-t/T},$$

pokazano na rys. 3.3. Ta ostatnia ustala się na poziomie 1, natomiast $\lambda'(0) = 1/T$. Zatem im większe T , tym wolniej ta odpowiedź narasta. Podobnie, im większe T , tym wolniej opada do zera odpowiedź impulsowa. Współczynnik T jest zatem miarą inercji, czyli bezwładności.



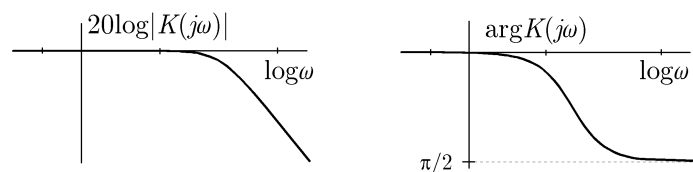
Rys. 3.3. Odpowiedź impulsowa i skokowa członu inercyjnego

Charakterystyka amplitudowo-fazowa pokazana na rys. 3.4 jest półokręgiem i mieści się w jednej ćwiartce płaszczyzny.



Rys. 3.4. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego

Charakterystyki logarytmiczne przedstawiono na rys. 3.5. Zauważmy, że faza zmienia się od zera do $-\pi/2$.



Rys. 3.5. Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego

3.2.2. Człon inercyjny drugiego rzędu

Łącząc szeregowo dwa człony inercyjne, otrzymuje się człon inercyjny drugiego rzędu o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

gdzie $T_1 > 0$, $T_2 > 0$.

Dla $T_1 \neq T_2$, odpowiedzią impulsową jest

$$k(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}),$$

natomiast skokową

$$\lambda(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}.$$

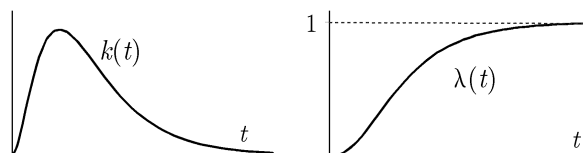
Zatem $k(0) = 0$, $k'(0) = 1/T_1 T_2$ i $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$, $\lambda''(0) = 1/T_1 T_2$. Dla $T_1 = T_2 = T$, wyrażają się one wzorami

$$k(t) = \frac{1}{T^2} t e^{-t/T}$$

oraz

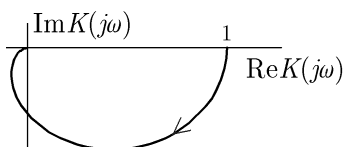
$$\lambda(t) = 1 - \left(\frac{1}{T} t + 1 \right) e^{-t/T}.$$

Teraz $k(0) = 0$, natomiast $k'(0) = 1/T^2$. Z kolei $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$, $\lambda''(0) = 1/T^2$. Przykładowe odpowiedzi pokazano na rys. 3.6.

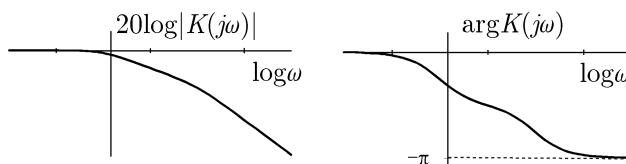


Rys. 3.6. Odpowiedź impulsowa i skokowa członu inercyjnego drugiego rzędu

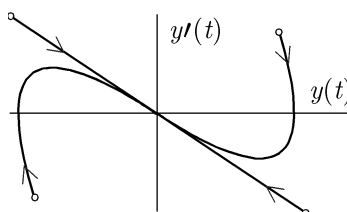
Charakterystyka amplitudowo-fazowa przedstawiona na rys. 3.7 przechodzi kolejno przez dwie ćwiartki płaszczyzny. Na rys. 3.8 pokazano charakterystyki logarytmiczne. Zwróćmy uwagę na to, że faza maleje od zera do $-\pi$. Trajektorie fazowe przedstawia natomiast rys. 3.9.



Rys. 3.7. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego drugiego rzędu



Rys. 3.8. Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego drugiego rzędu



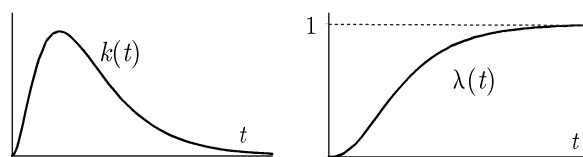
Rys. 3.9. Trajektorie fazowe członu inercyjnego drugiego rzędu

3.2.3. Człony inercyjne wyższych rzędów

System o transmitancji

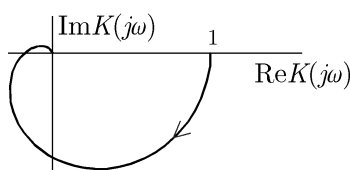
$$K(s) = \frac{1}{(T_1s + 1) \cdots (T_ns + 1)},$$

gdzie $T_1, \dots, T_n > 0$, nazywa się inercyjnym rzędu n . Odpowiedź skokowa, rys. 3.10, ustala się na poziomie 1, a jej $n - 1$ pochodnych jest równych 0 w punkcie $t = 0$ i dopiero $\lambda^{(n)}(0) = 1/T_1 \cdots T_n$. Zatem im większe n , tym większa inercja i wolniejsze narastanie odpowiedzi.



Rys. 3.10. Odpowiedź impulsowa i skokowa członu inercyjnego trzeciego rzędu

Charakterystyka amplitudowo-fazowa przechodzi kolejno przez n ćwiartek wykresu. Dla $n = 3$, jej przykład pokazano na rys. 3.11.



Rys. 3.11. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego trzeciego rzędu

3.3. Człon oscylacyjny

Człon o transmitancji

$$K(s) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{(s + \sigma)^2 + \omega^2},$$

gdzie $\sigma > 0$, $\omega \neq 0$, nazywa się oscylacyjnym. Transmitancja ta ma parę sprzężonych biegunów zespolonych, a mianowicie: $s_1 = -\sigma + j\omega$ i $s_2 = -\sigma - j\omega$, przy czym $\sigma > 0$, $\omega > 0$. Człon ten nie może zatem powstać przez połączenie szeregowo dwóch członów inercyjnych, jest czymś zasadniczo odmiennym. W jego odpowiedziach, impulsowej i skokowej, pojawiają się bowiem oscylacje, stąd też jego nazwa.

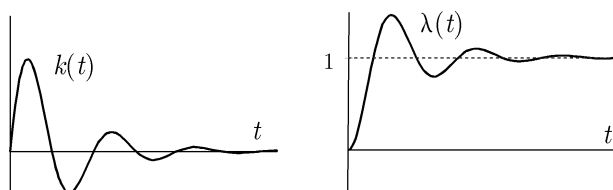
Odpowiedź skokowa to

$$\lambda(t) = 1 - \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie $\varphi = \arctg(\omega/\sqrt{\sigma^2 + \omega^2})$, a impulsowa

$$k(t) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\sigma t} \sin \omega t.$$

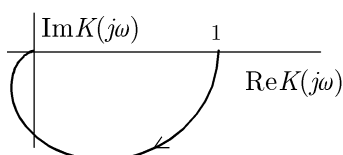
Pokazano je na rys. 3.12.



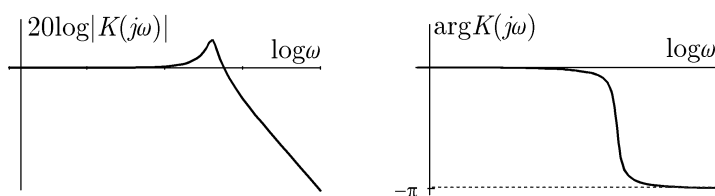
Rys. 3.12. Odpowiedź impulsowa i skokowa członu oscylacyjnego

Zespolone bieguny transmitancji są przyczyną oscylacji występujących w obydwu odpowiedziach. Pulsacją tych drgań jest $\omega = \text{Im } s_1 = \text{Im } s_2$. Ich tłumienie zależy natomiast od $\sigma = \text{Re } s_1 = \text{Re } s_2$, bowiem odpowiedź impulsowa jest ograniczona przez $|e^{-\sigma t}|$. Im większe σ , tym silniejszy efekt tłumienia. Nietrudno ponadto sprawdzić, że $k(0) = 0$, $k'(0) = \sigma^2 + \omega^2$ oraz $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ i $\lambda''(0) = \sigma^2 + \omega^2$.

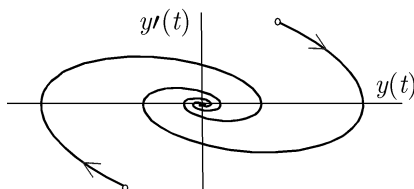
Charakterystykę amplitudowo-fazową przedstawiono na rys. 3.13. Podobnie jak charakterystyka elementu inercyjnego drugiego rzędu, przechodzi ona przez dwie kolejne ćwiartki. Charakterystyki logarytmiczne przedstawia rys. 3.14. Trajektorie fazowe pokazane są na rys. 3.15.



Rys. 3.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu oscylacyjnego



Rys. 3.14. Charakterystyki logarytmiczne członu oscylacyjnego



Rys. 3.15. Trajektorie fazowe członu oscylacyjnego

3.4. Człony całkujące

Omówimy teraz element całkujący oraz całkujący z inercją, tzn. taki, który powstaje przez szeregowe połączenie członu całkującego i inercyjnego.

3.4.1. Człon całkujący

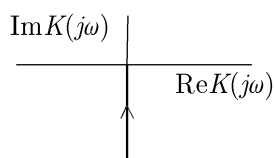
Człon całkujący ma transmitancję

$$K(s) = \frac{1}{s}.$$

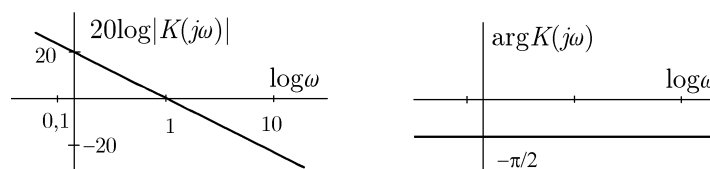
Jego odpowiedź impulsowa i skokowa to

$$k(t) = 1(t) \text{ oraz } \lambda(t) = t.$$

Charakterystyki częstotliwościowe pokazano na rys. 3.16 oraz 3.17. Opóźnienie fazowe równe $-\pi/2$ nie zależy od pulsacji, a wzmocnienie maleje o 20 dB na dekadę.



Rys. 3.16. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego



Rys. 3.17. Charakterystyki logarytmiczne członu całkującego

3.4.2. Człon całkujący z inercją

Człon całkujący z inercją ma transmitancję

$$K(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)},$$

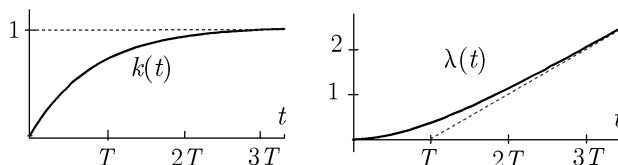
przy czym $T > 0$. Jest on równoważny szeregowemu połączeniu elementu całkującego i inercyjnego. Jego odpowiedzią impulsową jest

$$k(t) = 1 - e^{-t/T},$$

a skokową, patrz rys. 3.18,

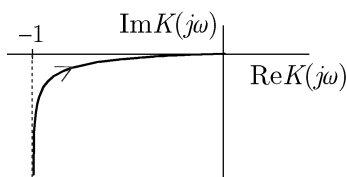
$$\lambda(t) = t - T(1 - e^{-t/T}).$$

Jest oczywiste, że $k(0) = 0$, $k'(0) = 1/T$ oraz $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ i $\lambda''(0) = 1/T$.

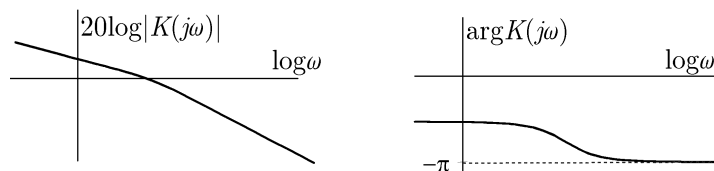


Rys. 3.18. Odpowiedź impulsowa i skokowa członu całkującego z inercją

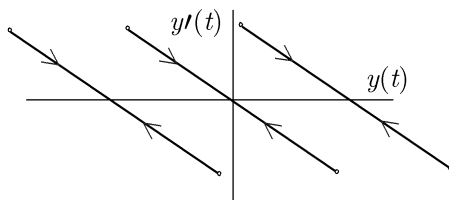
Charakterystykę amplitudowo-fazową przedstawiono na rys. 3.19, natomiast charakterystyki logarytmiczne na rys. 3.20. Zauważmy, że przesunięcie fazowe zmienia się od $-\pi/2$ do $-\pi$. Trajektorie fazowe pokazano na rys. 3.21.



Rys. 3.19. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego z inercją



Rys. 3.20. Charakterystyki logarytmiczne członu całkującego z inercją



Rys. 3.21. Trajektorie fazowe członu całkującego z inercją

3.5. Człony różniczkujące

Przedstawimy element różniczkujący i różniczkujący z inercją i omówimy poszczególne ich charakterystyki.

3.5.1. Człon różniczkujący

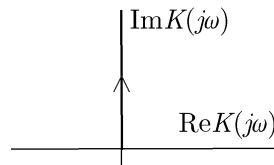
Człon o transmitancji

$$K(s) = s$$

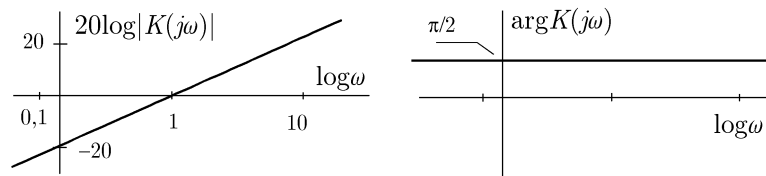
nazywa się różniczkującym. Jego odpowiedź skokowa to

$$\lambda(t) = \delta(t).$$

Odpowiednie charakterystyki częstotliwościowe są pokazane na kolejnych rysunkach, patrz rys. 3.22 i rys. 3.23. Zwracamy uwagę, że wzmocnienie wzrasta wraz z pulsacją w tempie 20 dB na dekadę. Przesunięcie fazowe jest równe $\pi/2$ i nie zależy od pulsacji.



Rys. 3.22. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu różniczkującego



Rys. 3.23. Charakterystyki logarytmiczne członu różniczkującego

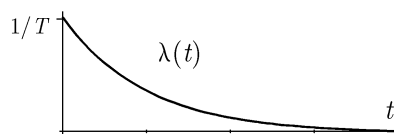
3.5.2. Człon różniczkujący z inercją

Człon o transmitancji

$$K(s) = \frac{s}{Ts + 1},$$

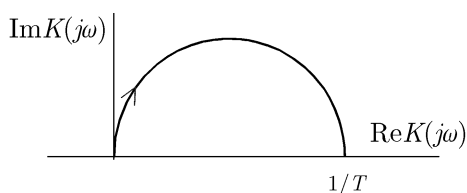
$T > 0$, nazywa się różniczkującym z inercją. Można uważać, że powstał on przez szeregowe połączenie członu różniczkującego i inercyjnego. Jego odpowiedź skokowa jest więc taka sama jak impulsowa członu inercyjnego, czyli jest równa, patrz rys. 3.24,

$$\lambda(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}.$$

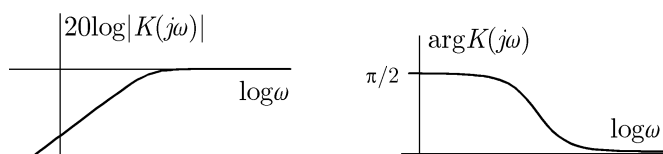


Rys. 3.24. Odpowiedź skokowa członu różniczkującego z inercją

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest półokręgiem, rys. 3.25. Charakterystyki logarytmiczne przedstawia rys. 3.26.



Rys. 3.25. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu różniczkującego z inercją



Rys. 3.26. Charakterystyki logarytmiczne członu różniczkującego z inercją

3.6. Przybliżone charakterystyki logarytmiczne

Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe członu proporcjonalnego, różniczkującego i całkującego są liniami prostymi i z tego powodu łatwo je narysować. Okazuje się, że, bez popełnienia dużego błędu, charakterystyki innych członów można aproksymować półprostymi lub odcinkami. Otrzymuje się w ten sposób tzw. charakterystyki przybliżone. W rezultacie charakterystyki systemów zbudowanych przez kaskadowe połączenie wszystkich takich członów można przybliżać za pomocą odcinków. Omówimy teraz kolejno takie przybliżenia odpowiadające poszczególnym elementom dynamicznym.

Zacniemy od elementu inercyjnego, którego transmitancją jest

$$K(s) = \frac{1}{Ts + 1},$$

natomiast

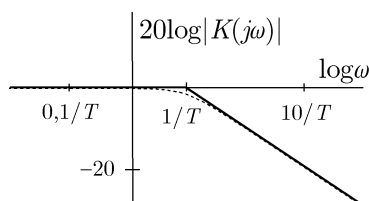
$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

transmitancją widmową. Wynika stąd, że

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

Zbadamy własności $|K(j\omega)|$ na dwóch odcinkach, a mianowicie dla $0 < \omega < 1/T$ oraz dla $1/T < \omega < \infty$.

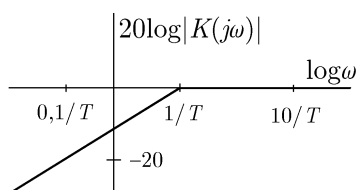
Dla $\omega T \ll 1$, czyli dla $\omega \ll 1/T$, możemy napisać, że $1 + \omega^2 T^2 \approx 1$. Zatem $|K(j\omega)| \approx 1$, czyli $20 \log |K(j\omega)| \approx 0$. Dla $1 \ll \omega T$, czyli $1/T \ll \omega$, natomiast $1 + \omega^2 T^2 \approx \omega^2 T^2$, skąd wynika, że $|K(j\omega)| \approx 1/\omega T$, a więc $20 \log |K(j\omega)| \approx -\log \omega T$. Na pierwszym z odcinków zatem $20 \log |K(j\omega)| \approx 0$, na drugim wzmocnienie maleje o około 20 dB przy wzroście ω o dekadę.



Rys. 3.27. Przybliżona logarytmiczna charakterystyka amplitudowa członu inercyjnego

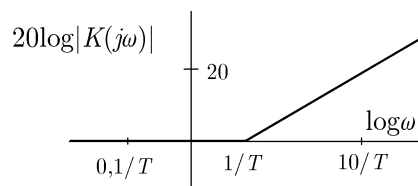
W rezultacie dochodzimy do przybliżonej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej przedstawionej na rys. 3.27. W przedziale $\omega \in (0, 1/T)$ jest ona stała, a w przedziale $\omega \in [1/T, \infty)$ opada ona z szybkością 20 dB na dekadę. Linia przerywaną pokazano charakterystykę dokładną. Największy błąd przybliżenia, w punkcie $\omega = 1/T$, wynosi 3 dB.

Ćwiczenie 3.6.1. Sprawdzić, że przybliżona charakterystyka amplitudowa elementu różniczkującego z inercją o transmitancji $s/(Ts + 1)$ ma kształt jak na rys. 3.28 oraz że dla $\omega \in (-\infty, 1/T]$ wznosi się ona z szybkością 20 dB na dekadę.

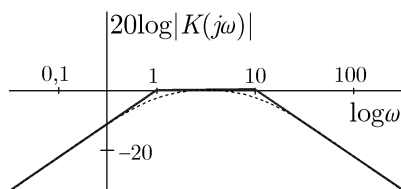


Rys. 3.28. Przybliżona logarytmiczna charakterystyka amplitudowa członu różniczkującego z inercją, ćwiczenie 3.6.1

Ćwiczenie 3.6.2. Przybliżona charakterystyka amplitudowa systemu o transmitancji $Ts + 1$ ma kształt jak na rys. 3.29. Podać jej związek z charakterystyką członu $1/(Ts + 1)$.

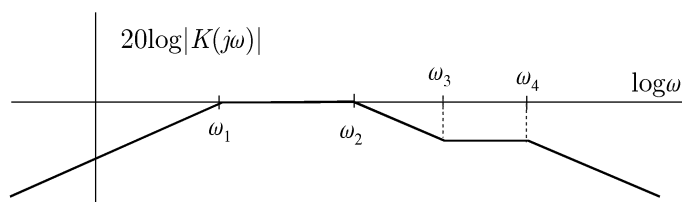
Rys. 3.29. Przybliżona charakterystyka amplitudowa członu $sT + 1$, ćwiczenie 3.6.2

Ćwiczenie 3.6.3. Sprawdzić, że przybliżona charakterystyka amplitudowa systemu, który ma transmitancję $s/(0,1s + 1)(s + 1)$ – jako suma przybliżonych charakterystyk członów o transmitancjach s , $1/(0,1s + 1)$ oraz $1/(s + 1)$ – ma kształt jak na rys. 3.30. Linią przerywaną zaznaczono charakterystykę dokładną.



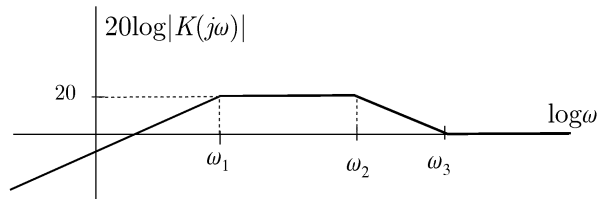
Rys. 3.30. Przybliżona charakterystyka amplitudowa, ćwiczenie 3.6.3

Ćwiczenie 3.6.4. Wyznaczyć transmitancję systemu, którego przybliżona amplitudowa charakterystyka logarytmiczna przedstawiona jest na rys. 3.31. Nachylenie poszczególnych odcinków jest równe 0 lub ± 20 dB na dekadę.



Rys. 3.31. Przybliżona charakterystyka logarytmiczna, ćwiczenie 3.6.4

Ćwiczenie 3.6.5. Znaleźć transmitancję systemu, o przybliżonej amplitudowej charakterystyce logarytmicznej przedstawionej na rys. 3.32. Nachylenie poszczególnych odcinków jest równe 0 lub ± 20 dB na dekadę.



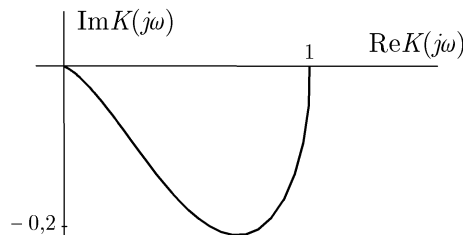
Rys. 3.32. Przybliżona charakterystyka logarytmiczna, ćwiczenie 3.6.5

3.7. Uwagi końcowe

Transmitancja członu inercyjnego ma jeden ujemny biegun rzeczywisty, człony inercyjne wyższych rzędów mają ich odpowiednio więcej. Wszystkie te bieguny są także rzeczywiste i ujemne. Transmitancja członu oscylacyjnego ma natomiast parę biegunów zespolonych o ujemnej części rzeczywistej.

Transmitancja członu całkującego ma biegun w zerze. Gdy dochodzi inercja, pojawia się rzeczywisty biegun ujemny. Omówione człony różniczkujące charakteryzują się natomiast tym, że licznikiem ich transmitancji jest s . Rzeczywiste bieguny transmitancji odpowiadają natomiast inercji.

Możemy zatem stwierdzić, że rzeczywisty biegun ujemny odpowiada za inercję, para biegunów zespolonych za oscylacje, a biegun w zerze za całkowanie. Jeśli wielomian w liczniku transmitancji ma pierwiastek w zerze, występuje różniczkowanie.

Rys. 3.33. Charakterystyka systemu o transmitancji $1/(s-1)(s+2)$

Na koniec warto zauważyć, że zastrzeżenia dotyczące dodatnich wartości stałych czasowych w poszczególnych transmitancjach są istotne. Dzięki nim bieguny transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie, bowiem ich części rzeczywiste są wtedy ujemne. Systemy takie nazywają się stabilne, patrz rozdział 4. Jeśli jest inaczej, tzn. jeśli bieguny leżą w prawej półpłaszczyźnie, to charakterystyki wyglądają inaczej. Dla przykładu, charakterystykę amplitudowo-fazową systemu o transmitancji

$$\frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)},$$

gdzie $T_1 = -1$, $T_2 = 2$, a więc kojarzącą się – niesłusznie – z transmitancją elementu inercyjnego drugiego rzędu, pokazano na rys. 3.33.

Rozdział 4

Stabilność

Stabilność jest jedną z najważniejszych własności, której wymaga się od systemów dynamicznych. W szczególności muszą ją mieć systemy automatycznej regulacji. Poznamy teraz definicję stabilności i własność tę powiążemy z transmitancją. Omówimy następnie własności systemów stabilnych.

4.1. Definicja

Przypominamy, że system o równaniu różniczkowym (2.1) ma transmitancję wyrażoną wzorem

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $M(s)$ i $L(s)$ są wielomianami jak we wzorach (2.3) i (2.4). Przypominamy także, że wielomian

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

nazywamy charakterystycznym.

Przy zerowym pobudzeniu, czyli sygnale wejściowym takim, że $u(t) = 0$ na całej półprostej $t \in (0, \infty)$, zachowanie systemu jest opisywane przez jednorodne równanie różniczkowe

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (4.1)$$

Jego warunkiem początkowym jest

$$y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(m-1)}(0).$$

Przez

$$s_1, s_2, \dots, s_m$$

oznaczyliśmy pierwiastki wielomianu charakterystycznego $M(s)$, czyli bieguny transmitancji $K(s)$. Jak pamiętamy mogą być one rzeczywiste lub zespolone, pojedyncze lub wielokrotne. W celu ściślejszego ustalenia związku pomiędzy biegunami a zachowaniem się systemu przy zerowym pobudzeniu, czyli rozwiązaniem równania jednorodnego, oznaczymy je następująco:

- rzeczywiste ξ_1, \dots, ξ_p , różne o krotnościach k_1, \dots, k_p ,
- pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, różne o krotnościach $\kappa_1, \dots, \kappa_q$, przy czym $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, gdzie $i = 1, \dots, q$.

Jest przy tym oczywiste, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = m$.

Podamy teraz definicję stabilności.

Definicja 4.1.1 (stabilność). *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

to system nazywamy stabilnym.

Systemy, które nie są stabilne nazywamy niestabilnymi. Wśród niestabilnych wyróżnia się pewną klasę systemów, o których się mówi, że są na granicy stabilności.

Definicja 4.1.2. *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |y(t)| < \infty,$$

to mówimy, że system jest na granicy stabilności.

Na mocy definicji zatem w systemach stabilnych wyjście systemu zdąża do zera dla każdego warunku początkowego, natomiast w systemach na granicy stabilności jest ono ograniczone. Pobudzenie jest przy tym zerowe.

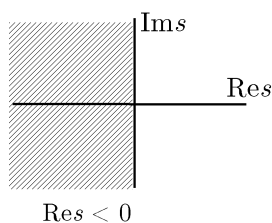
4.2. Twierdzenie o stabilności

O związku pomiędzy stabilnością i transmitancją orzeka następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2.1 (stabilność). *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} s_1 < 0, \operatorname{Re} s_2 < 0, \dots, \operatorname{Re} s_m < 0. \quad (4.2)$$

Można zatem powiedzieć, że system jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny liczb zespolonych, patrz rys. 4.1.



Rys. 4.1. Lewa półpłaszczyzna liczb zespolonych

Aby wykazać prawdziwość tego ważnego twierdzenia, podamy najpierw pewien lemat. Zauważmy, że dokonanie przekształcenia Laplace'a wobec obydwu stron równania różniczkowego (4.1) pozwala napisać, że

$$Y(s) = \frac{W(s)}{M(s)}. \quad (4.3)$$

Uwzględniono przy tym to, że:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{y^{(1)}(t)\} &= sY(s) - y(0), \\ \mathfrak{L}\{y^{(2)}(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0), \\ &\vdots \\ \mathfrak{L}\{y^{(m)}(t)\} &= s^mY(s) - s^{m-1}y(0) - \dots - y^{(m-1)}(0). \end{aligned}$$

Jest przy tym oczywiste, że współczynniki wielomianu

$$W(s) = w_{m-1}s^{m-1} + w_{m-2}s^{m-2} + \dots + w_1s + w_0 \quad (4.4)$$

zależą od warunku początkowego oraz a_1, \dots, a_m . Poniższy lemat mówi, że można je kształtować dowolnie poprzez odpowiedni dobór warunku początkowego.

Lemat 4.2.1. *Dla każdego wielomianu $W_0(s)$ stopnia $m-1$ (czyli dowolnych jego współczynników) istnieje warunek początkowy taki, że $W(s) \equiv W_0(s)$.*

Dowód. Jak łatwo zauważyć:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_1y(0) + a_2y^{(1)}(0) + \dots + a_{m-1}y^{(m-2)}(0) + a_my^{(m-1)}(0), \\ w_1 &= a_2y(0) + a_3y^{(1)}(0) + \dots + a_my^{(m-2)}(0), \\ &\vdots \\ w_{m-2} &= a_{m-1}y(0) + a_my^{(1)}(0), \\ w_{m-1} &= a_my(0). \end{aligned}$$

Oznaczając przez $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}]^T$ wektor współczynników wielomianu $W(s)$, przez $\mathbf{y}(0) = [y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0)]^T$ wektor warunku początkowego oraz przez

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_m & \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{m-1} & a_m & & & & \\ a_m & & & & & \end{bmatrix}$$

odpowiednią macierz współczynników, możemy napisać $\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{y}(0)$. Ponieważ $\det \mathbf{P} = (-1)^{m(m-1)/2} a_m^m \neq 0$, dla każdego zadanego wektora \mathbf{w}_0 współczynników wielomianu $W_0(s)$ istnieje wektor $\mathbf{y}(0)$ warunku początkowego taki, że $\mathbf{y}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}_0$, co oznacza, że dowód został zakończony. ■

Dzięki lematowi 4.2.1 możemy teraz udowodnić twierdzenie 4.2.1, które wiąże stabilność z biegunami transmitancji.

Dowód twierdzenia 4.2.1. Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej wykazujemy, że z warunku (4.2) wynika stabilność, w drugiej, że ze stabilności wynika warunek (4.2). Pierwsza część dowodzi zatem wystarczalności, a druga konieczności tego warunku.

Założmy, że warunek (4.2) jest spełniony. Na mocy twierdzenia A.4.3, z zależności (4.3) wynika, że sygnał wyjściowy wyraża się wzorem:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(j-1)!} \alpha_{ij} t^{j-1} e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{ij}), \quad (4.5)$$

gdzie α_{ij} , β_{ij} oraz φ_{ij} są pewnymi liczbami zależnymi od warunku początkowego. Ponieważ warunek (4.2) oznacza, że

$$\xi_1 < 0, \dots, \xi_p < 0; \sigma_1 < 0, \dots, \sigma_q < 0, \quad (4.6)$$

pociąga on za sobą zbieżność do zera każdego ze składników powyższej sumy. Zatem, dla każdego zestawu współczynników α_{ij} oraz β_{ij} , czyli każdego warunku początkowego, zachodzi $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. System jest więc stabilny.

W drugiej części dowodu zakładamy, że system jest stabilny. Przypuśćmy najpierw, że s_1 jest biegunem rzeczywistym. Z lematu 4.2.1 wynika, że istnieje warunek początkowy taki, że $W(s) = a_m \prod_{i=2}^m (s - s_i)$. Ponieważ $M(s) = a_m \prod_{i=1}^m (s - s_i)$, zatem dla tego warunku

$$\frac{W(s)}{M(s)} = \frac{1}{s - s_1},$$

czyli $y(t) = e^{s_1 t}$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, więc $s_1 < 0$, czyli $\operatorname{Re} s_1 < 0$.

Weźmy teraz pod uwagę parę sprzężonych biegunów zespolonych, powiedzmy (s_1, s_2) , gdzie $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ i $s_2 = \sigma_1 - j\omega_1$. Z lematu 4.2.1 wynika istnienie warunku początkowego, dla którego $W(s) = \omega_1 \prod_{i=3}^m (s - s_i)$. Dla warunku tego

$$\frac{W(s)}{M(s)} = \frac{\omega_1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{\omega_1}{(s - \sigma_1)^2 + \omega_1^2},$$

skąd wynika, że $y(t) = e^{\sigma_1 t} \sin \omega_1 t$. Zatem $\sigma_1 < 0$, czyli $\operatorname{Re} s_1 < 0$ i $\operatorname{Re} s_2 < 0$.

Ponieważ powyższa argumentacja ma zastosowanie wobec każdego bieguna rzeczywistego i każdej pary biegunów zespolonych, wykazaliśmy więc, że ze stabilności wynika warunek (4.2), co kończy dowód. ■

Następne twierdzenie orzeka o relacji pomiędzy granicą stabilności i transmitancją.

Twierdzenie 4.2.2 (granica stabilności). *System znajduje się na granicy stabilności wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} s_1 \leq 0, \operatorname{Re} s_2 \leq 0, \dots, \operatorname{Re} s_m \leq 0,$$

przy czym bieguny transmitancji, dla których zachodzą równości, są co najwyżej jednokrotne.

Dowód. Dowód jest podobny do rozumowania, które uzasadnia twierdzenie 4.2.1 i dlatego ograniczymy się do zwrócenia uwagi na różnice. Zauważmy, że biegun rzeczywisty $\xi_1 = 0$ o krotności k wnosi do reakcji systemu składową t^{k-1} . Podobnie para pierwiastków urojonych ($\eta_1 = j\omega_1, \bar{\eta}_1 = -j\omega_1$) o krotności k wnosi składową $t^{k-1} \cos(\omega_1 t + \varphi_{11})$. Dla $k = 1$, w obydwu przypadkach odpowiednia składowa odpowiedzi jest ograniczona, natomiast nie jest ograniczona dla $k \geq 2$. ■

Uwaga 4.2.1. Należy zwrócić uwagę na to, że systemy stabilne są niekiedy nazywane asymptotycznie stabilnymi. O systemach na granicy stabilności mówi się wtedy, że są stabilne. Pozostałe nazywa się niestabilnymi.

Ćwiczenie 4.2.1. Dla systemu o transmitancji $1/(s+1)(s+2)$ znaleźć warunek początkowy, dla którego $y(t) = e^{-t}, e^{-2t}, e^{-t} - e^{-2t}$.

Ćwiczenie 4.2.2. Dla systemu o transmitancji $K(s) = 1/(s+1)(s+2)$ znaleźć warunki początkowe, dla których sygnałem wyjściowym jest $k(t)$ i $k'(t)$.

Ćwiczenie 4.2.3. Dla systemu o transmitancji $1/s(s+1)(s+2)$ znaleźć warunki początkowe, dla których sygnałem wyjściowym jest $1, e^{-t}, e^{-2t}, 1 + e^{-t}, 1 + e^{-2t}, e^{-t} + e^{-2t}, 1 + e^t + e^{-2t}$.

Ćwiczenie 4.2.4. Korzystając z lematu 4.2.1, wykazać istnienie warunków początkowych takich, że:

a) $y(t) = e^{s_i t} \hat{=} 1/(s - s_i)$, dla każdego i ,

b) $\mathcal{L}\{y(t)\} = 1/(s - s_1) \cdots (s - s_m)$,

c) jeśli s_i jest biegunem o krotności κ_i , to $y(t) = t^{j-1} e^{s_i t} \hat{=} (j-1)!/(s - s_i)^j$, gdzie $j = 1, \dots, \kappa_i$,

d) $y(t) = k(t)$ dla wszystkich $t \geq 0$.

Wykazać, że nie istnieje warunek początkowy, dla którego $y(t) = \lambda(t)$ dla wszystkich $t \geq 0$.

Przykład 4.2.1. Dla systemu opisywanego równaniem różniczkowym

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u'(t) + u(t)$$

otrzymujemy

$$Y(s) = \frac{3sy(0-) + 3y'(0-) + 2y(0-)}{(s+1)(s+2)} + \frac{4s+1}{(s+1)(s+2)}U(s),$$

patrz przykład 2.2.2. Jeśli zatem $u(t) = \delta(t)$ i warunkiem początkowym jest $y(0-) = -4/3$ i $y'(0-) = 5$, to $Y(s) = 0$, co oznacza, że $y(t) = 0$ dla wszystkich $t \in (0, \infty)$. Jeśli natomiast $u(t) = 1(t)$, to

$$Y(s) = \frac{3sy(0-) + 3y'(0-) + 2y(0-)}{(s+1)(s+2)} + \frac{4s+1}{s(s+1)(s+2)},$$

skąd wynika, że nie istnieje warunek początkowy, dla którego $y(t) = 0$ dla wszystkich $t \in (0, \infty)$.

Ćwiczenie 4.2.5. Wykazać, że dla każdego systemu:

- a) istnieje warunek początkowy taki, że jeśli $u(t) = \delta(t)$, to $y(t) = 0$ dla wszystkich $t \in (0, \infty)$,
 b) nie istnieje warunek początkowy taki, że jeśli $u(t) = 1(t)$, to $y(t) = 0$ dla wszystkich $t \in (0, \infty)$.

Ćwiczenie 4.2.6. Załóżmy, że $a_m = 1$. Korzystając z ćwiczenia C.5.4, sprawdzić, że, dla $i = 1, \dots, m$, bieguny transmitancji spełniają nierówności $|s_i| \leq \min(1, \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|)$ oraz $|s_i| \leq \min(|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{m-1}|)$.

4.3. Własności systemów stabilnych

Zbadamy teraz własności systemów stabilnych. Omówimy ich reakcję na standardowe wymuszenia, czyli impuls Diraca $\delta(t)$, skok jednostkowy $1(t)$ oraz sinusoidę $\sin \omega t$.

4.3.1. Odpowiedź impulsowa

Własność 4.3.1. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0. \quad (4.7)$$

Dowód. To, że ze stabilności wynika równość (4.7) jest oczywiste, bowiem wszystkie bieguny transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie, a $k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}$. Aby wykazać odwrotną implikację, załóżmy, że (4.7) zachodzi i transmitancja ma dwa bieguny rzeczywiste ξ_1 i ξ_2 . W sytuacji tej (pod warunkiem, że $l < m$)

$$k(t) = \alpha_1 e^{\xi_1 t} + \alpha_2 e^{\xi_2 t},$$

gdzie $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. Zapowiedziana implikacja jest oczywista. Uogólnienie na przypadek dowolnych biegunów jest łatwe. Dowód został więc zakończony. ■

Ćwiczenie 4.3.1. Niech system będzie stabilny i niech $\rho = \max_i (\operatorname{Re} s_i)$. Wykazać, że:

- a) $|k(t)| \leq c_1 e^{\rho t}$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,
 b) $|k(t)| \leq c_2 t^{m-1} e^{\rho t} \leq c_3 e^{(\rho+\varepsilon)t}$, pewne c_2 , c_3 oraz dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Własność 4.3.2. Niech $l < m$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^{\infty} |k(t)| dt < \infty. \quad (4.8)$$

Dowód. To, że stabilność, czyli warunek (4.2), pociąga za sobą (4.8), wynika z ćwiczenia 4.3.1 i tego, że $\rho < 0$. W celu wykazania przeciwnej implikacji wystarczy powtórzyć argumenty z dowodu własności 4.3.1. ■

Poniższa własność, którą wykorzystamy w rozdziale 8 jest oczywista.

Własność 4.3.3. Niech $l < m$. W systemie stabilnym $\max_{t \in (0, \infty)} |k'(t)| < \infty$.

Ćwiczenie 4.3.2. System jest stabilny, a pobudzenie $u(t)$ ograniczone. Wykazać, że jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ istnieje, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ także. Ponadto, jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

4.3.2. Odpowiedź skokowa

Własność 4.3.4. Granica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \quad (4.9)$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny. Ponadto, w systemie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = K(0) = \int_0^{\infty} k(t) dt. \quad (4.10)$$

Dowód. Punktem wyjściowym dowodu jest to, że $\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^{-1}K(s)\}$. Argumentując jak w dowodzie własności 4.3.1, wykazujemy, że stabilność jest równoważna z istnieniem granicy (4.9). Równość (4.10) wynika natomiast z tego, że – na mocy twierdzenia granicznego A.5.2 – $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{s \rightarrow 0} K(s)$. ■

Wprowadzimy teraz pojęcie wzmocnienia w stanie ustalonym, będące odpowiednikiem wzmocnienia statycznego elementu liniowego. Podaje je poniższa definicja:

Definicja 4.3.1. Jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ istnieje, to nazywamy ją wzmocnieniem systemu w stanie ustalonym.

Widzimy więc, że tylko w odniesieniu do systemów stabilnych można mówić o wzmocnieniu w stanie ustalonym. Tylko one mają charakterystykę statyczną, tzn. charakterystykę wiążącą wysokość skoku na wejściu z poziomem, na którym ustala się odpowiedź systemu. Jest nią prosta $y = K(0)u$.

Wśród systemów stabilnych są takie, w których $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$. W systemach tych $b_0 = 0$, czyli $L(0) = 0$. Wynika stąd, że $K(0) = 0$, co oznacza, że ich współczynnik wzmocnienia w stanie ustalonym jest równy 0.

Przykład 4.3.1. Dla systemu o transmitancji $s(s+1)/(s+2)(s+3)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$.

Ćwiczenie 4.3.3. Niech system będzie stabilny i niech $u(t)$ będzie ograniczone. Wykazać, że jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \neq 0$, to $K(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) / \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$.

Ćwiczenie 4.3.4. Załóżmy, że system jest stabilny. Niech $\rho = \max_i (\operatorname{Re} s_i)$. Oznaczając $\lambda_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$, wykazać, że:

- $|\lambda(t) - \lambda_{\infty}| \leq c_1 e^{\rho t}$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,
- $|\lambda(t) - \lambda_{\infty}| \leq c_2 e^{(\rho + \varepsilon)t}$, pewne c_2 i dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Ćwiczenie 4.3.5. Niech system będzie stabilny i niech $u(t) = 1(t)$. Podać transmitancję systemu, w którym $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Ćwiczenie 4.3.6. Niech system będzie stabilny i niech $u(t) = t$. Podać transmitancję systemu, w którym $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Ćwiczenie 4.3.7. Załóżmy, że system jest stabilny. Niech $u(t) = t^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Wykazać, że jeśli $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-p} K(s) = 0$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

4.3.3. Transmitancja widmowa

Transmitancja widmowa ma silny związek z reakcją systemu na pobudzenie sygnałem sinusoidalnym. Zbadamy teraz te relacje.

Odpowiedź na pobudzenie sinusoidalne

Dotychczas badaliśmy reakcję systemu na dwa standardowe pobudzenia, a mianowicie impuls Diraca i skok jednostkowy. Teraz zajmiemy się odpowiedzią systemu stabilnego na pobudzenie sinusoidalne.

Założmy, że warunek początkowy jest zerowy, natomiast $u(t) = \sin \omega t$. Ponieważ $\mathfrak{L}\{\sin \omega t\} = \omega/(s^2 + \omega^2)$, a zatem

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} K(s) = \frac{\omega L(s)}{(s^2 + \omega^2)M(s)}.$$

Z twierdzenia A.4.1 o rozkładzie wynika zatem, że

$$Y(s) = \frac{\alpha(\omega)}{s - j\omega} + \frac{\bar{\alpha}(\omega)}{s + j\omega} + \frac{R(s)}{M(s)},$$

gdzie, jak można sprawdzić, $2j\alpha(\omega) = K(j\omega)$, natomiast $R(s)$ jest pewnym wielomianem. Skorzystanie z wzoru (A.13) prowadzi do wniosku, że $y(t) = 2|\alpha(\omega)| \cos(\omega t + \arg \alpha) + p(t)$, gdzie $p(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{R(s)/M(s)\} + \mathfrak{L}^{-1}\{W(s)/M(s)\}$. Ponieważ $2|\alpha(\omega)| = |K(j\omega)|$ oraz $\arg \alpha(\omega) = \arg K(j\omega) - \pi/2$, zatem

$$y(t) = |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + p(t),$$

gdzie $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$.

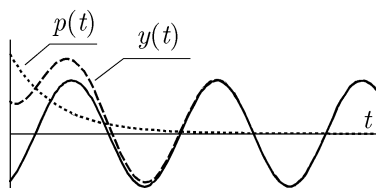
Ze stabilności systemu wynika, że wszystkie pierwiastki wielomianu $M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie. Korzystając więc z lematu A.5.1, zauważamy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$. Z tego też powodu $p(t)$ nazywa się składową przejściową odpowiedzi. Druga składowa będąca sinusoidą o stałej amplitudzie nazywa się ustaloną. Dla dużych t składowa przejściowa jest bliska zeru – sygnał na wyjściu jest więc w przybliżeniu równy składowej ustalonej, tzn.

$$y(t) \approx |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Przykładową odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne pokazano na rys. 4.2.

O składowej ustalonej odpowiedzi na pobudzenie $u(t) = \sin \omega t$ można zatem stwierdzić, że:

- jest ona sinusoidą o tej samej pulsacji co pobudzenie,
- jej amplituda zależy od ω i jest równa $|K(j\omega)|$,
- przesunięcie fazowe zależy od ω i jest równe $\arg K(j\omega)$.



Rys. 4.2. Odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne;
linia ciągła – składowa ustalona

Należy zwrócić uwagę na to, że składowa ustalona jest sinusoidą o tej samej częstotliwości co sinusoida na wejściu. W związku z tym mówi się, że system liniowy nie wprowadza zniekształceń częstotliwościowych. Cecha ta odróżnia systemy liniowe od nieliniowych. W tych ostatnich reakcja na sinusoidę zawiera bowiem wyższe harmoniczne, czyli składowe typu $\sin(n\omega t)$, $n = 2, 3, \dots$, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 4.3.2. W nieliniowym systemie bez dynamiki o charakterystyce $y = \phi(u)$ określonej wzorem

$$\phi(u) = \begin{cases} -1, & \text{dla } u < 0, \\ 1, & \text{dla } u \geq 0, \end{cases}$$

reakcją na periodyczne wymuszenie $u(t) = \sin(\omega t)$ jest sygnał periodyczny. Jego rozwinięcie w szereg trygonometryczny ma następującą postać: $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$, gdzie $a_n = (1/\pi n)[1 - (-1)^n]$. Reakcja ta zawiera wyższe harmoniczne.

Przykład 4.3.3. Załóżmy, że pobudzenie $u(t)$ jest sygnałem periodycznym, co oznacza, że $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$. Jest oczywiste, że odpowiedź systemu stabilnego ma postać: $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) + p(t)$, gdzie $b_n = a_n |K(j\omega n)|$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$. Jeśli zatem pobudzenie jest periodyczne, to odpowiedź w stanie ustalonym także jest periodyczna.

Odpowiedź impulsowa i skokowa

Niech teraz $l < m$. Ponieważ dla systemu stabilnego zachodzi własność (4.8), a więc istnieje całka $\int_0^{\infty} k(t)e^{-j\omega t} dt$. Wynika z tego istnienie transformaty Fouriera $\bar{K}(\omega)$ odpowiedzi impulsowej, patrz podrozdział A.7, oraz równość $K(\omega) = K(j\omega)$.

Podamy teraz związki między transmitancją widmową a odpowiedzią impulsową i skokową.

Własność 4.3.5. Niech $l < m$. W systemie stabilnym:

$$\operatorname{Re} K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) \cos(\omega t) dt,$$

$$\operatorname{Im} K(j\omega) = - \int_0^{\infty} k(t) \sin(\omega t) dt.$$

Dowód. Dzięki własności 4.3.2 całki $\int_0^{\infty} k(t) \cos(\omega t) dt$ i $\int_0^{\infty} k(t) \sin(\omega t) dt$ istnieją. Ponieważ $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$, zatem $K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) \cos(\omega t) dt - j \int_0^{\infty} k(t) \sin(\omega t) dt$, co kończy dowód. ■

Własność 4.3.6. Niech $l < m$. W systemie stabilnym

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[K(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}[K(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy powołać się na własność A.7.2. ■

Z wzoru Parsewala (A.33) wynika następująca własność:

Własność 4.3.7. Niech $l < m$. W systemie stabilnym

$$\int_0^\infty k^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Przejdziemy teraz do odpowiedzi skokowej.

Własność 4.3.8. Niech $l < m$. W systemie stabilnym, dla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \operatorname{Re}[K(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega \\ &= K(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}[K(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Oznaczając $\lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = K(0)$, zauważmy, że $g(t) = \lambda(t) - \lambda_\infty$ jest odpowiedzią impulsową stabilnego systemu o transmitancji $G(s) = s^{-1}(K(s) - K(0))$. Z własności 4.3.6 wynika więc, że $\lambda(t) - \lambda_\infty = -(2/\pi) \int_0^\infty \operatorname{Im}[(j\omega)^{-1}G(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega$, co jest równe $(2/\pi) \int_0^\infty \operatorname{Re}[\omega^{-1}K(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega - \lambda_\infty$, ponieważ $\int_0^\infty \omega^{-1} \sin(\omega t) d\omega = \pi/2$. Pierwsza część tezy została zatem udowodniona.

Z własności A.7.2 wynika ponadto, że $g(t) = (2/\pi) \int_0^\infty \operatorname{Re}[G(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega$. Ponieważ $\operatorname{Re}[G(j\omega)] = -\omega^{-1} \operatorname{Im} K(j\omega)$, zatem także druga część tezy została zweryfikowana. ■

Ćwiczenie 4.3.8. Zakładając, że $l < m$, wykazać, że dla systemu stabilnego prawdziwy jest następujący wzór: $\int_0^\infty (\lambda(t) - \lambda_\infty)^2 dt = (1/\pi) \int_0^\infty \omega^{-2} |K(j\omega) - K(0)|^2 d\omega$, przy czym $\lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$.

4.3.4. Równanie fazowe

Wektor $\xi^* \in R^m$ nazywa się punktem równowagi systemu, jeśli, przy warunku początkowym $\xi(0-) = \xi^*$, rozwiązaniem równania fazowego jest $\xi(t) = \xi^*$, patrz podrozdział 2.7. Mówiąc inaczej, ξ^* jest punktem równowagi, jeśli trajektoria rozpoczynająca się w tym punkcie nie opuszcza go. Ponieważ $\dot{\xi}(t) = \mathbf{0}$ wzdłuż takiej trajektorii, punktem równowagi jest każdy wektor ξ rozwiązujący równanie $\mathbf{0} = \mathbf{A}\xi$. Jest oczywiste, że każdy system liniowy ma przynajmniej taki jeden punkt, a mianowicie $\xi^* = \mathbf{0}$.

Jeśli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, tzn. jedynym punktem równowagi systemu. Ponieważ $\det \mathbf{A} = -a_0$, ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \neq 0$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy transmitancja systemu nie ma bieguna w punkcie $s = 0$, czyli system nie ma charakteru całkującego.

Jeśli natomiast $a_0 = 0$, to $\det \mathbf{A} = 0$. Transmitancja ma zatem biegun w punkcie $s = 0$, co oznacza, że system ma własności całkujące. System ma teraz także inne punkty równowagi, ponieważ równanie $\mathbf{0} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$ ma w takiej sytuacji wiele rozwiązań. Aby je wyznaczyć, przypomnijmy, że dla trajektorii pozostającej w punkcie równowagi $\boldsymbol{\xi}^*$ zachodzi równość $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{0}$. Z definicji wektora fazowego wynika zatem, że dla trajektorii tej $y^{(1)}(t) = \dots = y^{(m-1)}(t) = 0$. Oznaczając $\boldsymbol{\xi}^* = [\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_m^*]^T$, dochodzimy więc do wniosku, że $\xi_2^* = \dots = \xi_m^* = 0$. Wynika stąd, że zbiór punktów równowagi pokrywa się teraz z osią ξ_1 , tzn. osią $y(t)$ przestrzeni fazowej.

Definicja 4.3.2. *Równanie fazowe nazywa się stabilnym, jeśli, dla każdego $\boldsymbol{\xi}(0-)$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}.$$

Równanie fazowe nazywa się więc stabilnym, gdy każda jego trajektoria zbiega się do punktu równowagi $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{0}$. Ponieważ $\boldsymbol{\xi}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\xi}(0-)$, równanie fazowe jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Oznaczmy teraz przez $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ wartości własne macierzy \mathbf{A} , czyli rozwiązania równania $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Wykażemy teraz istotne twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.1. *Zbieżność (4.11) zachodzi wtedy i tylko wtedy, tzn. równanie fazowe jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_m < 0. \quad (4.12)$$

Dowód. Zaczniemy od tego, że $y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\xi}(0-)$, gdzie $\boldsymbol{\xi}$ jest wektorem fazowym, natomiast $\mathbf{c} = [1, 0, \dots, 0]^T$, patrz (2.16).

Z równości (4.11) wynika, że $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ dla każdego $\boldsymbol{\xi}(0-)$, czyli każdego warunku początkowego jednorodnego skalarnego równania różniczkowego (4.1). Równanie to jest zatem stabilne. Korzystając z twierdzenia 4.2.1 o stabilności, dochodzimy do wniosku, że są spełnione nierówności (4.2). Ponieważ pierwiastki charakterystyczne równania (4.1) są takie same jak wartości własne macierzy \mathbf{A} , patrz własność 2.7.1, a zatem zachodzi (4.12).

Z drugiej strony, z (4.12) wynika (4.2), co, na mocy twierdzenia 4.2.1, oznacza stabilność równania różniczkowego (4.1), czyli zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ dla każdego $\boldsymbol{\xi}(0-)$. Z uwagi na (4.5), ze zbieżności tej wynika, że $\lim_{t \rightarrow \infty} y^{(i)}(t) = 0$, gdzie $i = 0, 1, \dots$, co oznacza, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}$ dla każdego $\boldsymbol{\xi}(0-)$. To pociąga za sobą równość (4.11) i kończy dowód. ■

Przywołując teraz własność 2.7.1, dochodzimy do ważnego twierdzenia.

Twierdzenie 4.3.2. *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego równanie fazowe jest stabilne.*

Ćwiczenie 4.3.9. Korzystając z tego, że $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = [1/\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \text{adj } \mathbf{A}$ oraz lematu A.5.1, wykazać, że jeśli dla macierzy \mathbf{A} określonej wzorem (2.14) zachodzą nierówności (4.12), to $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$.

4.3.5. Ograniczone wejście – ograniczone wyjście

Poniżej wykazemy, że jeśli pobudzenie jest ograniczone, to reakcja systemu stabilnego także. Ograniczoność obydwu sygnałów jest rozumiana tak samo: albo w sensie ograniczenia co do modułu, albo co do całki z modułu, albo też całki z kwadratu.

Własność 4.3.9. Niech $l < m$. Niech system będzie stabilny i niech warunek początkowy będzie zerowy. Wówczas:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} |y(t)| &\leq c \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t)|, \\ \int_0^\infty |y(t)| dt &\leq c \int_0^\infty |u(t)| dt, \\ \int_0^\infty y^2(t) dt &\leq d^2 \int_0^\infty u^2(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie $c = \int_0^\infty |k(t)| dt$ oraz $d = \max_{\omega \in [0, \infty)} |K(j\omega)|$.

Dowód. Ponieważ warunek początkowy jest zerowy, a więc sygnałem wyjściowym systemu jest $y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau$. Zatem $|y(t)| \leq \int_0^t |k(t-\tau)| d\tau \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t)|$, która to wielkość jest nie większa niż $\int_0^\infty |k(t)| dt \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t)|$, skąd wynika pierwsza z nierówności.

Aby wykazać drugą, oznaczmy $g(t) = \int_0^t |k(t-\tau)||u(\tau)| d\tau$. Na podstawie reguły o splocie, patrz podrozdział A.2, wnioskujemy, że $G(s) = \mathfrak{L}\{|k(t)|\} \mathfrak{L}\{|u(t)|\}$, skąd wynika, że $s^{-1}G(s) = \mathfrak{L}\{|k(t)|\} s^{-1} \mathfrak{L}\{|u(t)|\}$. W rezultacie $\int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t |k(t-\tau)| \varphi(\tau) d\tau$, gdzie $\varphi(t) = \int_0^t |u(\tau)| d\tau$. Ponieważ ponadto $|y(t)| \leq g(t)$, a zatem $\int_0^t |y(\tau)| d\tau \leq \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t |k(t-\tau)| \varphi(\tau) d\tau \leq \int_0^t |k(t-\tau)| d\tau \sup_{t \in [0, \infty)} \varphi(t) \leq \int_0^\infty |k(t)| dt \int_0^\infty |u(\tau)| d\tau$, co kończy dowód drugiej nierówności.

Dowód trzeciej rozpoczniemy od wykazania, że $d < \infty$. Zaczniemy od oczywistej nierówności $d \leq V + W$, gdzie $V = \sup_{\omega \in [0, \rho)} |K(j\omega)|$, $W = \sup_{\omega \in [\rho, \infty)} |K(j\omega)|$, natomiast ρ jest dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ żaden biegun transmitancji $K(s)$ nie leży na osi liczb urojonych, więc $V < \infty$. Z uwagi na to, że $l < m$, ma miejsce zbieżność $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |K(j\omega)| = 0$, skąd wynika, że $W < \infty$. Zatem $|K(j\omega)|$ jest funkcją ograniczoną dla $\omega \in [0, \infty)$ i malejącą do zera. Pamiętając, że jest ona także ciągła, stwierdzamy w rezultacie, iż $\max_{\omega \in [0, \infty)} |K(j\omega)| < \infty$. Ponieważ $Y(j\omega) = K(j\omega)U(j\omega)$, zatem $|Y(j\omega)|^2 \leq d^2 |U(j\omega)|^2$. Dowód kończymy wykorzystując wzór Parsewala (A.33). ■

Posługując się pojęciem normy funkcji, otrzymaną powyżej własność 4.3.9 można zapisać za pomocą jednego wzoru. Oznaczając poszczególne normy jako:

$$\|x(t)\|_1 = \sup_{t \in [0, \infty)} |x(t)|, \|x(t)\|_2 = \int_0^\infty |x(t)| dt, \|x(t)\|_3 = \sqrt{\int_0^\infty x^2(t) dt},$$

możemy bowiem napisać

$$\|y(t)\|_i \leq \gamma_i \|u(t)\|_i, \quad (4.13)$$

gdzie $\gamma_1 = \gamma_2 = c$ oraz $\gamma_3 = d$.

lloz

$$\frac{\|y(t)\|}{\|u(t)\|},$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest dowolną normą, można traktować jako swoście rozumiane wzmocnienie systemu. Z nierówności (4.13) wynika, że w systemach stabilnych, dla wymienionych trzech norm, jest ono skończone.

W szczególności, $\int_0^\infty x^2(t)dt$ interpretuje się jako energię sygnału $x(t)$. Traktując więc

$$\frac{\int_0^\infty y^2(t)dt}{\int_0^\infty u^2(t)dt}$$

jako wzmocnienie energii, możemy zatem stwierdzić, że w systemach stabilnych jest ono skończone i ograniczone przez d^2 .

Przykład 4.3.4. Niech $K(s) = 1/(s+1)$. Ponieważ $k(t) = e^{-t}$, więc $\int_0^\infty |k(t)|dt = 1$. Zatem $c = 1$. Ponadto $|K(j\omega)| = 1/(1+\omega^2)^{1/2}$, skąd wynika, że $d = 1$.

Przykład 4.3.5. Dla $K(s) = 1/M(s)$ otrzymujemy $d^2 = 1/\min_{\omega \in [0, \infty)} |M(j\omega)|^2 = 1/a_0^2$.

Przykład 4.3.6. Z ostatniego przykładu wynika, że dla $K(s) = 7/(2s+3)(4s+5)$ mamy $d^2 = 7/15$.

Ćwiczenie 4.3.10. Niech $l < m$. Niech system będzie stabilny, a warunek początkowy zerowy. Wykazać, że, dla każdego T prawdziwe są nierówności $\int_0^T y^2(t)dt \leq d^2 \int_0^T u^2(t)dt$ oraz $\int_0^T |y(t)|dt \leq c \int_0^T |u(t)|dt$.

4.4. Własności systemów niestabilnych

Omówimy teraz własności systemów niestabilnych, w tym tych, które są na granicy stabilności.

Własność 4.4.1. Niech system będzie na granicy stabilności. Dla $l < m$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |k(t)| < \infty,$$

natomiast dla $l \geq m$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} |k(t)| < \infty.$$

Dowód. Pierwsza własność wynika stąd, że pojedynczy biegun w zerze lub para na osi liczb urojonych wnoszą odpowiednio stałą lub periodyczną o stałej amplitudzie. Jeśli natomiast $l \geq m$, to odpowiedź impulsowa zawiera jeszcze impuls Diraca oraz jego

pochodne, tzn. $\delta^{(p)}(t)$, $p = 0, 1, \dots, l - m$, umieszczone w punkcie $t = 0$. Odpowiedź impulsowa jest zatem ograniczona na otwartej półprostej $(0, \infty)$, co kończy dowód. ■

O odpowiedzi impulsowej i skokowej systemu niestabilnego nie będącego na granicy stabilności wypowiada się kolejna własność.

Własność 4.4.2. *W systemie niestabilnym nie będącym na granicy stabilności*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |k(t)| = \infty$$

oraz

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\lambda(t)| = \infty.$$

Rozdział 5

Kryteria stabilności

Zgodnie z twierdzeniem 4.2.1, aby stwierdzić, czy system o transmitancji

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (5.1)$$

jest stabilny, wystarczy rozwiązać jego równanie charakterystyczne $M(s) = 0$, a następnie sprawdzić, czy wyznaczone w ten sposób pierwiastki mają ujemne części rzeczywiste. Przypominamy przy tym, że

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Rozwiązanie równania jest możliwe tylko dla $m \leq 4$, tzn. tylko wtedy można znaleźć jego pierwiastki przy użyciu takich działań jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz pierwiastkowanie. Równań wyższych stopni, poza szczególnymi przypadkami, rozwiązać nie można.

Powstaje zatem pytanie, czy bez rozwiązywania równania charakterystycznego można stwierdzić, czy wszystkie jego rozwiązania leżą w lewej półpłaszczyźnie? Odpowiedź jest pozytywna. Twierdzenia, które ustalają związek między współczynnikami wielomianu charakterystycznego a tym, czy jest spełniony zestaw nierówności (4.2), nazywają się kryteriami stabilności.

Najpierw omówimy kryteria algebraiczne. Twierdzenie 5.1.1 o współczynnikach podaje warunek konieczny, kryterium Routha–Hurwitza określa warunek wystarczający. Z kolei kryterium Hurwitza, podobnie jak Liénarda–Chiparta, ustala warunek konieczny i wystarczający. Pozostałe, tzn. Michajłowa oraz Nyquista są kryteriami częstotliwościowymi. Każde z nich podaje warunek konieczny i wystarczający.

Przez m_- , m_0 oraz m_+ oznaczmy liczbę pierwiastków wielomianu $M(s)$, czyli biegunów transmitancji $K(s)$, leżących odpowiednio w lewej półpłaszczyźnie, na osi liczb urojonych oraz w prawej półpłaszczyźnie. Jest oczywiście, że $m_- + m_0 + m_+ = m$.

5.1. Systemy o dowolnej strukturze

5.1.1. Twierdzenie o znaku współczynników

Zacniemy od prostego kryterium podającego konieczny warunek stabilności.

Twierdzenie 5.1.1 (znak współczynników). *Niech $a_m > 0$. Jeśli system (5.1) jest stabilny, to*

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{m-1} > 0. \quad (5.2)$$

Innymi słowy, jeśli warunek (5.2) nie jest spełniony, to system nie jest stabilny.

Dowód. Wielomian $M(s)$ ma pierwiastki rzeczywiste, powiedzmy ξ_1, \dots, ξ_p , oraz pary zespolone, powiedzmy $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, co oznacza, że $p + 2q = m$. Jest więc oczywiste, że

$$M(s) = a_m \prod_{i=1}^p (s - \xi_i) \prod_{j=1}^q (s - \eta_j)(s - \bar{\eta}_j).$$

Skoro system jest stabilny, to wszystkie ξ_i są ujemne. Wynika stąd, że wszystkie współczynniki wielomianu $\prod_{i=1}^p (s - \xi_i)$ są dodatnie.

Oznaczając $\eta_j = \sigma_j + j\omega_j$, zauważmy, że $(s - \eta_j)(s - \bar{\eta}_j) = (s - \sigma_j)^2 + \omega_j^2$. Ponieważ $\sigma_j < 0$, wszystkie współczynniki tego dwumianu są zatem dodatnie. W rezultacie wszystkie współczynniki są dodatnie także w wielomianie $\prod_{j=1}^q (s - \eta_j)(s - \bar{\eta}_j)$, co kończy dowód. ■

Można zatem powiedzieć, że jeśli system jest stabilny, to wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego $M(s)$ są jednakowego znaku – albo wszystkie są dodatnie albo wszystkie ujemne.

Podane twierdzenie jest równoważne poniższemu wnioskowi:

Wniosek 5.1.1. *Niech $a_m > 0$. Jeśli przynajmniej jedna z nierówności (5.2) nie zachodzi, to system nie jest stabilny.*

Kończąc zwracamy uwagę na to, że w pewnych sytuacjach omawiane kryterium pozwala stwierdzić, że system jest niestabilny. Nigdy natomiast nie doprowadza do wniosku, że system jest stabilny. Jest to spowodowane tym, że podaje ono warunek konieczny.

Przykład 5.1.1. System, którego transmitancja ma wielomian charakterystyczny o postaci $s^2 + 1 = (s - j)(s + j)$, nie jest stabilny, ponieważ $a_1 = 0$.

Przykład 5.1.2. Wielomian $s^3 + s^2 - s - 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek poza lewą półpłaszczyzną, ponieważ $a_1 < 0$ i $a_0 < 0$. Rzeczywiście, wielomian ten to $(s - 1)(s + 1)^2$.

Przykład 5.1.3. O stabilności systemu, którego wielomianem charakterystycznym jest $s^2 + s + 1$, twierdzenie 5.1.1 nie rozstrzyga.

5.1.2. Kryterium Routha–Hurwitza

Poniżej podamy kryterium, które podaje wystarczający warunek stabilności. Wprowadzimy w tym celu macierz Hurwitza \mathbf{H}_m o m wierszach i m kolumnach zdefiniowaną następująco:

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & a_{m-7} & \cdots \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & a_{m-6} & \cdots \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \cdots \\ 0 & a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ \cdots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ \cdots & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ \cdots & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Zwróćmy uwagę na główną przekątną i indeksy w poszczególnych kolumnach. Niech teraz $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ będą głównymi podwyznacznikami tej macierzy, tzn. niech:

$$\Delta_1 = a_{m-1}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ a_m & a_{m-2} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & a_{m-7} \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & a_{m-6} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ 0 & a_{m-2} & a_{m-3} & a_{m-4} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_m = \det \mathbf{H}_m.$$

Rozwijając Δ_m względem ostatniej kolumny, zauważamy, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$.

Dla ciągu liczbowego $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, przez $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ oznaczmy liczbę zmian znaku jego kolejnych elementów. Dla przykładu: $V(3, 4, 5, 1, -2,) = 1$, $V(5, -2, 4) = 2$, $V(1, -3, 4, 1) = 2$, $V(2, 3, 5, -1) = 1$, $V(1, 5, 2, 3) = 0$. Podamy teraz kryterium Routha–Hurwitza¹.

Twierdzenie 5.1.2 (Routh–Hurwitz). *Jeśli*

$$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_m \neq 0, \tag{5.3}$$

to żaden z pierwiastków wielomianu $M(s)$ nie leży na osi $j\omega$ oraz

$$m_+ = V\left(a_m, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}\right).$$

¹E.J. Routh, *A treatise on stability of a given state of motion*, Macmillan, London 1877.

Twierdzenie to, nazywane kryterium Routha–Hurwitza, patrz np. [10], podajemy bez dowodu, który wymagałby dłuższych wyjaśnień. Warto jeszcze zauważyć, że sporo wysiłku związanego z obliczeniem Δ_m oszczędzi się, gdy weźmie się pod uwagę to, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$. Z twierdzenia powyższego wynika oczywisty wniosek.

Wniosek 5.1.2. *Niech $a_m > 0$. Jeśli*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0, \quad (5.4)$$

to system jest stabilny.

Wniosek 5.1.2 orzeka, że spełnienie warunku (5.4) wystarcza, aby system był stabilny. Kryterium Hurwitza, które podamy w następnym podrozdziale, stwierdza, że warunek ten jest także konieczny.

Twierdzenie Routha–Hurwitza jest skutecznym narzędziem, gdy wszystkie podwyznaczniki macierzy Hurwitza są różne od zera. Pozwala ono wówczas w sposób jednoznaczny określić, czy system jest stabilny czy nie. Gdy przynajmniej jeden z nich jest zerowy, kryterium zawodzi. Warto zwrócić uwagę na to, że pozwala ono określić liczbę biegunów transmitancji położonych w prawej półpłaszczyźnie, co może być pomocne przy stosowaniu kryterium Nyquista, patrz punkt 5.2.2.

Przykład 5.1.4. Dla wielomianu $a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ otrzymujemy

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

i zauważamy, że $\Delta_4 = a_0 \Delta_3$.

Przykład 5.1.5. Dla wielomianu $6s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3s + 2$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_4 = \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem:

$$\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -44 \text{ oraz } \Delta_4 = 2(-44) = -88.$$

Ćwiczenie 5.1.1. Korzystając ze wzoru Orlando²

$$\Delta_{m-1} = (-1)^{m(m-1)/2} a_m^{m-1} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{i-1} (s_i + s_j)$$

²P. Lancaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York 1969.

oraz równości $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$, wykazać, że jeśli $M(s)$ ma pierwiastek (rzeczywisty lub parę czysto urojona) na osi $j\omega$, to warunek (5.3) nie zachodzi (co jest częścią twierdzenia Routha–Hurwitza). Na przykładzie wielomianu $s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$ zauważyć następnie, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Ćwiczenie 5.1.2. Wykorzystując wzór Orlando, patrz ćwiczenie 5.1.1, podać wielomian o niezerowych pierwiastkach rzeczywistych, dla którego $\Delta_{m-1} = 0$, czyli dla którego warunek (5.3) nie zachodzi.

Ćwiczenie 5.1.3. Korzystając ze wzoru Orlando, patrz ćwiczenie 5.1.1, oraz tego, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$, wykazać, że jeśli transmitancja ma biegun na osi $j\omega$, to $\Delta_{m-1} = \Delta_m = 0$, co oznacza, że zarówno wśród wyznaczników o parzystych, jak i nieparzystych indeksach jest przynajmniej po jednym zerowym.

Przykład 5.1.6. Dla $M(s) = (s+2)(s+3)^2 = s^3 + 8s^2 + 21s + 18$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 0 \\ 1 & 21 & 0 \\ 0 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

oraz $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 150$, $\Delta_3 = 1200$. Ponieważ

$$m_+ = V\left(1, 8, \frac{150}{8}, \frac{1200}{150}\right) = 0,$$

wielomian ten ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie. System jest stabilny.

Przykład 5.1.7. Niech $M(s) = (s-1)^2(s+2)(s+3) = s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 7s + 6$. Zatem

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

i $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -40$, $\Delta_4 = -240$. Ostatecznie

$$m_+ = V\left(1, 3, -\frac{2}{3}, \frac{40}{2}, \frac{240}{40}\right) = 2.$$

Wielomian $M(s)$ nie ma więc żadnego pierwiastka na osi $j\omega$, dwa w prawej półpłaszczyźnie oraz dwa w lewej. System jest zatem niestabilny.

Przykład 5.1.8. Dla transmitancji $1/(s^2+2)(s+3) = 1/(s^3+3s^2+2s+6)$ wyliczamy $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 0$ oraz $\Delta_3 = 0$. Ponieważ wśród wyznaczników znajduje się zerowy, zatem kryterium nie wypowiada się na temat stabilności systemu.

Przykład 5.1.9. Dla wielomianu $(s^2+1)(s^2+3s+1) = s^4+3s^3+2s^2+3s+1$ znajdujemy $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$. Wśród wyznaczników znajduje się zerowy, bowiem para pierwiastków $(j, -j)$ czysto urojonych leży na osi $j\omega$.

Przykład 5.1.10. Niech $M(s) = s(s+1)^2 = s^3+2s^2+s$. W wielomianie tym $a_0 = 0$ i dlatego jeden z jego pierwiastków rzeczywistych, tzn. $s = 0$, leży na osi $j\omega$. Pozostałe znajdują się poza osią. Ponieważ $\Delta_3 = a_0 \Delta_2$, więc pierwiastek w zerze jest przyczyną tego, że $\Delta_3 = 0$.

5.1.3. Kryterium Hurwitza

Poniższe twierdzenie, znane jako kryterium Hurwitza³, patrz np. [10], podaje warunek, który jest jednocześnie konieczny i wystarczający.

Twierdzenie 5.1.3 (Hurwitz). *Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0. \quad (5.5)$$

Przypominamy, że we wniosku 5.1.2, który bezpośrednio wynika z kryterium Routha–Hurwitza, ustaliliśmy, że warunek (5.5) jest wystarczający. Powyższe kryterium Hurwitza stwierdza, że warunek ten jest także konieczny.

Stosując kryterium Routha–Hurwitza, czy Hurwitza obliczamy wyznaczniki, co jest operacją skomplikowaną pod względem numerycznym. Znaczne oszczędności obliczeniowe możemy uzyskać, stosując kryterium Liénarda–Chiparta⁴, patrz [10].

Twierdzenie 5.1.4 (Liénard–Chipart). *Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony dowolny z czterech poniższych warunków:*

$$a_0 > 0, a_2 > 0, a_4 > 0, \dots \text{ oraz } \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$$

$$a_0 > 0, a_2 > 0, a_4 > 0, \dots \text{ oraz } \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots,$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_3 > 0, \dots \text{ oraz } \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_3 > 0, \dots \text{ oraz } \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$$

Przykład 5.1.11. Niech $K(s) = 1/(s+1)^2(s+2) = 1/(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)$. Macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 18$, $\Delta_3 = 36$. System jest zatem stabilny.

Przykład 5.1.12. System o transmitancji $1/(s-1)^2(s+2) = 1/(s^3 - 3s + 2)$ nie jest stabilny, gdyż

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$ oraz $\Delta_3 = -2$.

Przykład 5.1.13. Dla systemu o transmitancji $1/(s+1)(s+2)^2 = 1/(s^3 + 5s^2 + 8s + 4)$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

³A. Hurwitz, *Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., 1895, 46, 273–284.

⁴A.M. Liénard, A.H. Chipart, *Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique*, J. Math. Pures et Appl., 1914, 10, 291–346.

Zatem $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 36$, $\Delta_3 = 180$. Wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego leżą więc w lewej półpłaszczyźnie.

Przykład 5.1.14. Dla systemu o transmitancji $1/(s^2 + a_1s + a_0)$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

System jest zatem stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 > 0$ i $a_1 > 0$.

Przykład 5.1.15. Dla systemu o transmitancji $1/(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

System ten jest zatem stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ oraz $a_1a_2 - a_0 > 0$.

Przykład 5.1.16. Dla wielomianu $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s + 3$ stwierdzamy, że $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_4 = -3$ oraz $\Delta_5 = -9$. Dzięki kryterium Liénarda–Chiparta to, że system jest niestabilny, można więc ustalić, sprawdzając jedynie znaki wyznaczników o parzystych lub nieparzystych indeksach.

Ćwiczenie 5.1.4. Korzystając z twierdzenia 5.1.1 o znaku współczynników i kryterium Hurwitza, wykazać, że jeśli $a_m > 0$, to system jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{m-1} > 0, \dots \text{ oraz } \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0.$$

Zbadać relację pomiędzy tym wynikiem a twierdzeniem Liénarda–Chiparta.

5.1.4. Kryterium Michajłowa

Kryterium Michajłowa⁵ zajmuje się, podobnie jak kryteria omówione wcześniej, mianownikiem transmitancji (5.1). Różnica polega na tym, że bada ono własności funkcji $M(j\omega)$. W odróżnieniu od poznanych już kryteriów algebraicznych, poniższe ma zatem charakter częstotliwościowy.

Rzeczywiste pierwiastki wielomianu $M(s)$ oznaczmy jako ξ_1, \dots, ξ_p , a pary zespolone jako $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$. Jest przy tym oczywiste, że $p + 2q = m$. Ponieważ

$$M(s) = a_m \prod_{i=1}^p (s - \xi_i) \prod_{k=1}^q (s - \eta_k)(s - \bar{\eta}_k),$$

zatem

$$M(j\omega) = a_m \prod_{i=1}^p (j\omega - \xi_i) \prod_{k=1}^q (j\omega - \eta_k)(j\omega - \bar{\eta}_k).$$

Poniższy lemat jest oczywisty.

⁵A.W. Mikhailov, *Garmoničeskij metod v teorii regulirovanii*, Avtomatika i Telemekhanika, 1938, 3, 27–31.

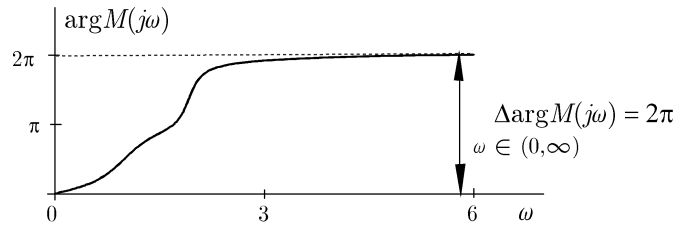
Lemat 5.1.1. *Wielomian $M(s)$ nie ma żadnego pierwiastka na osi $j\omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M(j\omega) \neq 0$ dla wszystkich $\omega \in [0, \infty)$.*

Założymy teraz, że żaden z pierwiastków wielomianu $M(s)$ nie leży na osi $j\omega$ i zajmujemy się funkcją $\arg M(j\omega)$. Ponieważ $M(j\omega)$ jest liczbą zespoloną, zatem

$$M(j\omega) = |M(j\omega)|e^{\arg M(j\omega)}.$$

Ponieważ $M(j\omega) \neq 0$ dla wszystkich $\omega \in [0, \infty)$, funkcja $\arg M(j\omega)$ jest zatem ciągła na półprostej $[0, \infty)$. Przykład funkcji $\arg M(j\omega)$ pokazano na rys. 5.1. Definiujemy dla niej następujący funkcjonal będący przyrostem argumentu funkcji $M(j\omega)$:

$$\Delta \arg M(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg M(j\omega) - \arg M(j0). \quad (5.6)$$



Rys. 5.1. Przykładowa funkcja $\arg M(j\omega)$

Zakładając, że $a_m > 0$, możemy napisać

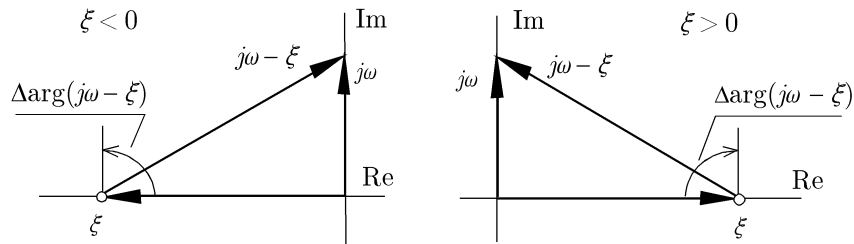
$$\arg M(j\omega) = \sum_{i=1}^p \arg(j\omega - \xi_i) + \sum_{k=1}^q \arg(j\omega - \eta_k)(j\omega - \bar{\eta}_k).$$

Rozpatrzmy teraz poszczególne składniki powyższej sumy.

Dla $\xi \neq 0$, tzn. dla pierwiastka rzeczywistego nie leżącego na osi liczb urojonych,

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} (j\omega - \xi) = \begin{cases} \pi/2, & \text{dla } \xi < 0, \\ -\pi/2, & \text{dla } \xi > 0, \end{cases}$$

patrz rys. 5.2, na którym wektor $j\omega - \xi$ jest pokazany z dokładnością do przesunięcia.

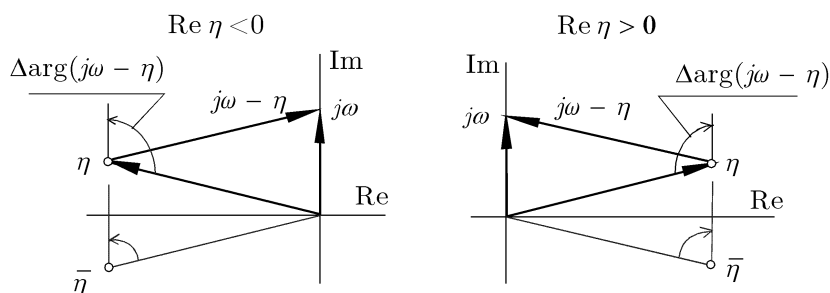


Rys. 5.2. $\Delta \arg(j\omega - \xi)$ dla $\omega \in [0, \infty)$, pierwiastek ξ rzeczywisty

Jeśli $\operatorname{Re} \eta \neq 0$, tzn. jeśli para $(\eta, \bar{\eta})$ nie jest czysto urojona, to

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg(j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta}) = \begin{cases} \pi, & \text{dla } \eta < 0, \\ -\pi, & \text{dla } \eta > 0, \end{cases}$$

patrz rys. 5.3. Doszliśmy zatem do kolejnego lematu.



Rys. 5.3. $\Delta \arg(j\omega - \eta) + \Delta \arg(j\omega - \bar{\eta})$ dla $\omega \in [0, \infty)$, para pierwiastków zespolonych

Lemat 5.1.2. Niech $a_m > 0$. Jeśli wielomian $M(s)$ nie ma żadnego pierwiastka na osi $j\omega$, to

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}.$$

Jesteśmy teraz w stanie podać kryterium Michajłowa, które określa konieczny i wystarczający warunek stabilności.

Twierdzenie 5.1.5 (Michajłow). Niech $a_m > 0$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$M(j\omega) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty) \quad (5.7)$$

oraz

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg M(j\omega) = m \frac{\pi}{2}. \quad (5.8)$$

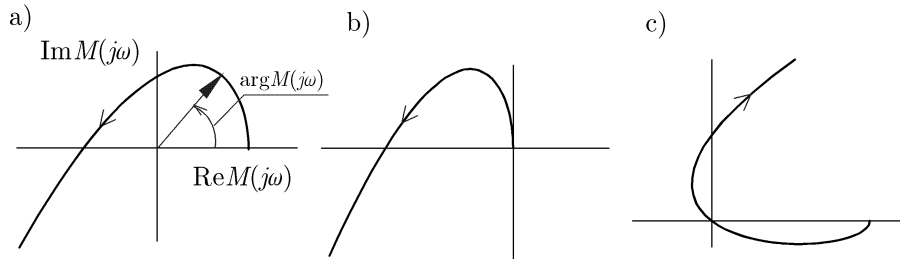
Dowód. Załóżmy, że system jest stabilny. Żaden pierwiastek wielomianu $M(s)$ nie leży zatem na osi $j\omega$ i, dzięki lematowi 5.1.1, zachodzi warunek (5.7). Również warunek (5.8) jest spełniony, bowiem $m_+ = 0$ i $m_- = m$, patrz lemat 5.1.2.

To, że warunki (5.7) i (5.8) zapewniają stabilność jest także oczywiste. Z (5.7) wynika bowiem, że żaden z pierwiastków wielomianu nie leży na osi $j\omega$, patrz lemat 5.1.1. Spełnienie warunku (5.8) oznacza natomiast, że $m_- = m$. System jest więc stabilny. ■

Podamy teraz interpretację geometryczną kryterium Michajłowa. Graficzne przedstawienie funkcji $M(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, na płaszczyźnie liczb zespolonych nazywa się wykresem Michajłowa. Przykłady pokazano na rys. 5.4. Strzałka oznacza wzrost argumentu ω . Jest oczywiste, że warunek (5.7) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wykres Michajłowa ani nie zaczyna się, ani nie przechodzi przez początek układu współrzędnych,

czyli punkt $s = 0$. Jest zatem spełniony jedynie dla wykresu a). W przypadkach b) i c) wykres zaczyna się bowiem lub przechodzi przez punkt $s = 0$.

Posługując się wykresem Michajłowa, można także sprawdzić, czy jest spełniony warunek (5.8). Na przykład, dla wykresu pokazanego na rys. 5.4a, $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = 3\pi/2$ ponieważ krzywa przechodzi przez trzy kolejne ćwiartki.



Rys. 5.4. Przykłady wykresów Michajłowa

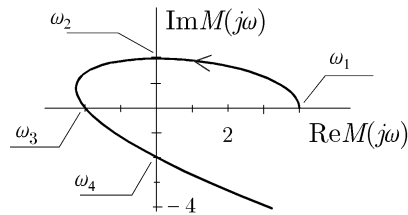
Warunek stabilności podany przez kryterium Michajłowa jest zarazem konieczny i wystarczający. Różne sposoby jego niespełnienia prowadzą do nieco odmiennych wniosków o pierwiastkach wielomianu $M(s)$, czyli biegunach transmitancji. W pierwszym – wykres przechodzi przez punkt $s = 0$, co oznacza, że nie jest spełniony warunek (5.7). Przynajmniej jeden biegun leży wówczas na osi $j\omega$. System jest więc niestabilny. W drugim – warunek (5.7) jest spełniony, wykres nie przechodzi bowiem przez punkt $s = 0$, lecz nie zachodzi warunek (5.8). W sytuacji takiej przynajmniej jeden biegun leży w prawej półpłaszczyźnie, skąd wniosek o niestabilności systemu.

Poniższe przykłady ilustrują nasze rozważania i wyjaśniają jak korzystać efektywnie z kryterium Michajłowa.

Przykład 5.1.17. Dla wielomianu charakterystycznego $M(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4$ otrzymujemy $M(j\omega) = (\omega^4 - 5\omega^2 + 4) + j(-\omega^3 + 3\omega)$. Zatem równanie $\operatorname{Re} M(j\omega) = 0$ ma następujące nieujemne rozwiązania $\omega_1 = 1$ oraz $\omega_2 = 2$. Ponadto $\operatorname{Im} M(j\omega_1) = 2$ oraz $\operatorname{Im} M(j\omega_2) = -2$. Równanie $\operatorname{Im} M(j\omega) = 0$ ma także dwa nieujemne pierwiastki $\omega_3 = 0$ i $\omega_4 = \sqrt{3}$. Łatwo wyliczamy przy tym, że $\operatorname{Re} M(j\omega_3) = 4$, $\operatorname{Re} M(j\omega_4) = -2$. Na tej podstawie można sporządzić następującą tabelę:

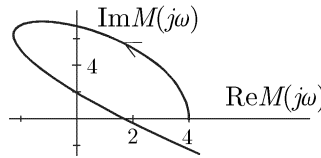
ω	$\operatorname{Re} M(j\omega)$	$\operatorname{Im} M(j\omega)$
$\omega_3 = 0$	4	0
$\omega_1 = 1$	0	2
$\omega_4 = \sqrt{3}$	-2	0
$\omega_2 = 2$	0	-2

w której pierwiastki $\omega_1, \dots, \omega_4$ są uszeregowane w rosnącej kolejności. Dzięki niej łatwo sporządzamy wykres Michajłowa, rys. 5.5. Na jego podstawie stwierdzamy, że $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = 2\pi$. Zatem system jest stabilny.



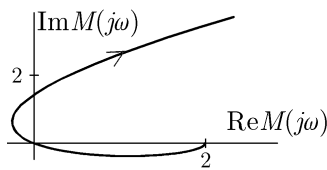
Rys. 5.5. Wykres Michajłowa, przykład 5.1.17

Przykład 5.1.18. Dla systemu o transmitancji $K(s) = 1/(s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 9s + 4)$ wielomianem charakterystycznym jest oczywiście $M(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 9s + 4$. Postępując jak w przykładzie 5.1.17 dochodzimy do wykresu Michajłowa jak na rys. 5.6. Ponieważ $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = 0 \neq 2\pi$, więc system jest niestabilny.



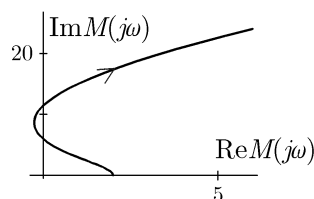
Rys. 5.6. Wykres Michajłowa, przykład 5.1.18

Przykład 5.1.19. Na rys. 5.7 przedstawiono wykres Michajłowa dla systemu o transmitancji $1/(s^4 - s^3 + 3s^2 - s + 2)$. Dla pulsacji $\omega = 1$ przechodzi on przez początek układu współrzędnych. Transmitancja ma zatem parę biegunów urojonych. System nie jest zatem stabilny.



Rys. 5.7. Wykres Michajłowa, przykład 5.1.19

Przykład 5.1.20. Niech teraz $M(s) = s^4 - 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2$. Na podstawie wykresu Michajłowa, patrz rys. 5.8, stwierdzamy, że $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = 0$. Wielomian $M(s)$ ma więc dwa pierwiastki w lewej i dwa w prawej półpłaszczyźnie.



Rys. 5.8. Wykres Michajłowa, przykład 5.1.20

Przykład 5.1.21. Wielomian $M(s) = s^5 - 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s$ można przedstawić jako $sQ(s)$, gdzie $Q(s) = s^4 - 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2$. Zatem ma on pierwiastek $s_1 = 0$ oraz, co wynika z przykładu 5.1.20, dwa pierwiastki w lewej i dwa w prawej półpłaszczyźnie.

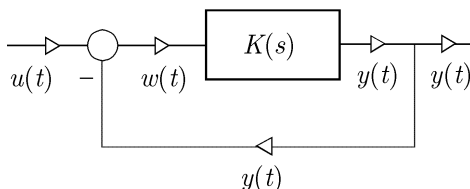
5.2. Systemy ze sprzężeniem zwrotnym

5.2.1. Wprowadzenie

System z ujemnym sprzężeniem zwrotnym jest pokazany na rys. 5.9. Jak łatwo zauważyć $Y(s) = K(s)W(s)$ oraz $W(s) = U(s) - Y(s)$, skąd wynika, że

$$K_Z(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)},$$

gdzie $K_Z(s) = Y(s)/U(s)$ jest transmitancją systemu o wejściu u i wyjściu y , czyli systemu zamkniętego.



Rys. 5.9. System z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

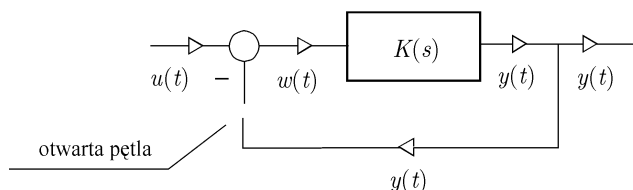
Na rysunku 5.10 przedstawiono ten sam system, lecz z tzw. otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, czyli system otwarty. Jego transmitancją jest

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

która z tego względu nazywa się transmitancją systemu otwartego. Zatem

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

jest wielomianem charakterystycznym systemu otwartego.



Rys. 5.10. System z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego

Ponieważ

$$K_Z(s) = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)},$$

a więc $M_Z(s) = L(s) + M(s)$ jest wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego. Zakładamy przy tym, że wielomiany $L(s)$ oraz $L(s) + M(s)$ nie mają żadnego wspólnego pierwiastka. Wykazaliśmy więc prawdziwość poniższej własności.

Własność 5.2.1. *Wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest*

$$M_Z(s) = L(s) + M(s).$$

Własność powyższa pozwala wykorzystać podane już kryteria Routha–Hurwitza, Hurwitza i Michajłowa do badania stabilności systemów ze sprzężeniem zwrotnym, co pokazujemy na przykładach.

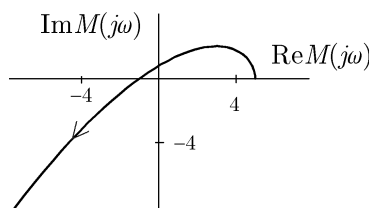
Przykład 5.2.1. Jeśli $K(s) = (2s + 3)/(4s^3 + 5s^2 + 6s + 7)$ jest transmitancją systemu otwartego, to $M_Z(s) = (2s + 3) + (4s^3 + 5s^2 + 6s + 7) = 4s^3 + 5s^2 + 8s + 10$ jest wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego.

Przykład 5.2.2. Niech $K(s) = 1/(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)$. Z własności 5.2.1 wynika, że wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego jest równy $M_Z(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 5$. Jego macierz Hurwitza jest następująca:

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Postępując zgodnie z kryterium Hurwitza, stwierdzamy bez trudu, że system zamknięty jest stabilny.

Przykład 5.2.3. Transmitancja systemu otwartego jest jak w przykładzie 5.2.2. Dla systemu zamkniętego wykres Michajłowa, tzn. wykres $M_Z(j\omega) = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 3j\omega + 5$, wygląda jak na rys. 5.11. System jest zatem stabilny.



Rys. 5.11. Wykres Michajłowa dla systemu zamkniętego, przykład 5.2.3

Ćwiczenie 5.2.1. Niech $K(s) = (s+1)/(s^3+2s^2+5)$. Sprawdzić, czy system zamknięty jest stabilny. Zastosować zarówno kryterium Hurwitza, jak i Michajłowa.

5.2.2. Kryterium Nyquista

Przejdziemy teraz do kryterium Nyquista⁶, które służy do badania stabilności systemów ze sprzężeniem zwrotnym. Omówimy kilka sytuacji różniących się między sobą położeniem biegunów transmitancji systemu otwartego. Zacniemy od najprostszej, w której system otwarty jest stabilny, potem przejdziemy do przypadku, gdy jego transmitancja ma biegun w punkcie $s = 0$, tzn. ma własności całkujące. Następnie omówimy sytuację, w której system otwarty jest niestabilny. Zakończymy wreszcie, zakładając, że jego transmitancja ma bieguny urojone. Kryterium podamy zatem w czterech wersjach. Każda z nich odpowiada różnym własnościom systemu otwartego.

Badanie stabilności systemu zamkniętego będziemy zaczynać od transmitancji

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

systemu otwartego, gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są, jak zwykle, wielomianami o stopniach l i m .

System otwarty stabilny

Będziemy teraz posługiwać się funkcjonalem $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega)$ zdefiniowanym wzorem (5.6), który określa przyrost argumentu wielomianu $M(j\omega)$ na półprostej $[0, \infty)$.

Twierdzenie 5.2.1 (Nyquist). Niech $a_m > 0$ i niech $l < m$. Załóżmy, że system otwarty jest stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + K(j\omega) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty) \quad (5.9)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0. \quad (5.10)$$

⁶H. Nyquist, *Regeneration theory*, Bell System Tech. J., 1932, 11, 126–147.

Dowód. Ponieważ $l < m$, a zatem stopień wielomianu $L(s) + M(s)$ jest równy m , a współczynnik przy s^m jest równy a_m , czyli jest dodatni. Z twierdzenia Michajłowa wynika zatem, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$L(j\omega) + M(j\omega) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty) \quad (5.11)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] = m \frac{\pi}{2}. \quad (5.12)$$

Przechodząc do właściwego dowodu, zauważmy, że

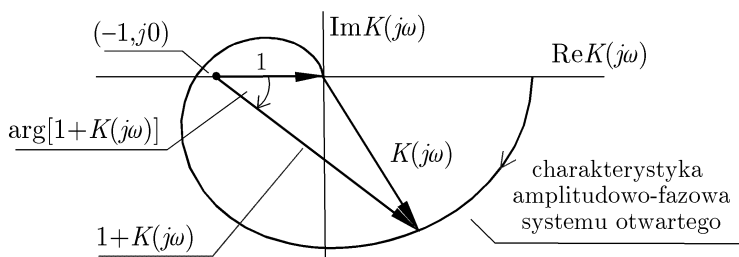
$$1 + K(j\omega) = \frac{L(j\omega) + M(j\omega)}{M(j\omega)}.$$

Zatem warunek (5.11) jest równoznaczny z warunkiem (5.9). Ponadto

$$\begin{aligned} \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] &= \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) \\ &= \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] - m \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Druga z równości zachodzi – bowiem z twierdzenia Michajłowa 5.1.5 i stabilności systemu otwartego wynika, że $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = m\pi/2$. Warunki (5.12) oraz (5.10) są więc równoważne, co kończy dowód. ■

Weryfikacji warunków kryterium najłatwiej można dokonać poprzez analizę wykresu $K(j\omega)$, czyli na podstawie badania charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego, patrz rys. 5.12. Warunek (5.9) jest spełniony, gdy $K(j\omega) \neq -1$ dla wszystkich $\omega \in [0, \infty)$, tzn. gdy charakterystyka ta nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. W celu wyznaczenia $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)]$ należy prześledzić zmianę zaznaczonego kąta przy zmieniającym się argumente ω .



Rys. 5.12. Geometryczna interpretacja kryterium Nyquista. Wektory 1 oraz $1 + K(j\omega)$ są pokazane z dokładnością do równoległego przesunięcia

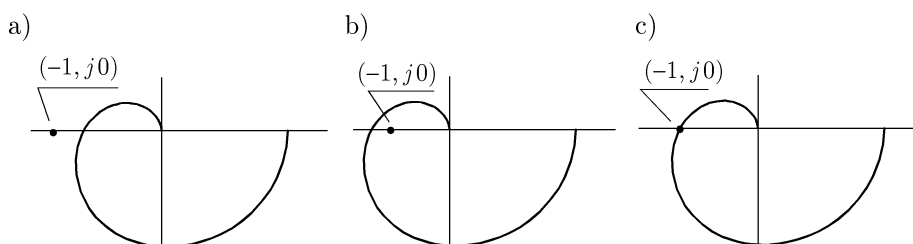
Na rys. 5.13 pokazano przykłady wzajemnego usytuowania charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego, tzn. wykresu $K(j\omega)$, oraz punktu $(-1, j0)$. System otwarty jest przy tym inercyjny trzeciego rzędu. W przypadku a) mamy

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0,$$

w b)

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi.$$

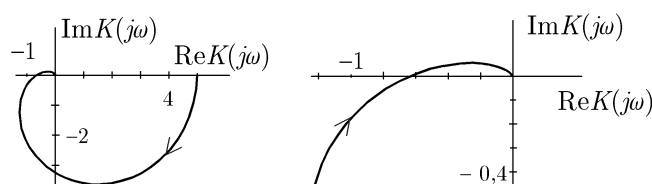
W przypadku c) wykres $K(j\omega)$ przechodzi przez punkt $(-1, j0)$, co oznacza, że warunek (5.9) nie jest spełniony. Zatem w sytuacji a) warunek (5.10) jest spełniony, a w przypadku b) nie jest.



Rys. 5.13. Wzajemne usytuowanie wykresu $K(j\omega)$ i punktu $(-1, j0)$; system otwarty inercyjny trzeciego rzędu

Kryterium Nyquista określa konieczny i wystarczający warunek stabilności, który składa się z dwóch części. Niespełnienie tego warunku może zatem zajść na dwa różne sposoby, z których wynikają nieco różne wnioski (patrz także kryterium Michajłowa). W pierwszym charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. Przynajmniej jeden biegun transmitancji systemu zamkniętego leży zatem na osi $j\omega$. System jest więc niestabilny, aczkolwiek może być na granicy stabilności. W drugim charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego (tzn. wykres $K(j\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$) nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$ i warunek (5.10) nie zachodzi. Przynajmniej jeden biegun transmitancji systemu zamkniętego leży wówczas w prawej półpłaszczyźnie, co oznacza, że system ten jest niestabilny.

Rysunek 5.13 usprawiedliwia w pewnym sensie potoczne stwierdzenie, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$. Należy jednak zaznaczyć, że nie zawsze wiadomo, co termin „obejmuje” ma oznaczać, patrz przykład 5.2.9.

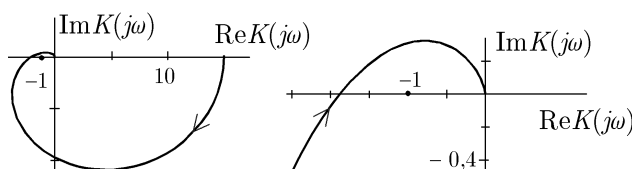


Rys. 5.14. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.2.4

Przykład 5.2.4. Niech $K(s) = 5/(s+1)^3$. System otwarty jest oczywiście stabilny. Na rys. 5.14 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową oraz, w powiększeniu, jej fragment w pobliżu punktu $(-1, j0)$. Strzałka pokazuje kierunek wzrostu ω . Wynika

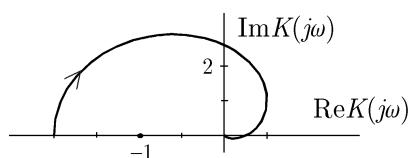
z niego, że warunki kryterium Nyquista są spełnione. Zatem system zamknięty jest także stabilny.

Przykład 5.2.5. Niech teraz $K(s) = 15/(s + 1)^3$. Jak widać na rys. 5.15, warunek (5.10) nie jest spełniony, gdyż $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi$. System zamknięty nie jest więc stabilny.



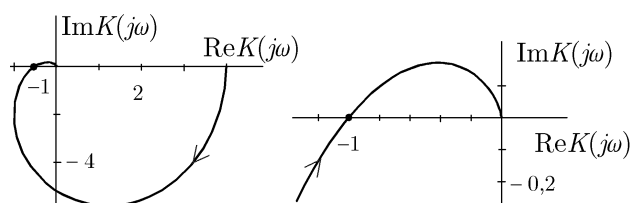
Rys. 5.15. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.2.5

Przykład 5.2.6. Niech $K(s) = -2/(s + 1)^3$. Z rys. 5.16 wynika, że warunek (5.10) nie jest spełniony, gdyż $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi$. System zamknięty jest więc niestabilny.



Rys. 5.16. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.2.6

Przykład 5.2.7. Niech $K(s) = 8/(s + 1)^3$. System otwarty jest oczywiście stabilny. Z rys. 5.17 wynika, że warunek (5.9) nie jest spełniony, ponieważ charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. Zatem system zamknięty nie jest stabilny.



Rys. 5.17. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.2.7

Ćwiczenie 5.2.2. Posługując się charakterystykami logarytmicznymi, podać geometryczną metodę weryfikacji warunku stabilności podanego w twierdzeniu 5.2.1.

System otwarty z elementami całkującymi

Załóżmy teraz, że oprócz biegunów stabilnych, system otwarty ma m_0 biegunów w punkcie $s = 0$. Oznacza to, że wielomian $M(s)$ ma m_0 -krotny pierwiastek w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Jest oczywiste, że system otwarty nie jest stabilny.

Z uwagi na pierwiastki w zerze rozszerzymy teraz pojęcie przyrostu funkcji $M(j\omega)$. Oznaczmy bowiem

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg M(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg M(j\omega). \quad (5.13)$$

Dzięki temu, dla $\xi = 0$, otrzymujemy $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} (j\omega - \xi) = 0$. Zwróćmy uwagę, że teraz $\omega \in (0, \infty)$, w poprzednim zaś punkcie $\omega \in [0, \infty)$. Zatem pojęcie przyrostu argumentu wielomianu $M(j\omega)$ ma teraz zastosowanie także do wielomianu o pierwiastkach w punkcie $s = 0$. Jest przy tym oczywiste, że

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}. \quad (5.14)$$

Twierdzenie 5.2.2 (Nyquist). *Niech $a_m > 0$ i niech $l < m$. Załóżmy, że transmitancja $K(s)$ ma biegun o krotności m_0 w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (5.9) oraz*

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [1 + K(j\omega)] = m_0 \frac{\pi}{2}.$$

Dowód. Ze względu na położenie biegunów stwierdzamy, że $m_- = m - m_0$. Na mocy (5.14) zachodzi zatem równość

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (m - m_0) \frac{\pi}{2}.$$

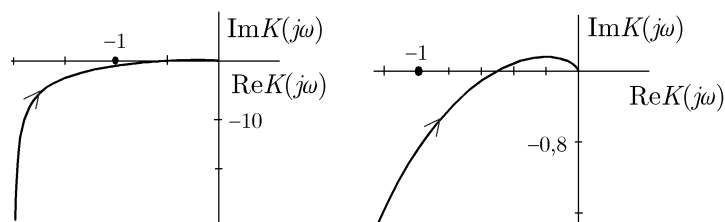
Pozostała część dowodu jest taka sama jak w dowodzie twierdzenia 5.2.1. ■

W szczególności zatem, gdy system otwarty ma jeden biegun w punkcie $s = 0$, co jest częstą sytuacją, patrz np. podrozdział 7.4, traktujący o tzw. regulacji astatycznej, zastosowanie ma poniższy wniosek:

Wniosek 5.2.1. *Niech $a_m > 0$ i niech $l < m$. Załóżmy, że transmitancja $K(s)$ ma pojedynczy biegun w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (5.9) oraz*

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [1 + K(j\omega)] = \frac{\pi}{2}.$$

Przykład 5.2.8. W przykładzie $K(s) = 1/s(s+1)^3$. Transmitancja systemu otwartego ma jeden biegun w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Ponieważ z rys. 5.18 wynika, że $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \pi/2$, system zamknięty więc jest stabilny.



Rys. 5.18. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.2.8

System otwarty niestabilny

Twierdzenie 5.2.3 (Nyquist). Niech $a_m > 0$ i niech $l < m$. Załóżmy, że transmitancja $K(s)$ systemu otwartego ma m_+ biegunów w prawej, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko, gdy zachodzi warunek (5.9) oraz

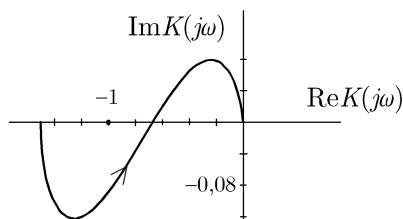
$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = m_+ \pi.$$

Dowód. Wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego $M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie z wyjątkiem m_+ po prawej. Z lematu 5.1.2 wynika zatem, że

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M(j\omega) = (m - 2m_+) \frac{\pi}{2}.$$

Kończymy argumentację w sposób podobny do zastosowanego w dowodzie twierdzenia 5.2.1. ■

Przykład 5.2.9. System otwarty o transmitancji $K(s) = 12/(s+4)(s+2)(s-1)$ nie jest stabilny, gdyż ma ona biegun w prawej półpłaszczyźnie. Na rys. 5.19 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową. Wynika z niego, że $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \pi$, skąd wyciągamy wniosek o stabilności systemu zamkniętego.



Rys. 5.19. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.2.9

System otwarty z biegunami urojonymi

Założmy teraz, że $M(s)$ ma pierwiastki czysto urojone $(\eta, \bar{\eta})$, gdzie $\eta = j\rho$ oraz $\rho > 0$. W sytuacji takiej funkcja $\arg(j\omega - \eta)$ ma punkt nieciągłości dla $\omega = \rho$ i dlatego

funkcjonał przyrostu jej argumentu zdefiniowany w (5.13) nie istnieje. Definicja wymaga bowiem, aby funkcja ta była ciągła na całej półprostej $\omega \in (0, \infty)$. Jesteśmy jednak w stanie dostosować definicję przyrostu argumentu funkcji $M(j\omega)$ do obecnej sytuacji. Zauważając w tym celu, że $\arg M(j\omega)$ jest funkcją ciągłą w przedziałach $(0, \rho)$ oraz (ρ, ∞) , możemy bowiem napisać:

$$\Delta \arg M(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \rho^-} M(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} M(j\omega)$$

oraz

$$\Delta \arg M(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \rho^+} M(j\omega).$$

Jak łatwo sprawdzić,

$$\Delta \arg(j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta}) + \Delta \arg(j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta}) = 0.$$

Po wprowadzeniu tej zmiany, a właściwie uogólnienia, dostosujemy do obecnych potrzeb lemat 5.1.2.

Lemat 5.2.1. *Wykres $M(j\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$, przechodzi przez punkt $s = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M(s)$ ma przynajmniej jeden pierwiastek na osi $j\omega$. Jeśli ponadto $M(s)$ ma jednokrotną parę biegunów urojonych i $a_m > 0$, to*

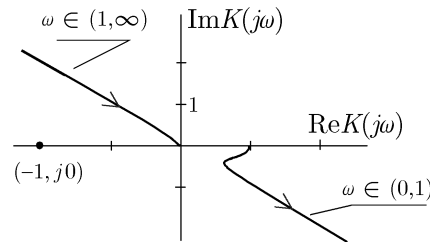
$$\Delta \arg M(j\omega) + \Delta \arg M(j\omega) = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}.$$

Dzięki powyższemu lematowi możemy podać następujące twierdzenie o stabilności systemu zamkniętego, czyli kolejną wersję kryterium Nyquista:

Twierdzenie 5.2.4 (Nyquist). *Niech $a_m > 0$ i niech $l < m$. Załóżmy, że transmitancja $K(s)$ ma jednokrotną parę biegunów na osi urojonej, a wszystkie pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko, gdy zachodzi warunek (5.9) oraz*

$$\Delta \arg [1 + K(j\omega)] + \Delta \arg [1 + K(j\omega)] = \pi.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $m_- = m - 2$ oraz $m_+ = 0$. ■



Rys. 5.20. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.2.10

Przykład 5.2.10. Transmitancja systemu otwartego $K(s) = 1/2(s^2 + 1)(2s + 1)$ ma jeden biegun w lewej półpłaszczyźnie i parę urojonych, a mianowicie $(j, -j)$. Funkcja $K(j\omega)$ jest nieciągła w punkcie $\omega = 1$ i, w związku z tym, charakterystyka amplitudowo-fazowa $K(j\omega)$, patrz rys. 5.20, składa się z dwóch gałęzi, dla jednej $\omega \in (0, 1)$, a drugiej $\omega \in (1, \infty)$. Ponieważ $\Delta \arg_{0 < \omega < 1}[1 + K(j\omega)] + \Delta \arg_{1 < \omega < \infty}[1 + K(j\omega)] = -\pi$, więc system zamknięty nie jest stabilny.

Rozdział 6

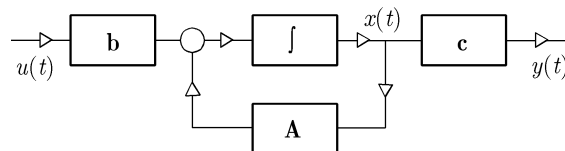
Równanie stanu

6.1. Wprowadzenie

Rozdział niniejszy w całości jest poświęcony równaniom stanu, czyli opisowi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

w którym $\mathbf{x}(t)$ jest wektorem stanu o wymiarze k , \mathbf{A} macierzą kwadratową stopnia k , a \mathbf{b} oraz \mathbf{c} wektorami kolumnowymi o wymiarze k . Warunkiem początkowym jest $\mathbf{x}(0-)$. Liczbę k nazywamy rzędem tego równania. Opis można więc utożsamić z trójką $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Schemat blokowy odpowiadający temu równaniu pokazano na rys. 6.1. Opis ten jest wygodny w pewnych zastosowaniach, przyjmuje się jako podstawowy w teorii sterowania. Posługiwanie się nim wymaga jednak pewnej znajomości teorii macierzy i dlatego omawiamy go osobno.



Rys. 6.1. Schemat blokowy odpowiadający równaniu (6.1);
 \int oznacza operację całkowania

Po dokonaniu transformacji Laplace'a wobec obydwu stron równania otrzymujemy

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s),$$

skąd wynika, że $X(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0-) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$. W rezultacie

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0-) + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau.$$

W rozdziale 2 opisem podstawowym jest skalarne równanie różniczkowe, z którego wyprowadzamy inne, w tym transmitancję. W niniejszym punkcie wyjściowym jest równanie stanu, a jego celem zbadanie relacji pomiędzy tym równaniem, skalarnym równaniem różniczkowym i transmitancją.

Podstawiając $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{v}(t) + \mathbf{Tb}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}(t), \end{cases} \quad (6.2)$$

czyli nowe równanie stanu. Stanem systemu jest teraz $\mathbf{v}(t)$, a warunkiem początkowym $\mathbf{v}(0-) = \mathbf{T}\mathbf{x}(0-)$. Opisy, czyli równania stanu (6.1) i (6.2), jak również trójki $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ i $(\mathbf{TAT}^{-1}, \mathbf{Tb}, \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1})$, nazywamy równoważnymi, macierze \mathbf{A} oraz \mathbf{TAT}^{-1} podobnymi, a \mathbf{T} macierzą podobieństwa.

Jest oczywiste, że opis (6.1) ma nieskończenie wiele opisów z nim równoważnych, bowiem istnieje nieskończenie wiele nieosobliwych macierzy \mathbf{T} . Wszystkie te równania stanu są skojarzone z jednym systemem, czyli inaczej, jeden system ma nieskończenie wiele równoważnych sobie równań stanu. Jeśli zatem wszystkie opisy równoważne mają jakąś własność, to będziemy mówić, że własność tę ma system. Omówimy najpierw dwie takie własności, a mianowicie: sterowalność i obserwowalność. Dzięki temu dokładniej przyjrzymy się strukturze systemu i w rezultacie zbadamy relacje pomiędzy różnymi opisami, czyli równaniem różniczkowym, transmitancją oraz przedstawionym powyżej równaniem stanu. Na końcu zajmiemy się trzecią taką własnością – stabilnością.

Macierze \mathbf{A} oraz \mathbf{TAT}^{-1} – jako podobne – mają wspólny wielomian charakterystyczny

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (6.3)$$

patrz podrozdział C.3. Oznaczmy jeszcze

$$\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{k-1}]^T. \quad (6.4)$$

Ćwiczenie 6.1.1. Równaniami stanu podsystemów systemu o strukturze szeregowej przedstawionej na rys. 2.3 są odpowiednio:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1u, \\ w &= \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}_2\mathbf{v} + \mathbf{b}_2w, \\ y &= \mathbf{c}_2^T\mathbf{v}. \end{cases}$$

Sprawdzić, że równaniem stanu całego systemu jest

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u, \\ y &= [\mathbf{0}^T, \mathbf{c}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Ćwiczenie 6.1.2. System za sprzężeniem zwrotnym ma strukturę przedstawioną na rys. 2.5, przy czym równaniem stanu systemu otwartego jest

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}. \end{cases}$$

Wykazać, że równaniem stanu systemu zamkniętego jest

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{bc}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}. \end{cases}$$

6.2. System sterowalny

Wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\mathbf{P} = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}]$$

jest nieosobliwa, system (6.1) ma własność sterowalności, patrz Dodatek D. W kolejnych dwóch twierdzeniach podamy dwa nowe, równoważne równania stanu systemu sterowalnego nazywane kanonicznymi. O pierwszym z nich stanowi poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 6.2.1. *System sterowalny ma opis równoważny (6.2), w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} - \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dowód. Jako macierz transformacji przyjmujemy $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$, co można uczynić, ponieważ \mathbf{P} jest macierzą nieosobliwą. Najpierw wykazemy, że

$$\mathbf{AT}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} - \mathbf{a} \end{bmatrix}.$$

Rzeczywiście równość ta jest prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest równa

$$\mathbf{AT}^{-1} = \mathbf{AP} = \mathbf{A} [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] = [\mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}, \mathbf{A}^k\mathbf{b}],$$

a prawa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} - \mathbf{a} \end{bmatrix} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} - \mathbf{a} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\mathbf{a} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}, -\mathbf{Pa}], \end{aligned}$$

przy czym $\mathbf{a} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{b}$. Ponieważ macierze \mathbf{A} i \mathbf{TAT}^{-1} są podobne, zatem ich wielomiany charakterystyczne są identyczne. Ponieważ \mathbf{TAT}^{-1} jest macierzą fazową, więc \mathbf{a} jest wektorem współczynników tego wielomianu, czyli takim jak w (6.4).

Aby zweryfikować drugą część tezy, wystarczy sprawdzić, że $\mathbf{b} = \mathbf{P}[1, 0, \dots, 0]^T$, co rzeczywiście zachodzi, gdyż

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem rzeczony opis istnieje. ■

Kolejne twierdzenie podaje drugi opis systemu sterowalnego.

Twierdzenie 6.2.2. *System sterowalny ma opis równoważny (6.2), w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dowód. Pamiętając, że a_0, \dots, a_{k-1} są współczynnikami wielomianu charakterystycznego macierzy \mathbf{A} , definiujemy wektory $\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_k$ w następujący sposób¹:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{b}, \\ \boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0 - a_{k-1}\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0 - a_{k-1}\boldsymbol{\xi}_0, \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{k-1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-2} - a_1\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-2} - a_1\boldsymbol{\xi}_0, \\ \boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-1} - a_0\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-1} - a_0\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Aby uzasadnić ostatnią z powyższych równości, a mianowicie $\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{0}$, zauważamy, że $\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{b} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\mathbf{A}^i\mathbf{b}$ i odwołujemy się do równości $\mathbf{A}^k\mathbf{b} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i\mathbf{A}^i\mathbf{b}$ wynikającej z twierdzenia C.4.2 Cayley'a–Hamiltona.

¹W.G. Tuel, Jr., *On the transformation to (phase-variable) canonical form*, IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, AC-11, 11, 607–608.

Niech teraz $\mathbf{T}^{-1} = [\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_{k-2}, \dots, \boldsymbol{\xi}_0]$. Ponieważ $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{PH}$, gdzie

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \\ & 1 & -a_{k-1} & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & a_{k-2} \\ & & & \ddots & a_{k-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą nieosobliwą, zatem $\det \mathbf{T}^{-1} \neq 0$.

Aby wykazać pierwszą z zapowiadanych równość, zauważmy, że

$$\mathbf{AT}^{-1} = [\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-2}, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0].$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} &= [\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_{k-2}, \dots, \boldsymbol{\xi}_0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{k-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= [-a_0\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_{k-1} - a_1\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_2 - a_{k-2}\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1 - a_{k-1}\boldsymbol{\xi}_0]. \end{aligned}$$

Z ostatniej z równości w zestawie (6.5) wynika, że $-a_0\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-1}$, z przedostatniej, że $\boldsymbol{\xi}_{k-1} - a_1\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-2}$ itd. Stwierdzamy w ten sposób, że

$$\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} = [\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{k-2}, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0],$$

skąd wynika prawdziwość pierwszej z równości podanych w tezie.

Druga jest oczywista, bowiem

$$[\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_{k-2}, \dots, \boldsymbol{\xi}_0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

co kończy dowód. ■

Wykazaliśmy więc, że sterowalny system (6.1) ma dwa następujące opisy równoważne:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \mathbf{a} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}] \mathbf{x} \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}] \mathbf{x}, \end{cases}$$

gdzie $[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}]$ i $[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}]$ są pewnymi wektorami, natomiast \mathbf{a} jest wektorem (6.4) współczynników wielomianu charakterystycznego (6.3). Aby uniknąć komplikacji wśród oznaczeń, wektor stanu w każdym z tych przypadków jest oznaczony jako \mathbf{x} . Dla uproszczenia piszemy ponadto \mathbf{x} , u oraz y zamiast $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ oraz $y(t)$. Opisy te są nazywane kanonicznymi, a pary

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ oraz } \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

kanonicznymi dla systemu sterowalnego.

Ćwiczenie 6.2.1. Wykazać, że jeśli $\mathbf{T} = [\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}]^{-1}$, to

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -a_{k-1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [\theta_{k-1}, \theta_{k-2}, \dots, \theta_0] \mathbf{v}. \end{cases}$$

Ćwiczenie 6.2.2. Wykazać, że jeśli $\mathbf{T} = [\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}]^{-1}$, gdzie wektory $\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}$ są jak w dowodzie twierdzenia 6.2.2, to

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -a_{k-1} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [\gamma_{k-1}, \gamma_{k-2}, \dots, \gamma_0] \mathbf{v}. \end{cases}$$

6.3. System obserwowalny

Wtedy i tylko wtedy, gdy macierz obserwowalności

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa, opis (6.1) jest obserwowalny, patrz Dodatek D. Argumentując jak w podrozdziale 6.1, można wykazać, że obserwowalność jest własnością systemu, tzn. że albo wszystkie opisy równoważne (6.2) są obserwowalne, albo wszystkie są nieobserwowalne.

Podamy teraz dwa równania stanu systemu obserwowalnego. Są one nazywane kanonicznymi.

Twierdzenie 6.3.1. *System obserwowalny ma opis równoważny (6.2), w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} = [1, 0, \dots, 0].$$

Dowód. Zakładając, że system (6.1) jest obserwowalny, przyjmujemy $\mathbf{T} = \mathbf{Q}$. Macierz \mathbf{T} jest nieosobliwa, ponieważ $\det \mathbf{Q} \neq 0$. Najpierw zweryfikujemy pierwszą część tezy, tzn. sprawdzimy, że

$$\mathbf{TA} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{T}.$$

Ponieważ

$$\mathbf{TA} = \mathbf{QA} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-2} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & -\mathbf{a}^T & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-2} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \\ -\mathbf{a}^T \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

zatem jest ona prawdziwa, przy czym $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{Q}^{-1} = -\mathbf{a}^T$. Ponieważ macierze \mathbf{A} i \mathbf{TAT}^{-1} są podobne, więc mają wspólny wielomian charakterystyczny. Ponieważ ponadto \mathbf{TAT}^{-1} jest macierzą fazową, patrz podrozdział C.5, \mathbf{a} jest wektorem współczynników tego wielomianu zdefiniowanym w (6.4).

Weryfikacja drugiej części tezy polega na sprawdzeniu równości $\mathbf{c}^T = [1, 0, \dots, 0] \mathbf{T}$, która rzeczywiście zachodzi, dlatego że

$$[1, 0, \dots, 0] \mathbf{T} = [1, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{c}^T,$$

co kończy dowód istnienia równania równoważnego o zapowiedzianej strukturze. Jest ono obserwowalne, gdyż jego macierz sterowalności jest macierzą jednostkową, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 6.3.2. *System obserwowalny ma opis równoważny (6.2), w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} - \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} = [0, \dots, 0, 1].$$

Dowód. Wektory $\boldsymbol{\eta}_0, \dots, \boldsymbol{\eta}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_k$ definiujemy kolejno w następujący sposób: $\boldsymbol{\eta}_0^T = \mathbf{c}^T$, $\boldsymbol{\eta}_1^T = \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{A} - a_{k-1} \mathbf{c}^T$, $\boldsymbol{\eta}_2^T = \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{A} - a_{k-2} \mathbf{c}^T$, \dots , $\boldsymbol{\eta}_k^T = \boldsymbol{\eta}_{k-1}^T \mathbf{A} - a_0 \mathbf{c}^T$ i stosując argumenty jak w dowodzie twierdzenia 6.2.2, wykazujemy prawdziwość tezy. ■

Wykazaliśmy, że obserwowalny system (6.1) ma dwa następujące opisy równoważne nazywane kanonicznymi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} u, \\ y = [1, 0, \dots, 0] \mathbf{x}, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{a} \\ \mathbf{I} & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix} u, \\ y = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{x}, \end{cases}$$

gdzie $[\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{k-1}]$ oraz $[\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}]$ są pewnymi wektorami. Pary

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}, [1, 0, \dots, 0] \right) \text{ oraz } \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} - \mathbf{a} \end{bmatrix}, [0, \dots, 0, 1] \right)$$

nazywają się kanonicznymi dla systemu obserwowalnego.

Ćwiczenie 6.3.1. Wykazać, że jeśli

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix},$$

to

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -a_{k-1} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \rho_{k-1} \\ \rho_{k-2} \\ \vdots \\ \rho_0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{v}. \end{cases}$$

Ćwiczenie 6.3.2. Wykazać, że jeśli system jest obserwowalny, to jego opisem równoważnym jest

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \beta_{k-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u, \\ y = [1, 0, \dots, 0] \mathbf{v}. \end{cases}$$

6.4. Struktura systemu

Dokonując odpowiedniej transformacji podobieństwa \mathbf{T} , można system zdekomponować, wydzielając w nim części sterowalne i obserwowalne. Pokażemy następnie relacje pomiędzy rezultatami takiej dekompozycji a poznanymi wcześniej opisami, czyli równaniem różniczkowym i transmitancją.

6.4.1. Struktura a sterowalność

Zajmiemy się teraz dowolnym systemem i dokonamy jego dekompozycji na część sterowalną i niesterowalną. Założymy więc, że $\text{rank } \mathbf{P} = r \leq k$, co oznacza, że system może być niesterowalny. Jako macierz przekształcenia przyjmijmy teraz

$$\mathbf{T} = [\mathbf{P}_r, \mathbf{S}]^{-1}, \quad (6.6)$$

gdzie $\mathbf{P}_r = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}]$ oraz \mathbf{S} jest pewną macierzą o k wierszach i $k - r$ kolumnach. Zauważmy przede wszystkim, że $\text{rank } \mathbf{P}_r = r$, co wynika z lematu D.1.1. Prostokątną macierz \mathbf{S} wybieramy w związku z tym tak, aby utworzona w ten sposób macierz $[\mathbf{P}_r, \mathbf{S}]$ była nieosobliwa.

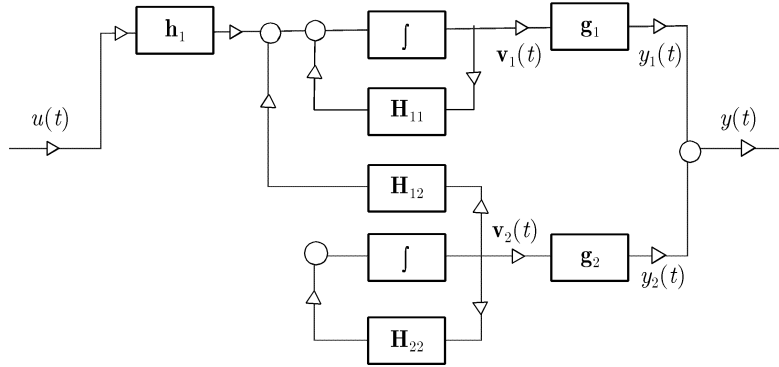
Wykażemy, że otrzymuje się w ten sposób równoważny opis (6.2) o postaci jak poniżej

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u, \\ y = [\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (6.7)$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{v},$$

przy czym \mathbf{v}_1 , \mathbf{h}_1 oraz \mathbf{g}_1 są wektorami o r wymiarach, natomiast \mathbf{v}_2 oraz \mathbf{g}_2 o $k - r$ wymiarach. Kwadratowe macierze \mathbf{H}_{11} oraz \mathbf{H}_{22} są stopnia r oraz $k - r$. Można więc powiedzieć, że dokonaliśmy w ten sposób dekompozycji systemu na dwa podsystemy, patrz rys. 6.2.



Rys. 6.2. Dekompozycja systemu na część sterowalną i niesterowalną, patrz (6.7)

Pierwszy podsystem, rzędu r , o wektorze stanu \mathbf{v}_1 , wejściu u i wyjściu y_1 jest sterowalny i ma równanie

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{H}_{11}\mathbf{v}_1 + \mathbf{h}_1 u, \\ y_1 &= \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1. \end{cases}$$

Jego macierz \mathbf{H}_{11} i wektor \mathbf{h}_1 mają sterowalną formę kanoniczną, tzn.

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathbf{I} & \end{bmatrix}, \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\mathbf{P}_r^T \mathbf{P}_r)^{-1} \mathbf{P}_r^T \mathbf{A}^r \mathbf{b}$. Drugi podsystem rzędu $k-r$, o wektorze stanu \mathbf{v}_2 , wejściu u i wyjściu y_2 ma równanie

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_2 &= \mathbf{H}_{22}\mathbf{v}_2 + \mathbf{h}_2 u, \\ y_2 &= \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2. \end{cases}$$

Podsystemy te sprzęgnięte są macierzą \mathbf{H}_{12} , przy czym macierze \mathbf{H}_{12} oraz \mathbf{H}_{22} są dane wzorem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{P}_r, \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}. \quad (6.8)$$

Wyjściem całego systemu jest $y = y_1 + y_2$.

Wbrew pozorom, wykazanie powyższego nie jest trudne, ponieważ sprowadza się do weryfikacji tego, że

$$[\mathbf{P}_r, \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{P}_r, \mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \text{ oraz } [\mathbf{P}_r, \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Aby dowieść prawdziwości pierwszej równości, wystarczy wykazać, że

$$[\mathbf{P}_r, \mathbf{S}] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A} [\mathbf{P}_r, \mathbf{S}],$$

czyli że

$$\mathbf{P}_r \mathbf{H}_{11} = \mathbf{A} \mathbf{P}_r \text{ oraz } \mathbf{P}_r \mathbf{H}_{12} + \mathbf{S} \mathbf{H}_{22} = \mathbf{A} \mathbf{S}. \quad (6.10)$$

Zauważmy w tym celu:

$$\mathbf{P}_r \mathbf{H}_{11} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \alpha_1 = [\mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}, \mathbf{P}_r \alpha_1]$$

oraz

$$\mathbf{A} \mathbf{P}_r = [\mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}, \mathbf{A}^r \mathbf{b}].$$

Pierwsza z równości (6.10) zachodzi więc o ile $\mathbf{P}_r \alpha_1 = \mathbf{A}^r \mathbf{b}$, co jest równoważne równości $\mathbf{P}_r^T \mathbf{P}_r \alpha_1 = \mathbf{P}_r^T \mathbf{A}^r \mathbf{b}$. Ponieważ $\text{rank } \mathbf{P}_r = r$, zatem, dzięki ćwiczeniu C.1.1, możemy napisać, że $\alpha_1 = (\mathbf{P}_r^T \mathbf{P}_r)^{-1} \mathbf{P}_r^T \mathbf{A}^r \mathbf{b}$. Druga z tych równości zachodzi, jeśli

$$\mathbf{A} \mathbf{S} = [\mathbf{P}_r, \mathbf{S}] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix},$$

co rzeczywiście ma miejsce, patrz (6.8).

Weryfikacja drugiej równości zawartej w (6.9) jest jeszcze łatwiejsza, bowiem

$$[\mathbf{P}_r, \mathbf{S}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_r \mathbf{h}_1 = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Ponieważ system można utożsamić z trójką $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, zatem można powiedzieć, że został on zdekomponowany na sprzęgnięte za sobą podsystemy, a mianowicie $(\mathbf{H}_{11}, \mathbf{h}_1, \mathbf{0})$ oraz $(\mathbf{H}_{22}, \mathbf{0}, \mathbf{g}_2)$, przy czym pierwszy z nich jest sterowalny i ma postać kanoniczną.

6.4.2. Struktura a obserwowalność

Teraz zaczniemy zatem od założenia, że $\text{rank } \mathbf{Q} = s \leq k$, co oznacza, że system może być nieobserwowalny. Jako macierz przekształcenia przyjmujemy

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

gdzie

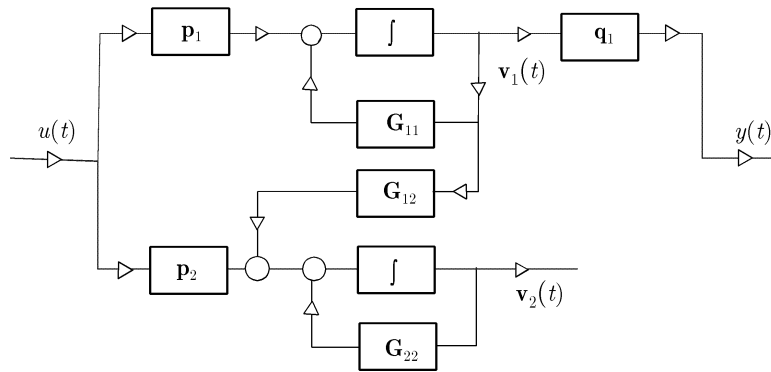
$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{s-1} \end{bmatrix},$$

a \mathbf{R} jest pewną macierzą o $k - s$ wierszach i k kolumnach. Zauważając, że $\text{rank } \mathbf{Q}_s = s$, co wynika z lematu D.1.1, prostokątną macierz \mathbf{R} dobieramy tak, aby utworzona w ten sposób macierz \mathbf{T} była nieosobliwa.

Wykażemy, że otrzymuje się w ten sposób opis (6.2) o postaci jak poniżej

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} u, \\ y = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (6.12)$$

przy czym \mathbf{v}_1 , \mathbf{p}_1 oraz \mathbf{q}_1 są wektorami o s wymiarach, natomiast \mathbf{v}_2 oraz \mathbf{p}_2 wektorami o $k - s$ wymiarach. Kwadratowe macierze \mathbf{G}_{11} oraz \mathbf{G}_{22} są stopnia s oraz $k - s$. Prostokątna macierz \mathbf{G}_{21} ma $k - s$ wierszy i s kolumn. Dokonałiśmy w ten sposób dekompozycji systemu na dwa podsystemy, patrz rys. 6.3.



Rys. 6.3. Dekompozycja systemu na część obserwowalną i nieobserwowalną, patrz (6.12)

Pierwszy, rzędu s , o wektorze stanu \mathbf{v}_1 , wejściu u i wyjściu y_1 , jest obserwowalny i ma równanie

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{G}_{11}\mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_1 u, \\ y_1 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Jego macierz \mathbf{G}_{11} i wektor \mathbf{q}_1 mają obserwowalną formę kanoniczną, tzn.

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\beta}_1^T & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^T = [1, 0, \dots, 0],$$

gdzie $\boldsymbol{\beta}_1^T = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^s \mathbf{Q}_s^T (\mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_s^T)^{-1}$. Drugi podsystem rzędu $k - s$, o wektorze stanu \mathbf{v}_2 , wejściu u i wyjściu y_2 , ma równanie

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{G}_{22}\mathbf{v}_2 + \mathbf{p}_2 u, \\ y_2 = \mathbf{0}^T \mathbf{v}_2. \end{cases} \quad (6.14)$$

Podsystemy te sprzęgnięte są macierzą \mathbf{G}_{21} . Macierze \mathbf{G}_{21} oraz \mathbf{G}_{22} dane są wzorem

$$[\mathbf{G}_{21}, \mathbf{G}_{22}] = \mathbf{R} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Aby wykazać prawdziwość zapowiedzianej dekompozycji, należy sprawdzić, że

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

W celu dowiedzenia pierwszej równości wystarczy wykazać, że

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix},$$

tzn. że

$$\mathbf{Q}_s \mathbf{A} = \mathbf{G}_{11} \mathbf{Q}_s \text{ oraz } \mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{G}_{21} \mathbf{Q}_s + \mathbf{G}_{22} \mathbf{R}.$$

Ponieważ

$$[\mathbf{Q}_s \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^s \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{G}_{11} \mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \beta_1^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{s-1} \\ \beta_1^T \mathbf{Q}_s \end{bmatrix},$$

pierwsza z równości zachodzi, jeśli $\beta_1^T \mathbf{Q}_s = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^s$. Ponieważ $\text{rank } \mathbf{Q}_s = s$, zatem, dzięki ćwiczeniu C.1.1, możemy napisać, że $\beta_1^T = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^s \mathbf{Q}_s^T (\mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_s^T)^{-1}$. Przepisując drugą w postaci

$$\mathbf{R} \mathbf{A} = [\mathbf{G}_{21}, \mathbf{G}_{22}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{R} \end{bmatrix},$$

kończymy dowód prawdziwości dekompozycji.

System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ został zatem zdekomponowany na dwa sprzęgnięte za sobą podsystemy, a mianowicie obserwowalny $(\mathbf{G}_{11}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ o postaci kanonicznej oraz nieobserwowalny $(\mathbf{G}_{22}, \mathbf{p}_2, \mathbf{0})$.

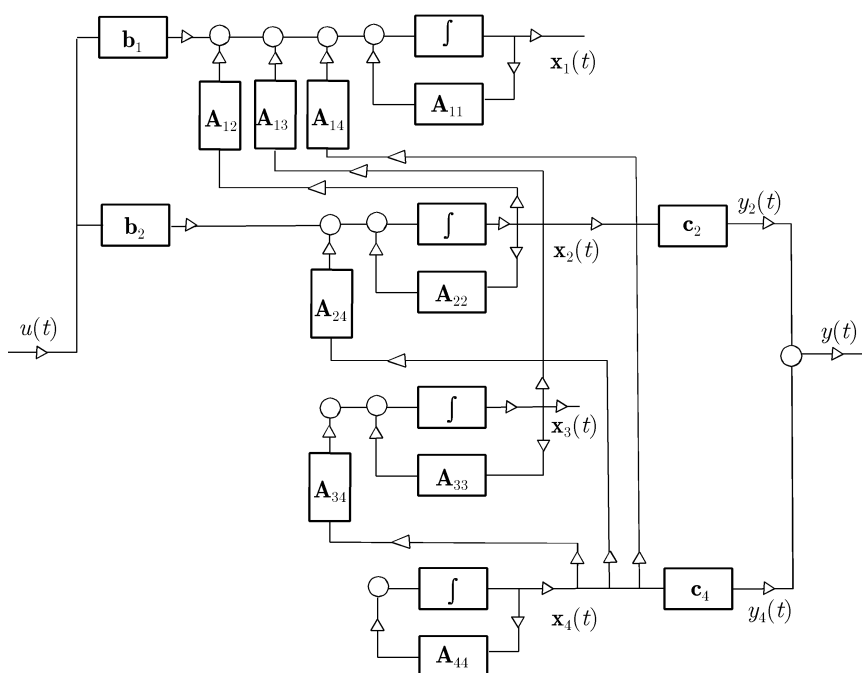
6.4.3. Pełna struktura systemu

Dokonyamy teraz pełnej dekompozycji systemu². Postępując w znany już sposób, można bowiem zdekomponować podsystem obserwowalny (6.13) na dwa podsystemy, a mianowicie: sterowalny i niesterowalny. To samo można uczynić z podsystemem nieobserwowalnym (6.14). W rezultacie cały system można w ten sposób zdekomponować na cztery podsystemy: sterowalny i obserwowalny, sterowalny i nieobserwowalny, niesterowalny i obserwowalny oraz nieobserwowalny i niesterowalny. Są one odpowiednio sprzężone między sobą.

²E.G. Gilbert, *Controllability and observability in multivariate control systems*, J. SIAM on Control, 1963, 1, 128–151. R.E. Kalman, *Mathematical description of linear dynamical systems*, J. SIAM on Control, 1963, 1, 152–192.

Efektym będzie zatem poniższe równanie stanu i odpowiadający mu rys. 6.4:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u, \\ y = [\mathbf{0}^T, \mathbf{c}_2^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{c}_4^T] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (6.15)$$



Rys. 6.4. Pełna dekompozycja systemu, patrz (6.15)

Wektor stanu składa się z czterech części o wymiarach, powiedzmy, p, q, r oraz s , co oznacza, że $p+q+r+s = k$. System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ składa się więc z odpowiednio sprzęgniętych między sobą czterech podsystemów, a mianowicie $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{b}_1, \mathbf{0})$, $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$, $(\mathbf{A}_{33}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ oraz $(\mathbf{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{c}_4)$ o rządach p, q, r , oraz s . O podsystemach tych możemy stwierdzić:

- $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{b}_1, \mathbf{0})$ jest sterowalny i nieobserwowalny,
- $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ jest sterowalny i obserwowalny,
- $(\mathbf{A}_{33}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest niesterowalny i nieobserwowalny,
- $(\mathbf{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{c}_4)$ jest niesterowalny i obserwowalny.

6.5. Równanie stanu, równanie różniczkowe, transmitancja

6.5.1. Równanie stanu, równanie różniczkowe

Z równań (6.12), co potwierdza rys. 6.3, wynika, że wyjście y systemu zależy jedynie od części obserwowalnej, czyli od $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ oraz $(\mathbf{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{c}_4)$, a także sprzężenia \mathbf{A}_{24} między nimi. Równanie różniczkowe systemu zależy zatem jedynie od równania opisującego część obserwowalną, które ma postać

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u, \\ y = [\mathbf{c}_2^T, \mathbf{c}_4^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Prawdziwa jest więc poniższa własność:

Własność 6.5.1. *Równanie różniczkowe systemu (6.1) zależy tylko od części obserwowalnej. Zatem część systemu opisywana równaniem różniczkowym jest obserwowalna.*

Założmy teraz, że system (6.1) jest obserwowalny. Aby znaleźć jego równanie różniczkowe, dokonamy obustronnej transformacji Laplace'a równania (6.1) i otrzymamy w rezultacie $s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s)$. Zatem $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}U(s)$, co, po uwzględnieniu równości $s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]^{-1}$, prowadzi nas do wniosku, że $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}U(s)$. Ostatecznie

$$Y(s) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}U(s).$$

Pamiętamy przy tym, że wszystkie elementy macierzy $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ są wielomianami argumentu s stopnia nie wyższego niż $k - 1$. Oznaczając więc

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_1s + a_0$$

oraz

$$\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = \beta_{k-1}s^{k-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0,$$

otrzymujemy równanie różniczkowe o postaci

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = \beta_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + \beta_1u^{(1)} + \beta_0u.$$

Jest oczywiste, że $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ jest jego wielomianem charakterystycznym, którego stopień jest równy stopniowi macierzy \mathbf{A} , czyli wymiarowi wektora stanu. Rząd równania różniczkowego opisującego system obserwowalny jest zatem równy wymiarowi wektora stanu.

Zadanie odwrotne polegające na znalezieniu równania stanu odpowiadającego równaniu różniczkowemu jest trudniejsze. Można je rozwiązać na kilka sposobów, które podamy poniżej. Założmy zatem, że system obserwowalny ma równanie różniczkowe

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \quad (6.17)$$

oznaczmy $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{k-1}]^T$ i przypomnijmy, że $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T$. Podamy teraz różne równania stanu (6.1) odpowiadające temu równaniu różniczkowemu. Ich cechą wspólną jest to, że \mathbf{A} jest w nich macierzą fazową, patrz podrozdział C.5. Dowody tego, że odpowiadają one równaniu różniczkowemu (6.17) podajemy w następnym paragrafie.

Zacniemy od równania o obserwowalnej postaci kanonicznej

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \beta u, \\ y &= [1, 0, \dots, 0] \mathbf{x}, \end{cases} \quad (6.18)$$

gdzie $\beta = [\beta_0, \dots, \beta_{k-1}]^T = \Delta^{-1} \mathbf{b}$, przy czym

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{k-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Macierz Δ^{-1} istnieje, ponieważ $\det \Delta = (-1)^{k(k-1)/2} \neq 0$, patrz dodatek C.

Drugie ma następującą postać:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \mathbf{b}^T \mathbf{x}. \end{cases} \quad (6.20)$$

Innym, ważnym w późniejszych rozważaniach, równaniem stanu jest

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \\ y &= [0, \dots, 0, 1] \mathbf{x}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Dla równania tego:

$$\mathbf{c}^T \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b} = b_{k-1} s^{k-1} + \cdots + b_1 s + b_0, \quad (6.22)$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad (6.23)$$

gdzie $\mathbf{c} = [0, \dots, 0, 1]^T$, patrz ćwiczenia C.5.1 oraz C.5.3.

Zauważmy przy tym, że transformacja podobieństwa \mathbf{T} nie zmienia wartości wyrażeń $\mathbf{c}^T [\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b}$ oraz $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, patrz (6.2) oraz ćwiczenia C.3.1 i C.3.2. Są więc one takie same dla wszystkich, także powyższych trzech, równoważnych równań stanu. Pozostaje to w zgodzie z tym co oczywiste, a mianowicie, że równanie różniczkowe odpowiadające opisom równoważnym jest wspólne.

Jeśli macierz \mathbf{A} ma wszystkie wartości własne różne, to zastosowanie wobec równania (6.1) transformacji $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$, gdzie $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k]$ składa się z wektorów własnych $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ macierzy \mathbf{A} , prowadzi do równania

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \end{cases}$$

w którym $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} , patrz podrozdział C.3.

Przykład 6.5.1. Dla obserwowalnego równania stanu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1, 4] \mathbf{x} \end{cases}$$

znajdujemy

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right) = s^2 + 3s + 2$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T [\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b} &= [1, 4] \text{adj}\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 14s - 22, \end{aligned}$$

skąd wynika, że równaniem różniczkowym jest $y'' + 3y' + 2y = 14u' - 22u$.

Przykład 6.5.2. Niech $y'' + a_1y' + a_0y = b_1u' + b_0u$, co oznaczają, że: $\mathbf{a} = [a_0, a_1]^T$, $\mathbf{b} = [b_0, b_1]^T$,

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1 b_1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1 b_1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1, 0] \mathbf{x}, \end{cases}$$

przy czym

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} - b_1 u \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.5.3. Dla równania różniczkowego jak w przykładzie 6.5.2 mamy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [0, 1] \mathbf{x}, \end{cases}$$

przy czym

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 y + \dot{y} - b_1 u \\ y - u \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.5.4. Dla równania różniczkowego jak w przykładzie 6.5.2 możemy napisać

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [b_0, b_1] \mathbf{x}. \end{cases}$$

Ćwiczenie 6.5.1. Wielomian charakterystyczny $s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_1s + a_0$ równania różniczkowego (6.17) ma wszystkie pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_k różne. Zaczynając od równania (6.20) i przyjmując

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1^k & s_2^k & \dots & s_k^k \end{bmatrix},$$

czyli odwrotność macierzy Vandermonde'a, patrz podrozdział C.5, jako macierz transformacji, otrzymujemy równanie stanu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_k \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} u, \\ y = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{V} \mathbf{x}, \end{cases}$$

z macierzą diagonalną.

6.5.2. Dowody równoważności opisów

Dowód równoważności opisów (6.17) i (6.18). Zaczynamy od przepisania równań stanu w postaci $k + 1$ równań skalarnych jak poniżej:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2 + \beta_0 u, \\ x_2^{(1)} = x_3 + \beta_1 u, \\ \vdots \\ x_{k-1}^{(1)} = x_k + \beta_{k-2} u, \\ x_k^{(1)} = -\mathbf{a}^T \mathbf{x} + \beta_{k-1} u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (6.24)$$

Z pierwszego z tych równań wynika, że $x_2 = x_1^{(1)} - \beta_0 u$. Po uwzględnieniu wyniku różniczkowania obu stron ostatniego, otrzymujemy zatem

$$x_2 = y^{(1)} - \beta_0 u.$$

Różniczkując, możemy więc napisać, że $x_2^{(1)} = y^{(2)} - \beta_0 u^{(1)}$. Z drugiego równania otrzymujemy $x_3 = x_2^{(1)} - \beta_1 u$ i, po uwzględnieniu rezultatu ostatniego różniczkowania, zauważamy, że

$$x_3 = y^{(2)} - \beta_1 u - \beta_0 u^{(1)}.$$

Różniczkując stwierdzamy, że $x_3^{(1)} = y^{(3)} - \beta_1 u^{(1)} - \beta_0 u^{(2)}$. Postępując w ten sposób, dochodzimy w końcu do równania

$$x_k = y^{(k-1)} - \beta_{k-2} u - \dots - \beta_1 u^{(k-3)} - \beta_0 u^{(k-2)}. \quad (6.25)$$

Zestawiając razem otrzymane związki, spostrzegamy, że

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} - \mathbf{B} \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

przy czym

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \beta_0 & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{k-3} & & \\ \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & \cdots & \beta_0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

Obustronne zróżniczkowanie (6.25) doprowadza do równania

$$y^{(k)} - x_k^{(1)} = [0, \beta_{k-2}, \dots, \beta_0] \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę przedostatnie z równań w (6.24), otrzymujemy więc

$$y^{(k)} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} = [\beta_{k-1}, \beta_{k-2}, \dots, \beta_0] \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

i po uwzględnieniu (6.26) możemy napisać, że

$$y^{(k)} + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} = (\mathbf{a}^T \mathbf{B} + [\beta_{k-1}, \beta_{k-2}, \dots, \beta_0]) \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Porównując wynik z równaniem różniczkowym, czyli

$$y^{(k)} + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

dochodzimy do wniosku, że $\mathbf{b}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{B} + [\beta_{k-1}, \dots, \beta_1, \beta_0]$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T &= [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}] \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \beta_0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \beta_{k-3} & \beta_{k-4} & \cdots & 0 & \\ \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & \cdots & \beta_0 & 0 \end{bmatrix} + [\beta_{k-1}, \dots, \beta_1, \beta_0] \\ &= [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{k-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Delta}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^T$, zatem $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Delta}^{-1} \mathbf{b}$, co kończy dowód. \blacksquare

Dowód równoważności opisów (6.17) i (6.20). Przede wszystkim równania (6.20) przepiszemy w wygodniejszej postaci

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [b_0, \dots, b_{k-1}] \mathbf{x}. \end{cases}$$

Zaczynając od (6.17) i zauważając, że

$$\frac{U(s)}{s^k + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{b_{k-1} s^{k-1} + \cdots + b_1 s + b_0},$$

wprowadzamy nową zmienną $x(t)$, której transformatą Laplace'a jest

$$X(s) = U(s) \frac{1}{s^k + \cdots + a_1 s + a_0}.$$

Ponieważ $X(s)(s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \cdots + a_1 s + a_0) = U(s)$, wynika więc stąd, że

$$x^{(k)} + a_{k-1} x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = u.$$

Aby zweryfikować pierwsze z równań stanu, wystarczy ustalić wektor stanu w postaci $\mathbf{x} = [x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}]^T$. Ponieważ

$$Y(s) = (b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_1s + b_0)X(s),$$

zatem

$$y = b_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + b_1x^{(1)} + b_0x,$$

skąd wynika drugie z równań stanu. ■

Dowód równoważności opisów (6.17) i (6.21). Dzięki temu, że $y = x_k$, pierwsze wektorowe równanie w (6.21) przepisujemy w wygodniejszej postaci:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= (b_0u - a_0y), \\ x_2^{(1)} &= x_1 + (b_1u - a_1y), \\ &\vdots \\ x_{k-1}^{(1)} &= x_{k-2} + (b_{k-2}u - a_{k-2}y), \\ x_k^{(1)} &= x_{k-1} + (b_{k-1}u - a_{k-1}y). \end{cases}$$

Różniczkując obie strony drugiego z tych równań i wykorzystując pierwsze, otrzymujemy

$$x_2^{(2)} = x_1^{(1)} + (b_1u^{(1)} - a_1y^{(1)}) = (b_0u - a_0y) + (b_1u^{(1)} - a_1y^{(1)}).$$

Wykonując operację różniczkowanie wobec trzeciego równania i korzystając z otrzymanego wyniku, zauważamy, że

$$x_3^{(3)} = (b_0u - a_0y) + (b_1u^{(1)} - a_1y^{(1)}) + (b_2u^{(2)} - a_2y^{(2)}).$$

Powtarzając tę procedurę, otrzymujemy w końcu

$$x_k^{(k)} = (b_0u - a_0y) + (b_1u^{(1)} - a_1y^{(1)}) + \dots + (b_{k-1}u^{(k-1)} - a_{k-1}y^{(k-1)})$$

i po uwzględnieniu tego, że $x_k = y$, kończymy dowód. ■

Ćwiczenie 6.5.2. Wykazać, że w równaniu (6.21) wektorem stanu jest

$$\mathbf{x} = \Delta \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{k-1} & 1 \\ \vdots & & & \\ b_{k-1} & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 6.5.3. Sprawdzić, że dla obserwowalnego systemu o równaniu różniczkowym

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}y^{(k-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_0u(t),$$

równanie stanu ma postać (6.18), przy czym $\mathbf{x} = [y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}]$ jest wektorem fazowym, patrz podrozdział 2.7, natomiast $\mathbf{b} = [0, \dots, 0, b_0]^T$.

Ćwiczenie 6.5.4. Sprawdzić, że równaniem różniczkowym systemu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x} + \Delta^{-1} \mathbf{b}u, \\ y &= [1, 0, \dots, 0] \mathbf{x} + du \end{cases}$$

jest

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_0y = b_k u^{(k)} + b_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + b_0u,$$

przy czym $d = b_k$.

6.5.3. Równanie różniczkowe, transmitancja

Podamy teraz ważne twierdzenie, które dotyczy systemu jednocześnie obserwowalnego i sterowalnego. Odnosi się ono do opisów (6.1) oraz (6.17).

Twierdzenie 6.5.1. *Obserwowalny system (6.1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany*

$$\mathbf{c}^T [\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b} \text{ oraz } \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

nie mają żadnego wspólnego pierwiastka. System (6.17) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany

$$b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_1s + b_0 \text{ oraz } s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_1s + a_0$$

nie mają żadnego wspólnego pierwiastka.

Dowód. Załóżmy, że system (6.1) jest obserwowalny. Jak wiemy, transformacja podobieństwa \mathbf{T} nie zmienia wartości wyrażeń $\mathbf{c}^T [\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b}$ oraz $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, patrz podrozdział C.3, co oznacza, że możemy zacząć od dowolnego równania stanu równoważnego równaniu (6.1). Będzie nim (6.21) i odpowiadające mu równanie różniczkowe (6.17).

Oznaczając $w(s) = b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_1s + b_0$ i korzystając z równości (6.22), zauważamy, że $w(s) = \mathbf{c}^T [\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b}$. Pamiętajmy, że $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_1s + a_0$, patrz (6.23).

Jak wiemy, system jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{P} \neq 0$. Ponieważ \mathbf{A} jest macierzą fazową, korzystamy z lematu C.5.1, aby stwierdzić, że $\mathbf{P} = w(\mathbf{A})$. Zatem $\det \mathbf{P} = \det w(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^k w(s_i)$, gdzie s_1, \dots, s_k są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} , patrz twierdzenie Frobeniusa C.4.1. W rezultacie, $\det \mathbf{P} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\prod_{i=1}^k w(s_i) \neq 0$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy żadna wartość własna s_i macierzy \mathbf{A} , czyli żaden pierwiastek równania $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, nie jest jednocześnie pierwiastkiem wielomianu $w(s)$, co kończy dowód, bowiem prawdziwość drugiej części twierdzenia jest teraz oczywista. ■

Pierwsza część twierdzenia odnosi się do równania stanu systemu obserwowalnego i podaje warunek na to, aby był on także sterowalny. Druga dotyczy systemu opisywanego przez równanie różniczkowe, a więc obserwowalnego, i orzeka kiedy jest on także

sterowalny. Warunki te są konieczne i wystarczające. Nie musimy przy tym przypominać, że obserwowalny system (6.1) jest także sterowalny, gdy jego macierz sterowalności jest nieosobliwa.

Warto skomentować drugą część twierdzenia. Stwierdza ona, że równanie różniczkowe (6.17) opisuje system sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany

$$L(s) = b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_1s + b_0$$

oraz

$$M(s) = s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_1s + a_0$$

nie mają żadnego wspólnego pierwiastka. Interpretacja tego warunku jest ciekawa. Dokonując bowiem obustronnej transformacji Laplace'a równania (6.17), zauważamy bowiem, że $M(s)Y(s) = L(s)U(s)$, skąd wynika, że transmitancją systemu jest

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}.$$

Dowiedzione twierdzenie orzeka więc, że system jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany w liczniku i mianowniku jego transmitancji nie mają żadnego wspólnego pierwiastka.

Z powyższego wynika, że system o transmitancji

$$\frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

nie jest sterowalny, bowiem $s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$. Z tych samych powodów system o równaniu różniczkowym

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u'(t) + u(t)$$

nie jest sterowalny, gdyż $s^2+4s+3 = (s+1)(s+3)$. Ma on taką samą transmitancję jak system o równaniu

$$y'(t) + 3y(t) = u(t),$$

a mianowicie $1/(s+3)$. System o transmitancji

$$\frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

jest natomiast sterowalny.

Jest więc oczywiste, że tylko w systemie jednocześnie sterowalnym i obserwowalnym istnieje jednoznaczny związek pomiędzy równaniem różniczkowym i transmitancją. Jednoznaczny jest także ich związek z równaniem stanu, oczywiście z dokładnością do relacji podobieństwa.

Transmitancję systemu (6.1) znajdujemy bez trudu:

$$K(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.$$

Zauważamy także, że jeśli warunki początkowe wszystkich podsystemów są zerowe, to wyjście całości zależy jedynie od podsystemu jednocześnie sterowalnego i obserwowalnego, patrz (6.15), czyli od

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2u, \\ y = \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2. \end{cases}$$

Wyliczona transmitancja jest zatem równa

$$K(s) = \mathbf{c}_2^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.$$

Ćwiczenie 6.5.5. Dla systemu

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u, \\ y = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{cases} s\mathbf{X}_1(s) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_1(s) + \mathbf{b}_1U(s), \\ s\mathbf{X}_2(s) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_1(s) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{X}_2(s) + \mathbf{b}_2U(s), \\ Y(s) = \mathbf{c}_1^T\mathbf{X}_1(s), \end{cases}$$

skąd wynika, że $[\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})]Y(s) = \mathbf{c}_1^T[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})]\mathbf{b}_1U(s)$, co jest operatorową formą równania różniczkowego. Zależy ono jedynie od $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$, czyli podsystemu obserwowalnego, patrz punkt 6.4.2.

Ćwiczenie 6.5.6. Sprawdźmy, że równaniem różniczkowym systemu

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0, c_2, 0, c_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

jest

$$y'' - (a_{22} + a_{44})y' + a_{22}a_{44}y = c_2b_2u' - c_2b_2a_{44}u,$$

a transmitancją

$$K(s) = \frac{c_2b_2}{s - a_{22}}.$$

Transmitancję znajduje się łatwo. Do równania różniczkowego dochodzimy na podstawie równania stanu części obserwowalnej, czyli

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [c_2, c_4] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Zauważając, że wartościami własnymi macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

są a_{22} oraz a_{44} , łatwo weryfikujemy podane równanie różniczkowe.

W powyższym przykładzie równanie stanu rzędu 4 ma równanie różniczkowe rzędu 2 oraz transmitancję rzędu 1, tzn. taką, której mianownik jest wielomianem stopnia 1. Przyczyny, dla których rząd równania różniczkowego jest niższy od wymiaru wektora stanu są oczywiste. Istotę zjawiska polegającego na pojawieniu się różnicy rzędów równania różniczkowego i transmitancji też już znamy. Polega ona na tym, że wielomiany $\mathbf{c}^T[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b}$ oraz $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, tzn. wielomiany w liczniku i mianowniku ułamka

$$K(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}^T[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

będącego transmitancją systemu, mają jeden wspólny pierwiastek, który prowadzi do skróceń, czyli obniżenia rzędu.

Przykład 6.5.5. Równaniem różniczkowym systemu

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \\ y = [1, 0] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \end{cases}$$

a także jego części obserwowalnej, tzn. systemu

$$\begin{cases} \xi' = a_{11}\xi + b_1u, \\ y = \xi, \end{cases}$$

jest $y' - a_{11}y = b_1u$. Transmitancją jest natomiast $K(s) = b_1/(s - a_{11})$. Z drugiej jednak strony

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj} \begin{bmatrix} s - a_{11} & 0 \\ a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - a_{22} & 0 \\ -a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że zachodzi równość $\mathbf{c}^T[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b} = b_1s - b_1a_{22}$. Zauważając następnie, że $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - (a_{22} + a_{11})s + a_{22}a_{11}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} &= \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{c}^T[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b} \\ &= \frac{b_1s - b_1a_{22}}{s^2 - (a_{22} + a_{11})s + a_{22}a_{11}} = \frac{(s - a_{22})b_1}{(s - a_{11})(s - a_{22})} \\ &= \frac{b_1}{s - a_{11}}, \end{aligned}$$

co jest zgodne z wcześniejszym rezultatem. System, którego równanie stanu jest drugiego rzędu, ma więc transmitancję rzędu pierwszego. Dzieje się tak, ponieważ wielomiany $\mathbf{c}^T[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b}$ oraz $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mają wspólny pierwiastek, a mianowicie a_{22} .

6.6. Stabilność względem stanu

Oznaczając przez $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ wartości własne macierzy \mathbf{A} równania stanu (6.1), zauważmy, że są one także wartościami własnymi macierzy podobnej \mathbf{TAT}^{-1} występującej w równoważnym równaniu (6.2). Rozwiązania równań $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ oraz $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}) = 0$ są bowiem takie same. Zatem własności związane z wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} są wspólne dla wszystkich równań równoważnych. Są one zatem cechą systemu, a nie jedynie konkretnego równania. Własnością taką jest stabilność.

Przypominamy, że pobudzeniem zerowym nazywamy sygnał, w którym $u(t) = 0$ dla $t \in [0, \infty)$. Przy takim sygnale wejściowym

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-)$$

oraz

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-).$$

Jest więc oczywiste, że jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, lecz niekoniecznie na odwrót.

Jeśli, przy zerowym pobudzeniu, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ dla każdego warunku początkowego, to mówimy, że system jest stabilny względem wyjścia, patrz rozdział 4. Nas interesować będzie teraz stabilność względem stanu.

Definicja 6.6.1. *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

dla każdego warunku początkowego, to mówimy, że system (6.1) jest stabilny względem stanu.

Stabilność względem stanu pociąga za sobą stabilność względem wyjścia, lecz niekoniecznie na odwrót.

Jest oczywiste, że zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) = \mathbf{0}$ dla każdego $\mathbf{x}(0-)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}.$$

Wynika stąd, że system jest stabilny względem stanu wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi powyższa zbieżność. Jest ona związana z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ macierzy \mathbf{A} , patrz (C.19).

Twierdzenie 6.6.1. *System (6.1) jest stabilny względem stanu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k < 0.$$

Aby stwierdzić, czy system jest stabilny względem stanu, wystarczy zatem ustalić, czy wszystkie pierwiastki wielomianu $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ leżą w lewej półpłaszczyźnie. Można w tym celu wykorzystać np. kryterium Hurwitza, patrz punkt 5.1.3.

Przykład 6.6.1. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

znajdujemy $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - 5s + 2$, skąd wynika niestabilność.

Przykład 6.6.2. Jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

to $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + s + 1$. System jest stabilny.

Przykład 6.6.3. Jeśli $\det \mathbf{A} = 0$, to system jest niestabilny, gdyż zero jest wartością własną.

Zauważmy, że w świetle dekompozycji (6.15) pojęcie stabilności ulega pewnej komplikacji. Można bowiem rozpatrywać stabilność całego systemu (6.1) lub poszczególnych czterech jego części składowych. Z uwagi na wyniki dotyczące związków struktury z opisanymi można mówić o stabilności w sensie poszczególnych opisów, czyli stabilności w sensie transmitancji, równania różniczkowego i stanu. W szczególności można więc rozpatrywać stabilność:

- całego systemu, czyli równania stanu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$,
- równania różniczkowego, czyli części obserwowalnej, oraz
- transmitancji, czyli części jednocześnie sterowalnej i obserwowalnej.

Jest przy tym oczywiste, że pierwszy rodzaj stabilności, tzn. stabilność równania stanu, pociąga za sobą pozostałe. Drugi, czyli stabilność równania różniczkowego, zapewnia stabilność transmitancji. Należy jednak pamiętać, że stabilność transmitancji nie musi oznaczać stabilności równania różniczkowego, a tym bardziej równania stanu. Stabilność równania różniczkowego nie musi także skutkować stabilnością równania stanu.

Przykład 6.6.4. System

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \\ y &= [1, 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

nie jest stabilny, bowiem $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s + 1)(s - 2)$. Jego część obserwowalna o równaniu $\dot{x} + x = 0$ jest jednak stabilna, bowiem wartością własną jest dla niej -1 .

Przykład 6.6.5. System obserwowalny o równaniu różniczkowym $y'' + y' - 2y = u' - u$ nie jest stabilny, ponieważ jego wielomianem charakterystycznym jest $(s - 1)(s + 2)$, ale transmitancja $1/(s + 2)$, czyli jego część sterowalna, jest stabilna.

Ćwiczenie 6.6.1. Wykazać, że jeśli $\text{tr} \mathbf{A} \geq 0$, to system jest niestabilny.

Ćwiczenie 6.6.2. Sprawdzić, że jeśli obserwowalny i sterowalny system (6.1) jest stabilny, to jego wzmocnienie w stanie ustalonym jest równe $-\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

Ćwiczenie 6.6.3. Sprawdzić, że w systemie (6.1), przy zerowym warunku początkowym i pobudzeniu $u(t) = \delta(t)$, są prawdziwe następujące równości: $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\}$ oraz $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\}$, co jest odpowiedzią impulsową.

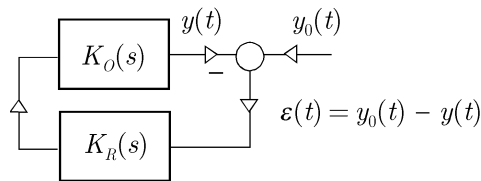
Ćwiczenie 6.6.4. Sprawdzić, że w systemie (6.1) $k(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{b}$.

Rozdział 7

Regulacja automatyczna

7.1. Wstęp

System automatycznej regulacji, przedstawiony na rys. 7.1, zawiera obiekt regulacji i regulator o transmitancjach $K_O(s)$ i $K_R(s)$. Sygnał wyjściowy $y(t)$ obiektu powinien być równy przychodzącemu z zewnątrz sygnałowi $y_0(t)$ wartości zadanej. Spełnienie tego zadania ma umożliwić regulator, który reaguje na sygnał $\varepsilon(t) = y_0(t) - y(t)$, czyli tzw. uchyb regulacji. O ile transmitancja obiektu $K_O(s)$ jest zadana, o tyle $K_R(s)$ podlega wyborowi.



Rys. 7.1. System automatycznej regulacji

System z rys. 7.1 można przedstawić również jak na rys. 7.2. Ma on ujemne sprzężenie zwrotne, patrz także rys. 5.9, a

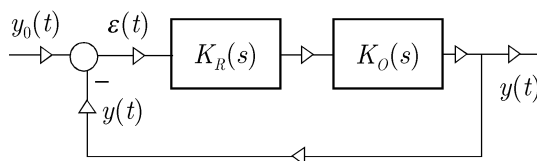
$$K(s) = K_O(s)K_R(s)$$

jest transmitancją systemu otwartego, patrz rys 7.3. Z rysunku tego wynika ponadto, że $E(s) = Y_0(s) - Y(s)$ oraz $Y(s) = K(s)E(s)$. Transmitancja $K_Z(s)$ systemu zamkniętego, tzn. systemu o wejściu y_0 i wyjściu y , jest zatem równa

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{K(s)}{1 + K(s)} = \frac{K_O(s)K_R(s)}{1 + K_O(s)K_R(s)}.$$

Oznaczając jak zwykle

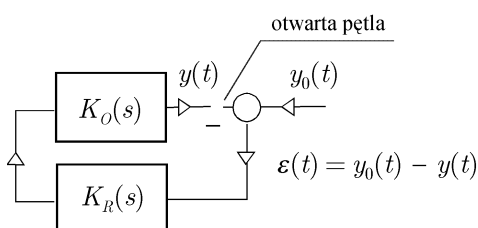
$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$



Rys. 7.2. Alternatywny schemat systemu automatycznej regulacji

otrzymujemy więc

$$K_Z(s) = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)}. \quad (7.1)$$



Rys. 7.3. Otwarty układ automatycznej regulacji

Przez $K_E(s)$ oznaczmy teraz tzw. transmitancję uchybową, tzn. transmitancję systemu o wejściu y_0 i wyjściu ε . Postępując jak powyżej, nietrudno sprawdzić, że wyraża się ona następującym wzorem:

$$K_E(s) = \frac{E(s)}{Y_0(s)} = \frac{1}{1 + K(s)} = \frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)},$$

z którego wynika, że

$$K_E(s) = \frac{M(s)}{L(s) + M(s)}. \quad (7.2)$$

Możemy zatem stwierdzić na końcu, że

$$M_Z(s) = L(s) + M(s)$$

jest wielomianem charakterystycznym zarówno transmitancji systemu zamkniętego, jak i uchybowej. Mówimy także, że jest to wielomian charakterystyczny systemu automatycznej regulacji.

Ćwiczenie 7.1.1. Transmitancja układu otwartego jest taka, że $l < m$. Niech sygnał wartości zadanej $y_0(t)$ będzie odcinkami ciągły, a warunek początkowy układu otwartego dowolny. Wykazać, że (patrz także ćwiczenie 2.6.1):

- wyjście obiektu $y(t)$ jest funkcją ciągłą,
- punkty nieciągłości uchybu $\varepsilon(t)$ oraz sygnału wartości zadanej $y_0(t)$ są identyczne.

7.2. Wymagania

Zadanie postawione przed systemem będzie spełnione w pełni wtedy, kiedy regulator zostanie dobrany w ten sposób, że $\varepsilon(t) \equiv 0$ dla każdego $y_0(t)$. Inaczej mówiąc, gdy $K_E(s) = 0$, czyli

$$\frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)} = 0,$$

co jednak nie jest możliwe. Wynika stąd prosty wniosek, że żądania te są zbyt wygórowane i należy je osłabić.

Nowe, możliwe do spełnienia wymagania postawimy w sytuacji, gdy $y_0(t) = 1(t)$. Zażądamy, aby reakcja $y(t)$ systemu, a tym samym uchyb $\varepsilon(t)$, miały wówczas odpowiednie własności zarówno dla dużych, jak i małych t .

7.2.1. Stabilność

Pierwsze żądanie polega na tym aby, przy pobudzeniu $y_0(t) = 1(t)$, granica uchybu $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istniała. Z własności 4.3.4 wynika, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy system zamknięty jest stabilny, co podamy jako poniższą własność.

Własność 7.2.1. *Niech $y_0(t) = 1(t)$. Granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system regulacji jest stabilny.*

W kontekście żądania stabilności należy stwierdzić, że system automatycznej regulacji jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego $M_Z(s)$ spełnia warunki któregośkolwiek z poniższych kryteriów:

- Hurwitza, patrz twierdzenie 5.1.3,
- Michajłowa, patrz twierdzenie 5.1.5,
- Nyquista, patrz twierdzenia 5.2.1–5.2.4 i dalsze.

7.2.2. Uchyb w stanie ustalonym

Stabilność zapewnia istnienie granicy $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$, czyli ustalonej wartości uchybu, gdy $y_0(t) = 1(t)$. Jest przy tym oczywiste, że zainteresowani jesteśmy małą jej wartością. W szczególności można żądać, aby wynosiła ona zero.

7.2.3. Szybkość regulacji

Trzeci aspekt świadczący o jakości systemu jest związany z szybkością regulacji. Przy pobudzeniu $y_0(t) = 1(t)$ i założeniu, że warunki początkowe w obiekcie oraz regulatorze są zerowe, szybkość reakcji w początkowym jej przebiegu będziemy oceniać, biorąc pod uwagę jej pochodne w punkcie $t = 0$, czyli $y^{(1)}(0)$, $y^{(2)}(0)$ itd. Dla przykładu, regulację, w której $y(0) = 0$ i $y'(0) > 0$, będziemy uważać za szybszą od tej, która zapewnia, że $y(0) = y'(0) = 0$ i $y''(0) > 0$. Innymi słowy, im mniej kolejnych pochodnych odpowiedzi $y(t)$ systemu zamkniętego zeruje się w punkcie $t = 0$, tym lepiej. Szybszy bowiem jest wtedy przebieg regulacji dla małych t , tzn. w początkowej fazie.

7.2.4. Podsumowanie

Podsumowując można stwierdzić, że od regulatora żądamy, aby zapewnił:

- stabilność,
- małą wartość uchybu w stanie ustalonym,
- dużą szybkość regulacji dla małych t .

Uwzględnienie wszystkich powyższych wymagań prowadzi do regulatora zapewniającego poprawny przebieg uchybu zarówno w jego początkowej, jak również końcowej fazie.

W dalszych rozważaniach mających na uwadze wymienione żądania założymy, że transmitancją obiektu jest

$$K_O(s) = \frac{L_O(s)}{M_O(s)}, \quad (7.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L_O(s) &= \beta_l s^l + \beta_{l-1} s^{l-1} + \dots + \beta_0, \\ M_O(s) &= \alpha_m s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \dots + \alpha_0, \end{aligned}$$

przy czym $\alpha_m \neq 0$, $\beta_l \neq 0$ oraz $m > l$. Oznaczmy jeszcze $p = m - l$. Z własności 2.4.9 wnioskujemy zatem, że

$$\lambda_O(0) = \lambda_O^{(1)}(0) = \dots = \lambda_O^{(p-1)}(0) = 0$$

i dopiero

$$\lambda_O^{(p)}(0) = \frac{\beta_l}{\alpha_m} \neq 0,$$

gdzie $\lambda_O(t)$ jest odpowiedzią skokową obiektu.

Dla potrzeb naszej analizy zastosujemy kilka rodzajów regulatorów. Omówimy charakterystyczne cechy otrzymanych układów regulacji i dokonamy ich porównania pod względem sposobu, w jaki spełniają przedstawione wymagania.

Przez $\deg[Q(s)]$ będziemy oznaczać stopień wielomianu $Q(s)$.

7.3. Regulacja statyczna, czyli P

Układ regulacji, w którym transmitancja $K(s)$ systemu otwartego nie ma bieguna w punkcie $s = 0$, nazywamy statycznym. Jeśli ponadto układ otwarty jest stabilny, to jego wzmocnienie w stanie ustalonym jest skończone i równe $K(0)$, patrz własność 4.3.4. Ma on zatem charakterystykę statyczną, co uzasadnia nazwę całego układu regulacji.

7.3.1. Własności

Dla dalszej analizy założymy, że transmitancja obiektu $K_O(s)$ podana we wzorze (7.3) nie ma bieguna w punkcie $s = 0$, czyli że nie ma on własności całkujących, oraz że transmitancją regulatora jest

$$K_R(s) = k_1.$$

Regulator taki nazywamy proporcjonalnym i oznaczmy go literą P.

Zbadamy teraz asymptotyczne własności uchybu w sytuacji, gdy $y_0(t) = 1(t)$. Zaczniemy od ważnej własności.

Własność 7.3.1. Niech $y_0(t) = 1(t)$. W stabilnym układzie automatycznej regulacji typu P uchyb w stanie ustalonym wyraża się wzorem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + k_1 K_O(0)} \neq 0.$$

Dowód. Stabilność systemu regulacji jest równoznaczna stabilności systemu o transmitancji $K_E(s)$ oraz istnieniu granicy $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$, patrz własność 7.2.1. Jej wielkość wynika z własności 4.3.4. ■

Zbadamy teraz własności reakcji $y(t)$ w punkcie $t = 0$, czyli szybkość reakcji na pobudzenie skokowe. Ponieważ

$$K_Z(s) = \frac{k_1 L_O(s)}{k_1 L_O(s) + M_O(s)},$$

zatem, obserwując, że $\deg[k_1 L_O(s) + M_O(s)] - \deg[k_1 L_O(s)] = p$ i korzystając z własności 2.4.9, wnioskujemy, że

$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p-1)}(0) = 0$$

i dopiero

$$y^{(p)}(0) = k_1 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_1 \lambda_O^{(p)}(0).$$

Jest oczywiste, że im większe p , tym wolniejsza jest reakcja na pobudzenie. Ponieważ jest wskazane, aby pochodna $y^{(p)}(0)$ była dodatnia, a na ogół $\lambda_O^{(p)}(0) > 0$, należy zatem stosować dodatnie i możliwie duże k_1 .

Przykład 7.3.1. Transmitancje obiektu i regulatora są równe

$$K_O(s) = \frac{10s + 1}{(3s - 1)^2(s + 1)} = \frac{10s + 1}{9s^3 + 3s^2 - 5s + 1}$$

i $K_R(s) = k$. Układ otwarty jest niestabilny, a jego transmitancją jest

$$K(s) = \frac{(10s + 1)k}{9s^3 + 3s^2 - 5s + 1}.$$

Równanie charakterystyczne zamkniętego systemu regulacji ma zatem następującą postać: $9s^3 + 3s^2 + (10k - 5)s + (k + 1) = 0$. Ponieważ macierzą Hurwitza jest

$$\begin{bmatrix} 3 & k + 1 & 0 \\ 9 & 10k - 5 & 0 \\ 0 & 3 & k + 1 \end{bmatrix},$$

zatem $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 21k - 24$ oraz $\Delta_3 = \Delta_2(k + 1)$. Zastosowanie kryterium Hurwitza prowadzi do wniosku, że system regulacji jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $8/7 < k$. Dla tak wybranego k , jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1 + k)$, $y(0) = y'(0) = 0$ oraz $y''(0) = 10k/9$.

Przykład 7.3.2. Transmitancje obiektu i regulatora są dane następującymi wzorami: $K_O(s) = (s + 3)/(s + 2)^2(s + 1)$ oraz $K_R(s) = k$. Wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego zatem to $s^3 + 5s^2 + (k + 8)s + 3k + 4$. Z kryterium Hurwitza wynika, że układ regulacji jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $-4/3 < k$. Dla takiego wzmocnienia k zatem, jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1 + 3k)$, $y(0) = y'(0) = 0$ oraz $y''(0) = k$.

Przykład 7.3.3. Transmitancją obiektu jest $K_O(s) = (s - 5)/(s + 2)^2(s - 1)$, natomiast regulatora $K_R(s) = k$. Prowadzi to do następującego wielomianu charakterystycznego: $M_Z(s) = s^3 + 3s^2 + ks + (-5k - 4)$. Stosując kryterium Hurwitza, stwierdzamy, że układ regulacji jest niestabilny.

Ćwiczenie 7.3.1. Wykazać, że jeśli w stabilnym statycznym układzie regulacji granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t)$ istnieje, to granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ także istnieje. Wyznaczyć ją zakładając, że $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 1$.

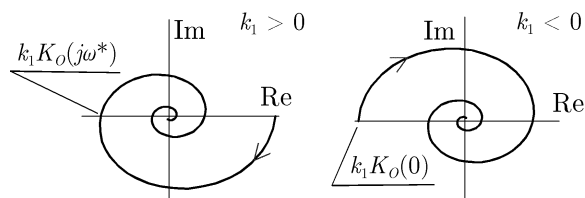
7.3.2. Regulacja z obiektem inercyjnym

Teraz zbadamy własności układu regulacji typu P w sytuacji, gdy obiekt jest inercyjny, tzn. gdy jego transmitancją jest

$$K_O(s) = \frac{1}{(s - s_1) \cdots (s - s_p)} \quad (7.4)$$

i wszystkie jej bieguny są ponadto rzeczywiste, ujemne. Zwracamy uwagę na to, że $K(0) > 0$.

Ponieważ, dla każdego i , $|1/(j\omega - s_i)|$ jest na półprostej $\omega \in [0, \infty)$ funkcją malejącą, a więc tę samą własność ma także $|K_O(j\omega)|$. Zatem, dla $k_1 > 0$, charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego, tzn. wykres $k_1 K_O(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$, ma kształt zwiijającej się spirali przechodzącej kolejno przez m ćwiartek płaszczyzny, jak to pokazano na rys. 7.4.



Rys. 7.4. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego

Jest więc oczywiste, że – z punktu widzenia stabilności – spośród punktów charakterystyki przecinających oś liczb rzeczywistych najistotniejszy jest ten najbardziej wysunięty na lewo. Odpowiada on najmniejszej dodatniej pulsacji ω rozwiązującej równanie $\text{Im} K_O(j\omega) = 0$. Oznaczając ją przez ω^* i odwołując się do kryterium Nyquista, dochodzimy do wniosku, że, dla $k_1 \geq 0$, warunkiem stabilności jest spełnienie nierówności

$$-1 < k_1 \text{Re} K_O(j\omega^*).$$

Z tego samego rysunku wynika, że, dla $k_1 < 0$, warunkiem stabilności jest nierówność

$$-1 < k_1 K_O(0).$$

Ostatecznie stwierdzamy, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wzmocnienie regulatora spełnia nierówności

$$k_{\min} < k_1 < k_{\max},$$

gdzie

$$k_{\min} = -\frac{1}{K_O(0)} \quad \text{oraz} \quad k_{\max} = \frac{1}{|\operatorname{Re} K_O(j\omega^*)|}.$$

Zauważmy, że k_{\min} jest ujemne, natomiast k_{\max} dodatnie.

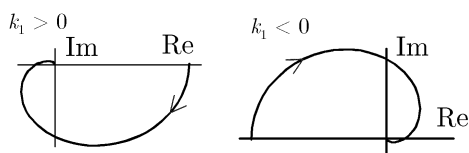
Dla k_1 zapewniającego stabilność, z uwagi na własność 7.3.1, otrzymujemy więc

$$0 < \frac{1}{1 + k_{\max} K_O(0)} < \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + k_1 K_O(0)},$$

co oznacza istnienie dolnego ograniczenia dla uchybu w stanie ustalonym. Ponieważ jednak chcemy, aby był on możliwie mały, własność ta sugeruje więc, że współczynnik wzmocnienia regulatora k_1 powinien być duży, bliski k_{\max} . Warto tutaj jeszcze zwrócić uwagę na to, że ujemne k_1 jest gorsze od $k_1 = 0$, tzn. od sytuacji, w której nie stosuje się w istocie sprzężenia zwrotnego, czyli automatycznej regulacji, patrz własność 7.3.1.

Przykład 7.3.4. Transmitancjami obiektu i regulatora są: $K_O(s) = 2/(s+1)^2(s+2)$ oraz $K_R(s) = k$. Transmitancją układu otwartego jest więc $K(s) = 2k/(s+1)^2(s+2)$. Zatem $M_Z(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + (2+2k)$ to wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego. Zastosowanie kryterium Hurwitza prowadzi do wniosku, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 < k < 9$. Niech teraz $y_0(t) = 1(t)$. Ponieważ $K_O(0) = 1$, dla takiego k zatem $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1+k)$. Uchyb w stanie ustalonym nie jest więc mniejszy niż $1/(1+9) = 1/10$. Ponadto $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ oraz $y^{(3)}(t) = 2k$.

Przykład 7.3.5. Dla obiektu $K_O(s) = 1/(2s+1)^3$ i regulatora $K_R(s) = k_1$ charakterystykę amplitudowo-fazową systemu otwartego o transmitancji $k_1/(2s+1)^3$ pokazano na rys. 7.5. Rozwiązując równanie $\operatorname{Im} K_O(j\omega) = 0$, łatwo otrzymujemy $\omega^* = \sqrt{3}/2$ oraz znajdujemy następnie $\operatorname{Re} K_O(j\omega^*) = -1/8$. Wynika stąd, że $k_{\max} = 8$. Ponieważ $K_O(0) = 1$, zatem $k_{\min} = -1$. Z kryterium Nyquista wynika, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wzmocnienie regulatora spełnia nierówności $-1 < k_1 < 8$. Niech teraz $y_0(t) = 1(t)$. Jest oczywiste, że dla k zapewniającego stabilność: $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1+k_1) > 1/9$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ oraz $y^{(3)}(t) = k_1/8$.



Rys. 7.5. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 7.3.5

7.4. Regulacja astatyczna

System regulacji, w którym transmitancja $K(s)$ układu otwartego ma biegun w punkcie $s = 0$, nazywamy astatycznym. Uzasadnieniem nazwy jest to, że układ otwarty, nie będąc stabilnym, nie ma charakterystyki statycznej.

7.4.1. Własności

Zasadnicza różnica pomiędzy zachowaniami statycznego i astatycznego układu regulacji dotyczy własności asymptotycznych. W tym ostatnim uchyb ten zanika do zera w sytuacji, gdy własność zadana jest skokiem jednostkowym.

Własność 7.4.1. *Jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to w stabilnym, astatycznym układzie regulacji*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Dowód. Ponieważ system zamknięty jest stabilny, więc granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istnieje. Korzystając teraz z własności 4.3.4, otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} K_E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K(s)}.$$

Zauważając następnie, że $\lim_{s \rightarrow 0} K(s) = \infty$, kończymy dowód. ■

Przykład 7.4.1. Transmitancjami obiektu i regulatora są $K_O(s) = 1/(s+1)(s+2)$ oraz $K_R(s) = k/s$. Wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest więc $s^3 + 3s^2 + 2s + 2k$. Ponieważ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2k \end{bmatrix},$$

więc $\Delta_2 = 6 - 2k$. Kryterium Hurwitza prowadzi zatem do wniosku, że system jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $3 < k$. Jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to dla takiego wzmocnienia k , $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Ćwiczenie 7.4.1. Wykazać, że stabilny, astatyczny układ regulacji ma tę własność, że jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t)$ istnieje, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

7.4.2. Regulacja I

O układzie z regulatorem o transmitancji $K_R(s) = k_2/s$ mówimy, że jest on typu I. W dalszej analizie zakładamy, że $y_0(t) = 1(t)$. Jeśli system jest stabilny, to – zgodnie z własnością 7.4.1 – $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Dla przyjętego obiektu (7.3) oraz k_2 spełniającego warunek stabilności przeprowadzimy teraz analizę szybkości regulacji. Mając na uwadze to, że $y(t)$ jest wyjściem systemu zamkniętego o transmitancji

$$K_Z(s) = \frac{k_2 L_O(s)}{k_2 L_O(s) + s M_O(s)},$$

sposstrzegając, że $\deg[k_2L_O(s) + sM_O(s)] - \deg[k_2L_O(s)] = p + 1$ oraz korzystając z własności 2.4.9, wnioskujemy, że

$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p)}(0) = 0$$

i dopiero

$$y^{(p+1)}(0) = k_2\lambda_O^{(p)}(0),$$

ponieważ

$$y^{(p+1)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_2s^{p+1}L_O(s)}{k_2L_O(s) + sM_O(s)} = k_2 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_2\lambda_O^{(p)}(0).$$

Z powyższego ustalenia wynika ważny wniosek, a mianowicie, że regulacja I jest wolniejsza od regulacji P. Teraz bowiem, dopiero $y^{(p+1)}(0) = k_2\lambda_O^{(p)}(0) \neq 0$, co oznacza, że dopiero $p + 1$ pochodna jest niezerowa, podczas gdy dla regulatora P już $y^{(p)}(0) = k_1\lambda_O^{(p)}(0) \neq 0$.

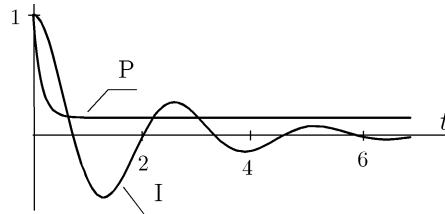
Reasumując, możemy stwierdzić, że regulacja I ma lepsze własności asymptotyczne, gdyż zapewnia zerowy uchyb ustalony. Regulacja P jest natomiast szybsza.

Przykład 7.4.2. Niech teraz $K_O(s) = 1/(s + 1)(2s + 1)$ oraz $K_R(s) = k/s$. Transmittancja układu otwartego jest więc równa $k/s(s + 1)(2s + 1)$, skąd wynika, że wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego ma postać $M_Z(s) = s(s + 1)(2s + 1) + k = 2s^3 + 3s^2 + s + k$. Macierz Hurwitza jest zatem następująca:

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}.$$

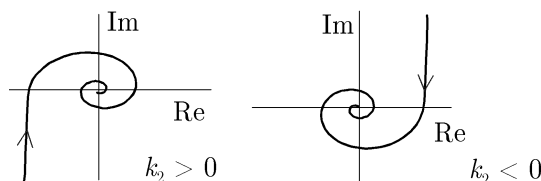
Kryterium Hurwitza prowadzi więc do wniosku, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < k < 3/2$. Dla k mieszczącego się w tym przedziale oraz sygnału wartości zadanej $y_0(t) = 1(t)$ stwierdzamy ponadto, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ oraz $y^{(3)}(0) = k/2$.

Przykład 7.4.3. Sygnałem wartości zadanej jest $y_0(t) = 1(t)$, inercyjny obiekt ma transmittancję $K_O(s) = 6/(s + 1)$. Na rys. 7.6 przedstawiono uchyb przy zastosowaniu regulatorów P oraz I o transmittancjach, odpowiednio, $K_R(s) = 1$ i $K_R(s) = 1/s$. Wyraźnie widać szybszy przebieg w początkowej fazie przy pierwszym i lepsze własności asymptotyczne przy drugim. Regulator P zapewnia więc lepsze własności dla małych t , a regulator I dla dużych.



Rys. 7.6. Uchyb w regulacji P oraz I, przykład 7.4.3

Przykład 7.4.4. Niech teraz obiekt będzie jak w (7.4), czyli inercyjny o transmitancji mającej wszystkie bieguny rzeczywiste ujemne. Regulator typu I ma transmitancję $K_R(s) = k_2/s$. Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego jest pokazana na rys. 7.7. Z kryterium Nyquista 5.2.2 wynika więc, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $k_{\min} < k_2 < k_{\max}$, gdzie $k_{\min} < 0$, a $k_{\max} > 0$. Dla k_2 zawartego w tym przedziale zatem $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, jeśli tylko $y_0(t) = 1(t)$. Warto porównać ten rezultat z uzyskanym w punkcie 7.3.2 podczas omawiania regulacji P.



Rys. 7.7. Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego, przykład 7.4.4

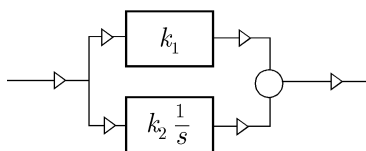
Ćwiczenie 7.4.2. Dla systemu jak w ostatnim przykładzie wyznaczyć k_{\min} oraz k_{\max} , jeśli $K_O(s) = 1/(s+1)^3$.

7.4.3. Regulacja PI

Regulator PI ma transmitancję

$$K_R(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s}.$$

Można uważać, że powstał on przez równoległe połączenie części proporcjonalnej i całkującej, patrz rys. 7.8. Ponieważ ma ona biegun w punkcie $s = 0$, zatem dla k_1 oraz k_2 gwarantujących stabilność, wnioskujemy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, jeśli tylko $y_0(t) = 1(t)$.



Rys. 7.8. Regulator PI

Jeśli ponadto transmitancja obiektu jest jak w (7.3), to

$$K_Z(s) = \frac{(k_1 s + k_2)L_O(s)}{(k_1 s + k_2)L_O(s) + sM_O(s)}.$$

Ponieważ różnica stopniami wielomianów w mianowniku i liczniku wynosi p , więc

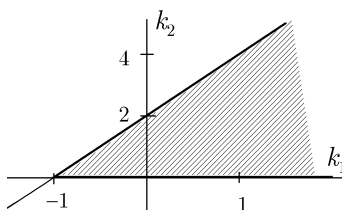
$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p-1)}(0) = 0$$

i dopiero

$$y^{(p)}(0) = k_1 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_1 \lambda_O^{(p)}(0).$$

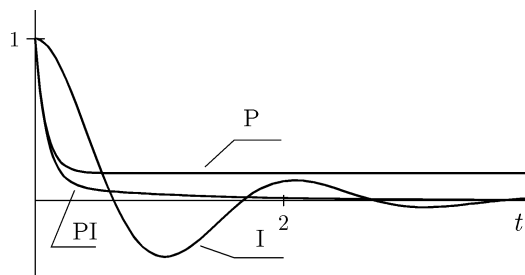
Regulacja PI zapewnia zatem zerowy uchyb ustalony, jak ma to miejsce przy regulacji I, i jest tak szybka – według naszej miary – jak regulacja P. Przykład 7.4.6 pokazuje to wyraźnie.

Przykład 7.4.5. Inercyjny obiekt drugiego rzędu oraz regulator typu PI mają transmitancje: $K_O(s) = 1/(s+1)^2$ oraz $K_R(s) = k_1 + k_2/s$. Transmitancja systemu otwartego jest więc równa $(k_1 s + k_2)/(s^3 + 2s^2 + s)$. Wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego ma zatem następującą postać: $s^3 + 2s^2 + (1+k_1)s + k_2$. System ten jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $k_2 < 2k_1 + 2$, $k_1 > -1$ oraz $k_2 > 0$. Zbiór wszystkich par (k_1, k_2) , dla których nierówności te zachodzą, jest pokazany na rys. 7.9.



Rys. 7.9. Zbiór par (k_1, k_2) , dla których system jest stabilny, przykład 7.4.5

Przykład 7.4.6. Niech teraz $K_O(s) = 10/(s+2)$ oraz $y_0(t) = 1(t)$. Dla regulatorów P, I oraz PI o transmitancjach 1 , $1/s$ i $1 + 1/s$ uchyb przedstawiono na rys. 7.10. Wyższość regulacji PI jest oczywista.

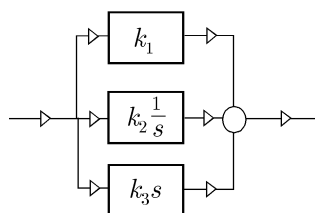


Rys. 7.10. Uchyb w regulacji P, I oraz PI, przykład 7.4.6

7.4.4. Regulacja PID

Regulator PID jest najbardziej rozbudowany, patrz rys. 7.11, ma transmitancję

$$K_R(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s} + k_3 s.$$



Rys. 7.11. Regulator PID

Niech teraz $y_0(t) = 1(t)$. Ponieważ $K_R(s) = (k_3 s^2 + k_1 s + k_2)/s$, zatem dla k_1, k_2, k_3 zapewniających stabilność zachodzi zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$. Dla obiektu o transmitancji jak w (7.3)

$$K_Z(s) = \frac{(k_3 s^2 + k_1 s + k_2)L_O(s)}{(k_3 s^2 + k_1 s + k_2)L_O(s) + sM_O(s)}.$$

Argumentując jak to robiliśmy wcześniej, bez trudu dochodzimy zatem do wniosku, że

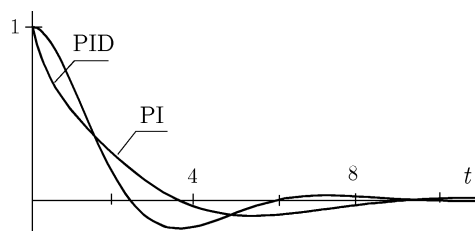
$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p-2)}(0) = 0$$

i dopiero

$$y^{(p-1)}(0) = k_3 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_3 \lambda_O^{(p)}(0).$$

Regulacja PID zapewnia zatem zerowy uchyb w stanie ustalonym. Jest ponadto najszybsza ze wszystkich omówionych.

Przykład 7.4.7. Transmitancja obiektu jest równa $K_O(s) = 1/(s+1)^2$, a regulatorów, kolejno, $K_R(s) = 1+1/s$ oraz $K_R(s) = 1+1/s+s$. Dla $y_0(t) = 1(t)$, uchyb $\varepsilon(t)$ pokazano na rys. 7.12. W początkowym przebiegu, tzn. dla małych t , regulacja PID jest lepsza, gdyż uchyb jest dla niej mniejszy. Jest to związane z tym, że $\varepsilon'(0) = -1 < 0$, podczas gdy dla regulacji PI $\varepsilon'(0) = 0$. Dla większych t , np. dla $t > 2$, trudno jednak mówić o lepszej jakości którejkolwiek z nich.



Rys. 7.12. Regulacja PI i PID, przykład 7.4.7

7.4.5. Porównanie regulacji P, PI oraz PID

Możemy teraz dokonać podsumowania naszych rozważań dotyczących poszczególnych rodzajów regulacji. Wyniki analizy przeprowadzonej dla obiektu (7.3) i różnych typów regulacji zestawiono w tabelach 7.1 oraz 7.2.

Pierwsza dotyczy uchybu w stanie ustalonym, druga natomiast szybkości regulacji, czyli własności wyjścia obiektu w chwili $t = 0$. Możemy dzięki temu porównać typy regulacji P, I, PI oraz PID zarówno dla małych, jak i dużych t , czyli pod kątem szybkości działania w początkowym przebiegu oraz własności asymptotycznych. Przypominamy przy tym, że $y_0(t) = 1(t)$, a warunki początkowe w obiekcie i regulatorze są zerowe.

Tabela 7.1. Własności uchybu

regulacja	$\varepsilon(0)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$
P	1	$\frac{1}{1 + k_1 K_O(0)} \neq 0$
I	1	0
PI	1	0
PID	1	0

Tabela 7.2. Własności wyjścia obiektu

regulacja	$y(0)$	$y^{(1)}(0)$...	$y^{(p-2)}(0)$	$y^{(p-1)}(0)$	$y^{(p)}(0)$	$y^{(p+1)}(0)$
P	0	0	...	0	0	$k_1 \lambda_O^{(p)}(0)$	
I	0	0	...	0	0	0	$k_2 \lambda_O^{(p)}(0)$
PI	0	0	...	0	0	$k_1 \lambda_O^{(p)}(0)$	
PID	0	0	...	0	$k_3 \lambda_O^{(p)}(0)$		

Zalety regulacji PID, rozpatrywane pod kątem badanych własności, są widoczne. Jest ona najlepsza pod względem szybkości, co zawdzięcza różniczkującej części D. Jeśli chodzi o własności asymptotyczne, można ją postawić na równi z regulacją I oraz PI. Dla t istotnie większego od zera wyższość regulacji PID nad PI może jednak zaniknąć, o czym świadczy przykład 7.4.7. Wyjaśnieniem tego efektu jest to, że dla dużych t , gdy uchyb zmienia się wolno, wpływ części D jest już mały, patrz rys. 7.11.

7.5. Inne sygnały wartości zadanej

Do tej pory badaliśmy zachowanie się systemu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy sygnał wartości zadanej jest skokiem jednostkowym, czyli gdy $y_0(t) = 1(t)$. Zadanie stawiane systemowi polegało więc na stabilizacji wyjścia obiektu. Niekiedy jest jednak tak, że sygnał ten ma kształt bardziej skomplikowany. W całej poniższej analizie przyjmujemy, że obiekt jest inercyjny i ma transmitancję $K_O(s) = 1/M_O(s)$, a zamknięty system regulacji jest stabilny.

Zacznijmy od sytuacji, w której $y_0(t) = t$. Ponieważ $Y_0(s) = 1/s^2$, zatem

$$E(s) = \frac{1}{s^2 (1 + K_R(s)K_O(s))}.$$

Jeśli więc zastosujemy regulator P o transmitancji $K_R(s) = k_1$, to

$$E(s) = \frac{M_O(s)}{s^2(M_O(s) + k_1)}.$$

Ponieważ stopnie wielomianów $M_O(s)$ oraz $k_1 + M_O(s)$ są identyczne, zatem sygnał uchybu ma postać $\varepsilon(t) = c_1 t + c_0 + r(t)$, gdzie c_0 i c_1 są pewnymi liczbami, natomiast $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$. Przy regulatorze P jest zatem tak, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$, co oznacza, że nie gwarantuje on ograniczonego uchybu. Nie spełnia on więc stawianych przed nim wymagań.

Dla regulatora I, czyli regulatora o transmitancji $K_R(s) = 1/s$, natomiast

$$E(s) = \frac{M_O(s)}{sM_O(s) + 1},$$

skąd wynika, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = M_O(0) < \infty$. W stanie ustalonym uchyb jest więc skończony.

Niech teraz $y_0(t) = \alpha + \beta t$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. W świetle powyższych rozważań jest oczywiste, że przy ustalonym wcześniej obiekcie inercyjnym:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$ dla regulatora P,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istnieje oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon'(t) = 0$ dla regulatorów I, PI oraz PID.

Regulator I zapewnia zatem, że w stanie ustalonym:

- uchyb jest skończony,
- uchyb prędkościowy wynosi zero.

Widzimy więc, że jeśli sygnał wartości zadanej jest wielomianem zerowego rzędu (tzn. jeśli $y_0(t) = \alpha$), to można – z opisanymi już wcześniej skutkami – stosować zarówno regulator P, jak i I. Jeśli sygnał ten jest wielomianem pierwszego stopnia (tzn. jeśli $y_0(t) = \alpha + \beta t$), to regulator P nie jest przydatny. Można stosować jedynie regulator I.

Należy zwrócić uwagę na to, że przy wielomianowym sygnale wartości zadanej nie można mówić jednak o układzie stabilizacji, bowiem zadanie jakie stoi przed systemem polega na tym, aby wyjście obiektu nadążało za zmieniającą się wartością zadaną. Mówimy wówczas o systemie nadążnym lub śledzącym. Zwykle jednak w systemach takich sygnał wartości zadanej ani nie jest z góry znany, ani nie jest wielomianem. Z tego też względu wydaje się, że pełniejsza jest analiza, w której przyjmuje się, że $y_0(t)$ zmienia się przypadkowo, czyli jest procesem stochastycznym. Do analizy takiej można stosować wówczas probabilistyczne metody korelacyjne, patrz podrozdział 8.4.

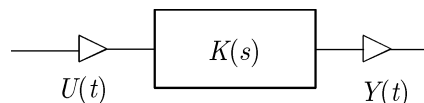
Ćwiczenie 7.5.1. Niech system regulacji I będzie stabilny. Wykazać, że jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t)/t$ istnieje, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ także istnieje.

Rozdział 8

Sygnały losowe w systemach ciągłych

8.1. Wprowadzenie

Zakładamy teraz, że system o transmitancji $K(s)$, rys. 8.1, jest pobudzany stacjonarnym procesem stochastycznym $U(t)$ drugiego rzędu o funkcji korelacji $R_U(\tau)$, patrz dodatek E. System ten jest stabilny, jego transmitancją jest $K(s) = L(s)/M(s)$, przy czym $l < m$. Odpowiedź impulsowa $k(t)$ jest zatem funkcją ciągłą na półprostej $[0, \infty)$, przy czym $\int_0^\infty |k(t)|dt < \infty$ oraz $\int_0^\infty k^2(t)dt < \infty$, patrz własność 4.3.2. Pamiętajmy przy tym, że $k(t) = 0$ dla $t < 0$.



Rys. 8.1. System o losowym sygnale wejściowym

Zacniemy od tego, że czas przebiega teraz całą prostą, czyli $t \in (-\infty, \infty)$. Ponieważ system jest stabilny, więc wyjście systemu w chwili t jest określone przez całkę

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau)U(\tau)d\tau. \quad (8.1)$$

Z uwagi na to, że sygnał $U(t)$ jest realizacją procesu stochastycznego, jego własności nie są bliżej znane. Nie mamy w związku z tym pewności, czy konkretna realizacja $U(t)$ jest funkcją na tyle gładką, że całka powyższa istnieje. Nie można jej zatem interpretować jako zwykłej całki Riemanna. Będziemy ją natomiast rozumieć w sensie średniokwadratowym, patrz punkt E.1.3. Na temat ten wypowiada się poniższy rezultat, który wynika z twierdzenia E.1.1 o istnieniu całki średniokwadratowej.

Twierdzenie 8.1.1. *Całka średniokwadratowa (8.1) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna $\int_0^\infty k(t - \tau)R_U(t)dt$.*

Najpierw założymy, że proces $U(t)$ jest białym szumem, a w kolejnym podrozdziale, że jest on skorelowany.

8.2. System pobudzany białym szumem

Zakładamy, że system jest pobudzany stacjonarnym białym szumem $U(t)$ drugiego rzędu. Zgodnie z uwagą E.1.1, całkę (8.1) będziemy traktować jako formalnie istniejącą. Zatem, dla ustalonego t , $Y(t)$ jest zmienną losową, a rodzina zmiennych losowych $Y(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, procesem stochastycznym. Teraz wykażemy, że jest to proces stacjonarny drugiego rzędu. Przypominamy przy tym, że E oznacza wartość oczekiwaną.

Twierdzenie 8.2.1. *Niech $l < m$ i niech system będzie stabilny. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym białym szumem, to proces $Y(t)$ jest także stacjonarny drugiego rzędu.*

Dowód. Zauważmy, że $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau) + m_U^2$, gdzie $m_U = EU(t)$. Z wzoru (8.1) wynika, że

$$\begin{aligned} EY^2(t) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t k(t-\xi)k(t-\eta)E\{U(\xi)U(\eta)\}d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t k(t-\xi)k(t-\eta)R(\xi-\eta)d\xi d\eta \\ &= \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\tau)d\tau + m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\tau)d\tau \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

co oznacza, że $Y(t)$ jest procesem drugiego rzędu. Oczywiście jest, że

$$\begin{aligned} E\{Y(t+\tau)Y(t)\} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k(t+\tau-\xi)k(t-\eta)R(\xi-\eta)d\xi d\eta \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^\infty k(\eta-\tau)k(\eta)d\eta + m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\tau)d\tau \right)^2, \end{aligned}$$

kktóra to wielkość nie zależy od t . Proces jest zatem stacjonarny, co kończy dowód. ■

Własności procesu stochastycznego $Y(t)$, czyli sygnału na wyjściu systemu są zebrane poniżej.

Własność 8.2.1. *Niech $l < m$ i niech system będzie stabilny. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym białym szumem o funkcji korelacji $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau)$, czyli taki, że $EU(t) = 0$, to:*

- $Y(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu,
- $EY(t) = 0$, $EY^2(t) = \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\xi)d\xi$,
- $R_Y(\tau) = \sigma_U^2 \int_{-\infty}^\infty k(\xi)k(\xi-\tau)d\xi$,
- $R_Y(\tau)$ jest ciągłą funkcją ograniczoną i $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = 0$,
- $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(j\omega)|^2$,
- $R_{YU}(\tau) = \sigma_U^2 k(\tau)$.

Dowód. Przede wszystkim stwierdzamy, że własności a), b) oraz c) zostały już wykazane w dowodzie ostatniego twierdzenia. Aby wykazać prawdziwość d), zauważmy, że

$$|R_Y(\tau)| = \sigma_U^2 \left| \int_{\tau}^{\infty} k(\xi-\tau)k(\xi)d\xi \right| \leq \sigma_U^2 \max_t |k(t)| \int_{\tau}^{\infty} |k(\xi)|d\xi.$$

Ze stabilności systemu wynikają dwa istotne teraz fakty, a mianowicie to, że $\max_t |k(t)| < \infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\infty} |k(\xi)| d\xi = 0$. Zatem $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = 0$. Ponadto, z uwagi na nierówność $|k(\eta - h) - k(\eta)| \leq |h| |k'(\eta)|$, możemy napisać, że

$$\begin{aligned} |R_Y(\tau + h) - R_Y(\tau)| &\leq \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} |[k(\xi - \tau - h) - k(\xi - \tau)] k(\xi)| d\xi \\ &\leq \sigma_U^2 |h| \max_{t \in (0, \infty)} |k'(t)| \int_0^{\infty} |k(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Pamiętając, że $\max_{t \in (0, \infty)} |k'(t)| < \infty$, patrz własność 4.3.3, dochodzimy zatem do wniosku, że $R_Y(\tau)$ jest funkcją ciągłą. Zatem d) zostało zweryfikowane.

Wyciszając transformatę Fouriera funkcji korelacji, otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \tau) k(\xi) e^{-j\omega\tau} d\xi d\tau \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \tau) e^{j\omega(\xi - \tau)} k(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi d\tau \\ &= \sigma_U^2 \tilde{K}(-\omega) \tilde{K}(\omega), \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{K}(\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi $k(t)$. Ponieważ $\tilde{K}(\omega) = K(j\omega)$ oraz $\tilde{K}(-\omega) = K(-j\omega) = K^*(j\omega)$, zatem $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(j\omega)|^2$, co oznacza, że e) jest prawdziwe.

Na koniec zauważmy, że

$$\begin{aligned} R_{YU}(\tau) &= E\{Y(t + \tau)U(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) E\{U(t + \tau - \xi)U(t)\} d\xi \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \delta(\xi - \tau) d\xi = \sigma_U^2 k(\tau), \end{aligned}$$

co oznacza, że f) jest prawdziwe. Możemy więc stwierdzić, że własność została w całości zweryfikowana. ■

Przykład 8.2.1. Niech $U(t)$ będzie białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji $\delta(\tau)$ i niech $K(s) = 1/(s + 1)$. Ponieważ $k(t) = e^{-t}$ dla $t \geq 0$, mamy więc $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$, $S_Y(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)$, $EY(t) = 0$, $EY^2(t) = 1/2$ oraz $R_{YU}(\tau) = e^{-\tau}$.

Ćwiczenie 8.2.1. Wyznaczyć $R_Y(\tau)$, $S_Y(\tau)$ i $R_{YU}(\tau)$, jeśli $R_U(\tau) = \delta(\tau)$ oraz:

- $K(s) = 1/(s + 1)^2$,
- $K(s) = 1/(s + 1)(s + 2)$.

Ćwiczenie 8.2.2. Niech $U(t) = \xi(t) + \varphi(t)$, przy czym $R_{\xi}(\tau) = \delta(\tau)$. Wyznaczyć $R_U(\tau)$, $R_Y(\tau)$ i $R_{YU}(\tau)$, jeśli $K(s) = 1/(s + 1)$ oraz:

- $\varphi(t) = c$,
- $\varphi(t) = \sin \omega t$.

Założmy teraz, że $U(t)$ jest w dalszym ciągu białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji $R_U(\tau) = \delta(\tau)$, lecz transmitancja $K(s)$ systemu jest taka, że $l = m$, co oznacza,

że

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $M(s) = a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0$ oraz $L(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$. Wykażemy, że

$$EY^2(t) = \infty. \quad (8.2)$$

Zauważmy w tym celu, że $K(s) = \alpha - G(s)$, gdzie $\alpha = b_m/a_m$ oraz $G(s) = P(s)/M(s)$, przy czym $P(s) = \alpha M(s) - L(s)$ jest wielomianem stopnia niższego niż m . Zatem $Y(t) = \xi(t) - \eta(t)$, gdzie $\xi(t) = \alpha U(t)$. Sygnał $\eta(t)$ jest natomiast wyjściem systemu o transmitancji $G(s)$ pobudzanego sygnałem $U(t)$. W rezultacie więc znajdujemy następujące funkcje korelacji: $R_\xi(\tau) = \alpha^2 \delta(\tau)$, $R_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda - \tau)d\lambda$ oraz

$$R_{\eta\xi}(\tau) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)E\{U(\tau - \lambda)U(0)\}d\lambda = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\delta(\tau - \lambda)d\lambda = \alpha g(\tau).$$

Zatem

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= R_\xi(\tau) + R_\eta(\tau) - R_{\xi\eta}(\tau) - R_{\eta\xi}(\tau) \\ &= \alpha^2 \delta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda - \tau)d\lambda - \alpha g(\tau) - \alpha g(-\tau) \\ &= \alpha^2 \delta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda - \tau)d\lambda - \alpha g(|\tau|). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $S_Y(\omega) = \alpha^2 + |G(j\omega)|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}[G(j\omega)]$. Zatem rzeczywiście (8.2) zachodzi, ponieważ $EY^2(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)d\omega = \infty$, patrz (E.2), co jest spowodowane tym, że $l = m$.

Przykład 8.2.2. Niech teraz $R_U(\tau) = \delta(\tau)$ oraz $K(s) = s/(s+1)$. Ponieważ możemy napisać, że $K(s) = 1 - 1/(s+1)$, a więc $Y(t) = U(t) - \eta(t)$, gdzie $\eta(t)$ jest wyjściem systemu o transmitancji $1/(s+1)$ pobudzanego sygnałem $U(t)$. Prowadzi to do wniosku, że $S_Y(\omega) = 1 + 1/(\omega^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(1/(j\omega + 1))$, co jest równe $1 - (\omega^2 + 1)$, skąd wynika, patrz przykład E.1.1, że $R_Y(\tau) = \delta(\tau) - e^{-|\tau|}$.

Ćwiczenie 8.2.3. Wykazać, że jeśli sygnał wejściowy $U(t)$ jest stacjonarnym, białym szumem o średniej m_U i funkcji korelacji $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau) + m_U^2$, to:

- $EY(t) = m_U \int_0^\infty k(\xi)d\xi$,
- $\operatorname{var} Y(t) = \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\xi)d\xi$,
- $EY^2(t) = m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\xi)d\xi \right)^2 + \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\xi)d\xi$,
- $R_Y(\tau) = \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\xi - \tau)d\xi + m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\xi)d\xi \right)^2$,
- $R_Y(\tau)$ jest ciągłą funkcją ograniczoną,
- $R_Y(\tau) \rightarrow m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\xi)d\xi \right)^2$, gdy $\tau \rightarrow \infty$,
- $R_{YU}(\tau) = \sigma_U^2 k(\tau) + m_U^2 \int_0^\infty k(\xi)d\xi$.

8.3. System przy pobudzeniu skorelowanym

Wykazaliśmy, patrz własność 8.2.1, że funkcja korelacji wyjścia systemu pobudzanego białym szumem jest ograniczona, tzn. że $|R_U(\tau)| \leq R_U(0) < \infty$. Załóżymy teraz, że sygnał o takiej właśnie funkcji korelacji jest wejściem systemu stabilnego o transmitancji $K(s)$. Jego wyjściem jest $Y(t)$.

Twierdzenie 8.3.1. *Jeśli system jest stabilny i $U(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu o ograniczonej funkcji korelacji (czyli nie jest białym szumem), to całka średniokwadratowa (8.1) istnieje.*

Dowód. W dowodzie wystarczy skorzystać z twierdzenia 8.1.1 (patrz także wniosek E.1.1) oraz tego, że $\int_0^\infty |k(\tau)| < \infty$. ■

Zatem $Y(t)$ jest, dla ustalonego t , zmienną losową, a rodzina zmiennych losowych $Y(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, procesem stochastycznym. Teraz wykażemy, że jest to proces stacjonarny, drugiego rzędu o zerowej średniej.

Twierdzenie 8.3.2. *Niech $l < m$ i niech system będzie stabilny. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu o ograniczonej funkcji korelacji (czyli nie jest białym szumem) i zerowej średniej, to $Y(t)$ jest także stacjonarnym procesem drugiego rzędu o zerowej średniej.*

Dowód. Ponieważ

$$EY^2(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t k(t-\xi)k(t-\eta)R_U(\xi-\eta)d\xi d\eta = R_U(0) \left(\int_0^\infty |k(\tau)|d\tau \right)^2 < \infty,$$

zatem $Y(t)$ jest procesem drugiego rzędu. Pamiętając, że $EU(t) = 0$ oraz $\int_0^\infty |k(\tau)|d\tau < \infty$, otrzymujemy $EY(t) = \int_0^\infty k(\tau)d\tau EU(t) = 0$. Ponadto

$$\begin{aligned} E\{Y(t+\tau)Y(t)\} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k(\xi)k(\eta)E\{U(t+\tau-\xi)U(t-\eta)\}d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k(\xi)k(\eta)R_U(\tau-\xi+\eta)d\xi d\eta \end{aligned}$$

nie zależy od t . Proces $Y(t)$ jest zatem stacjonarny, co kończy dowód. ■

Własności procesu $Y(t)$ są podane poniżej.

Własność 8.3.1. *Niech $l < m$. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu o zerowej średniej i funkcji korelacji $R_U(\tau)$, to:*

- $Y(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu, $EY(t) = 0$,
- $R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k(\xi)k(\eta)R_U(\eta+\xi-\tau)d\xi d\eta = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k(\xi)k(\eta-\tau)R_U(\eta-\xi)d\xi d\eta$,
- $R_Y(\tau)$ jest ciągłą funkcją ograniczoną i $R_Y(\tau) \rightarrow 0$, gdy $\tau \rightarrow \infty$,
- $S_Y(\omega) = |K(j\omega)|^2 S_U(\omega)$,
- $R_{YU}(\tau) = \int_0^\infty k(\xi)R_U(\xi-\tau)d\xi$, czyli $S_{YU}(\omega) = K(\omega)S_U(\omega)$.

Dowód. Punkt a) został wykazany wcześniej, natomiast b) wynika z tego, że

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\eta)E\{U(t+\tau-\xi)U(t-\eta)\}d\xi d\eta.$$

Punkt c) weryfikujemy podobnie jak w podrozdziale 8.2. Aby dowieść, że d) jest prawdziwe korzystamy z tego, że gęstość widmowa $S_Y(\omega)$ jest równa

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k(\xi)k(\eta)R_U(\tau+\xi-\eta)e^{-j\omega\tau}d\xi d\eta d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{j\omega\xi}k(\eta)e^{-j\omega\eta}R_U(\tau+\xi-\eta)e^{-j\omega(\tau+\xi-\eta)}d\xi d\eta d\tau, \end{aligned}$$

która to wielkość jest z kolei równa

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)e^{j\omega\eta}d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = K(-j\omega)K(j\omega)S_U(\omega).$$

Aby wykazać e), wystarczy zauważyć, że

$$R_{YU}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)E\{U(t+\tau-\xi)U(t)\}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)R_U(\xi-\tau)d\xi.$$

Własność została zatem zweryfikowana w całości. ■

Zauważmy, że z b) wynika

$$\frac{d}{d\tau}R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k'(\eta-\tau)R_U(\eta-\xi)d\xi d\eta.$$

Ponieważ $k'(t)$ jest funkcją ciągłą, proces $Y(t)$ można więc różniczkować w sensie średniokwadratowym, patrz punkt E.1.3.

Przykład 8.3.1. Wejściem $U(t)$ systemu o transmitancji $K(s) = 1/(2s+1)$ jest sygnał wyjściowy systemu z przykładu 8.2.1, co oznacza, że $R_U(\tau) = e^{-|\tau|}$. Ponieważ $S_U(\omega) = 1/(\omega^2+1)$, zatem $S_Y(\omega) = 1/(4\omega^2+1)(\omega^2+1)$. Zauważając, że $1/(4\omega^2+1)(\omega^2+1) = 4/3(4\omega^2+1) - 1/3(\omega^2+1)$, patrz także przykład E.1.1, dochodzimy do wniosku, że $R_Y(\tau) = (4/3)e^{-2|\tau|} - (1/3)e^{-|\tau|}$. Wynika stąd zatem, że $Y(t) = \xi(t) - \eta(t)$, gdzie $\xi(t)$ i $\eta(t)$ są procesami wzajemnie nieskorelowanymi (czyli takimi, że $R_{\xi\eta}(\tau) \equiv R_{\eta\xi}(\tau) \equiv 0$) o gęstościach widmowych $S_{\xi}(\omega) = 4/3(4\omega^2+1)$ i $S_{\eta}(\omega) = 1/3(4\omega^2+1)$, czyli funkcjach korelacji $R_{\xi}(\tau) = (4/3)e^{-2|\tau|}$ oraz $R_{\eta}(\tau) = (1/3)e^{-|\tau|}$.

8.4. Regulacja w obecności sygnału losowego

Zbadamy teraz zachowanie układu automatycznej regulacji w sytuacjach, gdy działają nań sygnały o charakterze losowym. Przypominamy przy tym, że $K(s) = L(s)/M(s)$ jest

transmitancją układu otwartego, w której $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami o stopniach l oraz m . Ponadto

$$K_E(s) = \frac{M(s)}{L(s) + M(s)}$$

oraz

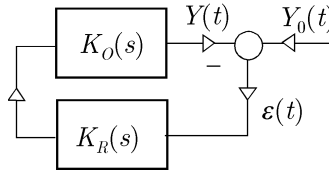
$$K_Z(s) = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)}$$

są odpowiednio transmitancją uchybową i systemu zamkniętego. Zakładamy przy tym, że system jest stabilny.

8.4.1. Wartość zadana procesem stochastycznym

Sygnal zadany $Y_0(t)$ jest teraz stacjonarnym procesem stochastycznym o gęstości widmowej $S_{Y_0}(\omega)$, patrz rys. 8.2. Ponieważ $S_E(\omega) = |K_E(j\omega)|^2 S_{Y_0}(\omega)$, zatem – jak to wynika z (E.2) –

$$E\varepsilon^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_E(j\omega)|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega.$$



Rys. 8.2. Układ automatycznej regulacji. Sygnal wartości zadanej białym szumem

Założmy teraz, że sygnał $Y_0(t)$ ma zerową średnią, tzn. że $S_{Y_0}(\omega) = \text{var}[Y_0]$. W sytuacji takiej

$$E\varepsilon^2(t) = \frac{\text{var}[Y_0]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Ponieważ zwykle jest tak, że $l < m$, więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega = \infty.$$

Zatem $E\varepsilon^2(t) = \infty$, skąd wynika, że białego szumu nie można niestety skutecznie śledzić.

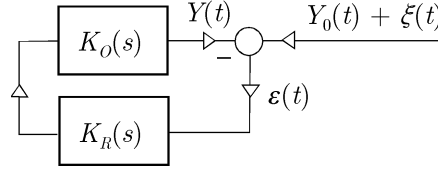
Argumentacja podana poniżej kończy się identycznym wnioskiem. Nie odwołuje się jednak do metod częstotliwościowych i operuje jedynie czasem. Ponieważ sygnał $\varepsilon(t)$ można uważać za wyjście systemu o transmitancji uchybowej $K_E(s)$ pobudzanego białym szumem $Y_0(t)$, a zatem

$$\text{var}[\varepsilon(t)] = \text{var}[Y_0] \int_0^{\infty} k_E^2(\xi) d\xi,$$

gdzie $k_E(t) \hat{=} K_E(s)$, patrz ćwiczenie 8.2.3. Ponieważ $K_E(s) = 1 - K_Z(s)$ oraz $l < m$, więc $k_E(t) = \delta(t) - k_Z(t)$, gdzie $\int_0^\infty k_Z^2(\xi) d\xi < \infty$, z uwagi na to, że system zamknięty jest stabilny i stopień wielomianu $L(s)$ jest niższy od stopnia wielomianu $L(s) + M(s)$, patrz własność 4.3.7. Ze względu na to jednak, że $k_E(t)$ zawiera impuls Diraca, to $\int_0^\infty k_E^2(\xi) d\xi = \infty$, patrz (A.5), skąd w sposób oczywisty wynika, że $\text{var}[\varepsilon] = \infty$. Oznacza to, że wariancja błędu przy śledzeniu białego szumu jest nieskończenie wielka.

8.4.2. Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Zbadamy teraz zachowanie się układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy do systemu dociera sygnał zadany $Y_0(t)$ zaszumiony stacjonarnym losowym sygnałem $\xi(t)$, co przedstawia rys. 8.3. Zakładamy przy tym, że $E\xi(t) = 0$ i przez σ_ξ^2 oznaczamy wariancję zmiennej losowej $\xi(t)$. Należy zwrócić uwagę, że w tym przypadku o jakości systemu świadczy nie sygnał $\varepsilon(t)$, lecz $e(t) = Y_0(t) - Y(t)$. Zatem błąd $e(t)$ powinien być – w odpowiednim sensie – mały.



Rys. 8.3. Układ automatycznej regulacji. Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Ponieważ $\varepsilon(t) = Y_0(t) - Y(t) + \xi(t)$, a zatem $\mathfrak{L}\{e(t)\} = \mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\} - \mathfrak{L}\{\xi(t)\}$. Biorąc teraz pod uwagę to, że $\mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\} = K_E(s)[Y_0(s) + \mathfrak{L}\{\xi(t)\}]$, otrzymujemy

$$\mathfrak{L}\{e(t)\} = K_E(s)[Y_0(s) + \mathfrak{L}\{\xi(t)\}] - \mathfrak{L}\{\xi(t)\} = K_E(s)Y_0(s) + [K_E(s) - 1]\mathfrak{L}\{\xi(t)\}.$$

Zatem $e(t) = e_d(t) + e_\xi(t)$, gdzie $\mathfrak{L}\{e_d(t)\} = K_E(s)Y_0(s)$ oraz

$$\mathfrak{L}\{e_\xi(t)\} = [K_E(s) - 1]\mathfrak{L}\{\xi(t)\} = -\frac{L(s)}{L(s) + M(s)}\mathfrak{L}\{\xi(t)\}. \quad (8.3)$$

Błąd $e(t)$ zawiera więc dwie składowe, a mianowicie składową $e_d(t)$ pochodzącą od $Y_0(t)$ oraz $e_\xi(t)$, której przyczyną jest szum $\xi(t)$. Jeśli $Y_0(t)$ jest natury deterministycznej, to $e_d(t)$ także. Składowa tego typu – tzn. deterministycznego – była już przedmiotem naszej analizy, patrz rozdział 7. Jeśli sygnał $Y_0(t)$ jest losowy, to analizę tej składowej błędu należy przeprowadzić tak, jak zrobiono to wobec systemu przedstawionego na rys. 8.2.

Teraz zbadamy składową losową $e_\xi(t)$ błędu pochodzącą od szumu. Z (8.3) wynika, że

$$S_{e_\xi}(\omega) = \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 S_\xi(\omega),$$

co – z uwagi na (E.2) – doprowadza do wniosku, że

$$Ee_\xi^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 S_\xi(\omega) d\omega.$$

Jeśli zatem $\xi(t)$ jest białym szumem, to

$$Ee_{\xi}^2(t) = \frac{\sigma_{\xi}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Gdy system jest taki, że $l < m$, wówczas całka w powyższym wyrażeniu jest skończona. Można wtedy skutecznie regulować w obecności białego szumu, tym bardziej skorelowanego.

Zauważmy teraz, że $e_{\xi}(t)$ jest wyjściem systemu o transmitancji $-K_Z(s)$ pobudzanego białym szumem $\xi(t)$, patrz (8.3). Zatem, patrz ćwiczenie 8.2.3,

$$Ee_{\xi}^2(t) = \sigma_{\xi}^2 \int_0^{\infty} k_Z^2(\xi) d\xi,$$

gdzie $k_Z(t) \doteq K_Z(s)$. Jeśli transmitancja układu otwartego jest taka, że $l < m$, to $\int_0^{\infty} k_Z^2(\xi) d\xi < \infty$, patrz własność 4.3.7.

Ćwiczenie 8.4.1. Niech $K_O(s) = 1/(s+1)$ oraz $K_R(s) = k$. Wyznaczyć $Ee_{\xi}^2(t)$, jeśli:

- a) $R_{\xi}(\tau) = \delta(\tau)$,
- b) $R_{\xi}(\tau) = e^{-|\tau|}$.

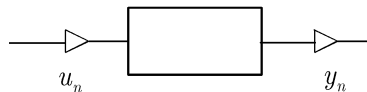
Ćwiczenie 8.4.2. Niech $K_O(s) = 1/(s+1)^3$ oraz $K_R(s) = k$. Zakładając, że system zamknięty jest stabilny, wyznaczyć $Ee_{\xi}^2(t)$, jeśli:

- a) $R_{\xi}(\tau) = \delta(\tau)$,
- b) $R_{\xi}(\tau) = e^{-|\tau|}$.

Rozdział 9

Opisy systemów dyskretnych

Podamy teraz różne sposoby opisu własności liniowych dynamicznych systemów dyskretnych, czyli takich, w których czas biegnie w sposób dyskretny. System przedstawiony na rys. 9.1 przekształca wejściowy ciąg liczbowy $\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$ w ciąg wyjściowy $\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots$. Ciągi te, nazywane sygnałami, oznaczmy jako $\{u_n\}$ oraz $\{y_n\}$, a gdy nie będzie zachodzić obawa nieporozumienia, będziemy pisać po prostu u_n oraz y_n .



Rys. 9.1. Dyskretny system dynamiczny

9.1. Równanie różnicowe

Zasadniczym opisem liniowego dyskretnego systemu dynamicznego jest następujące liniowe równanie różnicowe:

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = b_l u_{n-m+l} + \dots + b_0 u_{n-m}, \quad (9.1)$$

przy czym $l \leq m$. Zakładamy przy tym, że $b_l \neq 0$, $a_0 \neq 0$ oraz $a_m \neq 0$. Indeks n przyjmuje kolejno wartości $0, 1, 2, 3, \dots$. Liczbę m nazywa się rzędem równania, czyli także systemu. Warunkiem początkowym jest

$$y_{-m}, \dots, y_{-2}, y_{-1}.$$

Jeśli $y_{-m} = \dots = y_{-1} = 0$, to mówimy, że jest on zerowy. Należy zwrócić uwagę na to, że w a_i, b_i indeksy rozróżniają współczynniki równania, natomiast w u_i oraz y_i oznaczają chwilę.

Równanie to opisuje zachowanie się systemu, tzn. określa jego reakcję na pobudzenie. Przez pobudzenie rozumiemy ciąg wejściowy taki, że $u_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$, tzn. taki, który rozpoczyna się w istocie w chwili $n = 0$. Aby go określić, wystarczy zatem

podać u_0, u_1, u_2, \dots . Pobudzeniem zerowym jest ciąg $u_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ (i, siłą rzeczy, dla $n = \dots, -2, -1$). Reakcją jest natomiast ciąg y_0, y_1, y_2, \dots , rozpoczynający się w punkcie y_0 określonym przez warunek początkowy.

W celu wyznaczenia reakcji systemu, tzn. rozwiązania równania, wykorzystamy narzędzie jakim jest transformacja \mathcal{Z} . Dokonana wobec obydwu jego stron, przy uwzględnieniu tego, że:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} &= z^{-1}Y(z) + y_{-1}, \\ \mathcal{Z}\{y_{n-2}\} &= z^{-2}Y(z) + y_{-1}z^{-1} + y_{-2}, \\ &\vdots \\ \mathcal{Z}\{y_{n-m}\} &= z^{-m}Y(z) + y_{-1}z^{-m+1} + \dots + y_{-m+1}z^{-1} + y_{-m}\end{aligned}$$

oraz

$$\mathcal{Z}\{u_{n-m}\} = z^{-m}U(z), \dots, \mathcal{Z}\{u_{n-m+l}\} = z^{-m+l}U(z),$$

doprowadza do równania

$$(a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m})Y(z) - V(z^{-1}) = (b_lz^{-m+l} + \dots + b_0z^{-m})U(z),$$

przy czym $V(z^{-1})$ jest wielomianem stopnia $m-1$ argumentu z^{-1} o współczynnikach zależnych od warunku początkowego oraz a_0, \dots, a_{m-1} . Wynika stąd, że

$$Y(z) = \frac{b_lz^{-m+l} + \dots + b_0z^{-m}}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}}U(z) + \frac{V(z^{-1})}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}},$$

gdzie

$$V(z^{-1}) = w_{m-1} + w_{m-2}z^{-1} + \dots + w_0z^{-m+1} \quad (9.2)$$

jest wielomianem argumentu z^{-1} , którego współczynniki, jak już wspomniano, zależą od warunku początkowego i a_0, \dots, a_{m-1} . Zatem

$$Y(z) = \frac{b_lz^l + b_{l-1}z^{l-1} + \dots + b_0}{a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0}U(z) + \frac{z^mV(z^{-1})}{a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0}.$$

Oznaczając:

$$M(z) = a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0, \quad (9.3)$$

$$L(z) = b_lz^l + b_{l-1}z^{l-1} + \dots + b_0 \quad (9.4)$$

oraz

$$W(z) = z^{m-1}V(z^{-1}) = w_{m-1}z^{m-1} + \dots + w_1z + w_0, \quad (9.5)$$

możemy w końcu napisać, że

$$Y(z) = \frac{zW(z)}{M(z)} + \frac{L(z)}{M(z)}U(z), \quad (9.6)$$

gdzie $W(z)$ jest wielomianem stopnia $m-1$. Wynika stąd

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{L(z)}{M(z)}U(z) \right\}, \quad (9.7)$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Zaznaczmy jeszcze, że $M(z)$ nazywa się wielomianem charakterystycznym równania różnicowego, czyli także systemu, a $M(z) = 0$ równaniem charakterystycznym równania, a także systemu.

Reakcja systemu zależy zatem od:

- pobudzenia,
- warunku początkowego,
- własności systemu.

Pierwsza składowa odpowiedzi, nazywana przejściową, zależy od:

- warunku początkowego,
- własności systemu,
- lecz nie od pobudzenia u_n .

Jest ona oczywiście odpowiedzią systemu na pobudzenie zerowe, gdyż w takiej sytuacji $U(z) = 0$. Jest ona zatem rozwiązaniem następującego równania jednorodnego:

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = 0. \quad (9.8)$$

Druga składowa zależy natomiast od:

- pobudzenia,
- własności systemu,
- lecz nie zależy od warunku początkowego.

Jest ona reakcją systemu na pobudzenie u_n przy zerowym warunku początkowym, wtedy bowiem $W(z) = 0$.

Przykład 9.1.1. Dla systemu o równaniu różnicowym

$$a_2 y_n + a_1 y_{n-1} + a_0 y_{n-2} = b_1 u_{n-1} + b_0 u_{n-2}$$

otrzymujemy

$$(a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})Y(z) - V(z^{-1}) = (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})U(z),$$

gdzie

$$V(z^{-1}) = -a_1 y_{-1} - a_0 (y_{-1} z^{-1} + y_{-2}) = -(a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2}) - a_0 y_{-1} z^{-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{V(z^{-1})}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} U(z) \\ &= \frac{z^2 V(z^{-1})}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} + \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z) \\ &= \frac{-(a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2})z^2 - a_0 y_{-1} z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} + \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z) \\ &= \frac{zW(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} + \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z), \end{aligned}$$

gdzie $W(z) = -(a_1 y_{-1} - a_0 y_{-2})z - a_0 y_{-1}$. W rezultacie

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} U(z) \right\}.$$

Przykład 9.1.2. Dla sytemu opisanego równaniem różnicowym

$$y_n + 2y_{n-1} = 3u_n$$

wyznamy odpowiedź na pobudzenie $u_n = \delta_n$ przy warunku początkowym $y_{-1} = 1$. Zrobimy to w sposób naturalny, bez stosowania narzędzia jakim jest transformacja \mathcal{Z} . Dla $n = 0$, równanie to przyjmuje postać

$$y_0 + 2y_{-1} = 3u_0,$$

skąd wynika, że $y_0 = -2y_{-1} + 3u_0$. Ponieważ $u_0 = 1$ oraz $y_{-1} = 1$, zatem $y_0 = 1$. Dla $n = 1$, otrzymujemy

$$y_1 + 2y_0 = 3u_1,$$

skąd wynika, że $y_1 = -2y_0 + 3u_1$. Z uwagi na to, że $y_0 = 1$ oraz $u_1 = 0$, znajdujemy więc $y_1 = -2$. Dla $n = 2$,

$$y_2 + 2y_1 = 3u_2,$$

a zatem $y_2 = -2y_1 + 3u_2$, co daje $y_2 = 4$. Wyznamyliśmy zatem kolejno y_0, y_1, y_2 . Analogicznie możemy znaleźć y_3, y_4, \dots , czyli rozwiązać równanie różnicowe. Metoda ta nie prowadzi jednak do formuły analitycznej rozwiązania.

Przykład 9.1.3. Dla systemu, warunku początkowego i pobudzenia jak w ostatnim przykładzie wyznaczymy odpowiedź, stosując transformatę \mathcal{Z} . Po obustronnej transformacji \mathcal{Z} otrzymujemy

$$(1 + 2z^{-1})Y(z) + 2y_{-1} = 3U(z),$$

czyli

$$Y(z) = -\frac{2y_{-1}}{1 + 2z^{-1}} + \frac{3}{1 + 2z^{-1}}U(z).$$

Ponieważ $U(z) = 1$ oraz $y_{-1} = 2$, zatem

$$Y(z) = -\frac{2z}{z + 2} + 3\frac{z}{z + 2},$$

skąd wynika, że

$$y_n = -2(-2)^n + 3(-2)^n = (-2)^n.$$

Przykład 9.1.4. Równanie różnicowe systemu jest następujące:

$$y_n - ay_{n-1} = bu_n + cu_{n-1}.$$

Wyznamy jego odpowiedź na pobudzenie $u_n = \delta_n$ przy warunku początkowym y_{-1} . Dokonując obustronnej transformacji \mathcal{Z} , otrzymujemy

$$(1 - az^{-1})Y(z) + y_{-1} = (b + cz^{-1})U(z),$$

czyli

$$Y(z) = -\frac{y_{-1}}{1 - az^{-1}} + \frac{b + cz^{-1}}{1 - az^{-1}}U(z).$$

Ponieważ $U(z) = 1$, zatem

$$Y(z) = -y_{-1} \frac{z}{z-a} + \frac{bz+c}{z-a} = -y_{-1} \frac{z}{z-a} - \frac{c}{a} + \frac{ab+c}{a} \frac{z}{z-a},$$

skąd wynika, że

$$y_n = -y_{-1}a^n - \frac{c}{a}\delta_n + \frac{ab+c}{a}a^n.$$

Ćwiczenie 9.1.1. Przy warunku początkowym $y_0 = 0$, $y_1 = 0$ równanie drugiego rzędu $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ generuje ciąg Fibonacciego $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Wykazać, że $y_n = (1/\sqrt{5})(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$, gdzie $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Uwaga 9.1.1. Niekiedy, po dokonaniu przesunięcia, równanie (9.1) zapisuje się w nieco innej postaci, a mianowicie:

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \dots + a_0y_n = b_lu_{n+l} + \dots + b_0u_n.$$

Wynikające stąd różnice pokażemy na przykładzie równań

$$y_n - \alpha y_{n-1} = u_{n-1} \quad \text{oraz} \quad y_{n+1} - \alpha y_n = u_n.$$

Przy uwzględnieniu tego, że $\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = z^{-1}Y(z) + y_{-1}$, dokonując obustronnej transformacji \mathcal{Z} wobec pierwszego równania otrzymujemy $(1 - \alpha z^{-1})Y(z) - \alpha y_{-1} = z^{-1}U(z)$, skąd wynika, że

$$Y(z) = \frac{1}{z-\alpha}U(z) + y_{-1}\frac{\alpha z}{z-\alpha}.$$

Zatem

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-\alpha}U(z) \right\} + y_{-1}\alpha^{n+1}.$$

Postępując podobnie wobec drugiego równania i pamiętając, że $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = zY(z) - y_0$, znajdujemy

$$Y(z) = \frac{1}{z-\alpha}U(z) + y_0\frac{1}{z-\alpha}$$

i dochodzimy do wniosku, że

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-\alpha}U(z) \right\} + y_0\frac{1}{\alpha}(-\delta_n + \alpha^n).$$

Składowe przejściowe są zatem nieco inne, gdyż różnie jest rozumiany warunek początkowy.

Ćwiczenie 9.1.2. Rozwiązać równanie

$$a_m y_{n+1} + a_{m-1} y_n + \dots + a_0 y_{n-m+1} = b_m u_{n+1} + \dots + b_0 u_{n-m+1},$$

w którym $n = 0, 1, 2, \dots$, przyjmując $y_{m-1}, \dots, y_{-1}, y_0$ jako warunek początkowy.

9.2. Transmitancja

9.2.1. Definicja. Liniowość systemu

Definicja 9.2.1. *Transmitancją systemu dyskretnego nazywamy funkcję*

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}. \quad (9.9)$$

Poniższa własność jest oczywista.

Własność 9.2.1. *Przy zerowym warunku początkowym,*

$$Y(z) = K(z)U(z).$$

Transmitancja wiąże zatem transformaty \mathcal{Z} pobudzenia i odpowiedzi systemu (jedy- nie) w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy. Jest ona funkcją wymierną i jej bieguny są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $M(z)$.

Z tego, że $a_0 \neq 0$ wynika poniższa własność.

Własność 9.2.2. *Transmitancja systemu opisywanego przez równanie różnicowe (9.1) nie ma bieguna w punkcie $z = 0$.*

Z własności 9.2.1 wynika ważne twierdzenie dotyczące liniowości systemu.

Twierdzenie 9.2.1 (liniowość systemu). *Jeśli warunek początkowy jest zerowy i jeśli na pobudzenia \bar{u}_n, \tilde{u}_n i u_n reakcjami systemu są \bar{y}_n, \tilde{y}_n i y_n , to odpowiedziami na wejścia $\alpha\bar{u}_n + \beta\tilde{u}_n, u_{n-k}$, ($k \geq 0$) oraz $\sum_{i=0}^n u_i$ są odpowiednio $\alpha\bar{y}_n + \beta\tilde{y}_n, y_{n-k}$ oraz $\sum_{i=0}^n y_i$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 9.2.1. ■

Jeśli zatem warunek początkowy jest zerowy, to operacji liniowej na sygnale wejściowym odpowiada taka sama operacja na sygnale wyjściowym.

Własność 9.2.3. *W transmitancji rzeczywistego systemu dyskretnego $l \leq m$.*

Wyjaśnimy teraz istotę powyższej własności. Przypuśćmy, że jest inaczej, że np. $l = m + 1$. Wynika stąd, że $K(z) = \alpha z + \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^{-n}$. Niech teraz $\{u_n\} = \delta_{n-5}$ i niech ponadto warunek początkowy będzie zerowy. Ponieważ $U(z) = z^{-5}$, a zatem $Y(z) = K(z)U(z) = \alpha z^{-4} + \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^{-n-5}$. W rezultacie $y_4 = \alpha \neq 0$. Odpowiedź wyprzedza więc pobudzenie, co nie jest możliwe.

Korzystając z pojęcia transmitancji, odpowiedź systemu (9.7) na pobudzenie u_n przy dowolnym warunku początkowym można zapisać jako

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \{K(z)U(z)\}. \quad (9.10)$$

Ćwiczenie 9.2.1. Wyznaczyć transmitancję, rozumianą jako $Y(z)/U(z)$, systemu opisywanego równaniem

$$a_m y_{n+1} + a_{m-1} y_n + \dots + a_0 y_{n-m+1} = b_m u_{n+1} + \dots + b_0 u_{n-m+1},$$

w którym $n = 0, 1, 2, \dots$, a $y_{m-1}, \dots, y_{-1}, y_0$ jest warunkiem początkowym, patrz ćwiczenie 9.1.2.

9.2.2. Systemy z opóźnieniem

Do klasy systemów liniowych dołączamy teraz pewną, specyficzną rodzinę opisywaną równaniami różnicowymi z opóźnieniem, czyli równaniami o postaci jak poniżej

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = b_l u_{n-m+l} + \dots + b_0 u_{n-m} + b_{-1} u_{n-m-1} + \dots + b_{-k} u_{n-m-k}.$$

Wyraży $u_{n-m-1}, \dots, u_{n-m-k}$ po prawej stronie równania, którym towarzyszą współczynniki b z ujemnymi indeksami, oznaczają wystąpienie tzw. opóźnień. Największe z nich jest równe k . Jak łatwo sprawdzić

$$Y(z) = \frac{b_l z^{-m+l} + \dots + b_{-k} z^{-m-k}}{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-m}} U(z) + \frac{V(z^{-1})}{M(z)} = \frac{L(z)}{z^k M(z)} U(z) + \frac{zW(z)}{M(z)},$$

gdzie $M(z)$ jest wielomianem jak w (9.3), natomiast $V(z^{-1})$ i $W(z) = z^{m-1} V(z^{-1})$ są wielomianami pochodzącymi od warunku początkowego, patrz podrozdział 9.1. Ponadto $L(z) = b_l z^{k+l} + \dots + b_0 z^k + b_{-1} z^{k-1} + \dots + b_{-k}$.

Przez analogię,

$$K(z) = \frac{L(z)}{z^k M(z)}$$

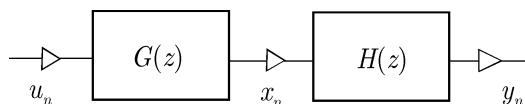
nazywa się transmitancją takiego systemu. Ma ona k -krotny biegun w punkcie $z = 0$. Zwracamy przy tym uwagę, że rzędem systemu jest m . W szczególności zatem, system o transmitancji $K(z) = z^{-k}$ opóźnia o k .

W dalszych rozważaniach nie będziemy odróżniać systemów bez opóźnień od tych z opóźnieniami. Dlatego też transmitancja będzie miała postać $K(z) = L(z)/M(z)$ niezależnie od tego, czy wielomian $M(z)$ ma jakikolwiek pierwiastek w punkcie $z = 0$ czy nie.

Przykład 9.2.1. Dla systemu o transmitancji $K(z) = L(z)/z^N$ równanie różnicowe ma postać $y_n = b_{-1} u_{n-1} + \dots + b_{-N} u_{n-N}$.

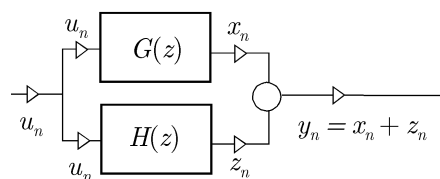
9.2.3. Transmitancja systemów złożonych

Łącząc systemy, otrzymuje się bardziej skomplikowane struktury, z których najprostszą jest szeregową, rys. 9.2, o transmitancji $G(z)H(z)$.



Rys. 9.2. Struktura szeregową

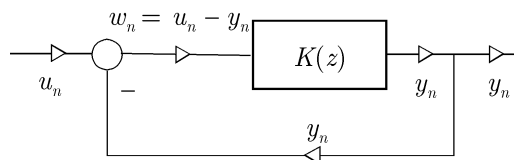
Transmitancją połączenia równoległego pokazanego na rys. 9.3 jest $G(z) + H(z)$.



Rys. 9.3. Struktura równoległa

Kolejną jest struktura z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, rys. 9.4. Wejściem jest u_n , wyjściem y_n . Jego transmitancję oznaczymy przez $K_Z(z)$. Uwzględniając to, że $W(z) = U(z) - Y(z)$ oraz $Y(z) = K(z)W(z)$, otrzymujemy

$$K_Z(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K(z)}{1 + K(z)}.$$



Rys. 9.4. Sprzężenie zwrotne

9.3. Transmitancja widmowa

Definicja 9.3.1. *Transmitancją widmową nazywamy następującą funkcję argumentu ω :*

$$K(e^{j\omega}) = K(z)|_{z=e^{j\omega}}.$$

Z uwagi na to, że $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$, transmitancja widmowa jest funkcją periodyczną o okresie 2π . Jej graficzne przedstawienie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dla $\omega \in [0, \pi)$ nazywamy charakterystyką amplitudowo-fazową.

Definicja transmitancji widmowej systemu dyskretnego, aczkolwiek być może osobiwa na pierwszy rzut oka, pozostaje w ścisłym związku z pojęciem transmitancji widmowej systemu ciągłego oraz transformacją Laplace'a, patrz podrozdział B.6.

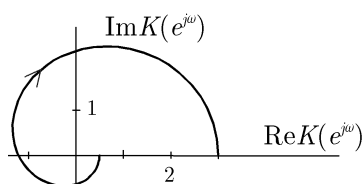
Przykład 9.3.1. Dla systemu o transmitancji

$$K(z) = \frac{6}{6z^2 + 5z + 1}$$

transmitancją widmową jest

$$K(e^{j\omega}) = \frac{6}{6e^{j2\omega} + 5e^{j\omega} + 1}.$$

Jej wykres, czyli charakterystykę amplitudowo-fazową, pokazano na rys. 9.5.



Rys. 9.5. Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej, przykład 9.3.1

9.4. Odpowiedzi na standardowe pobudzenia

Standardowymi pobudzeniami stosowanymi przy analizie systemów dynamicznych są dyskretny impuls Diraca δ_n , skok jednostkowy 1_n oraz sinusoida $\sin \omega n$. Warto przypomnieć, że $K(z) = L(z)/M(z)$, gdzie $L(z)$ i $M(z)$ są wielomianami jak w (9.4) oraz (9.3).

9.4.1. Odpowiedź impulsowa

Zacniemy od definicji, która nawiązuje w sposób oczywisty do pojęcia odpowiedzi impulsowej systemu ciągłego.

Definicja 9.4.1. *Odpowiedzią impulsową $\{k_n\}$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie impulsem dyskretnym δ_n w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Związek pomiędzy odpowiedzią impulsową i transmitancją ustala poniższa własność.

Własność 9.4.1. *Odpowiedź impulsowa i transmitancja są powiązane następującym wzorem:*

$$k_n = \mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}.$$

Dowód. W dowodzie wystarczy skorzystać z własności 9.2.1 oraz wziąć pod uwagę to, że $\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1$. ■

Odpowiedź impulsowa jest więc oryginałem transmitancji $K(z)$. Podaną własność rozumiemy oczywiście w ten sposób, że $k_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$ oraz $k_n = \mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}$ dla $n = 0, 1, \dots$. Aby ją znaleźć, oznaczmy jej bieguny jak następuje:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rzeczywiste } \xi_1, \dots, \xi_p, \text{ różne o krotnościach } k_1, \dots, k_p, \\ \text{pary zespolone } (\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q), \text{ różne o krotnościach } \kappa_1, \dots, \kappa_q, \\ \text{przy czym } \eta_i = |\eta_i|e^{j\omega_i}, i = 1, \dots, q. \end{array} \right\} \quad (9.11)$$

Jest przy tym oczywiste, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = n$. Oznaczmy jeszcze

$$\theta_n(k) = \frac{(n+k-1)!}{n!}. \quad (9.12)$$

Zauważmy, że $\theta_n(1) = 1$, $\theta_n(2) = n+1$, $\theta_n(3) = (n+1)(n+2)$ itd. W ciągu $\theta_n(k)$ dominującą składową jest zatem n^{k-1} . Ponadto \mathcal{D} jest operatorem opóźnienia, co oznacza, że $\mathcal{D}\{x_n\} = x_{n-1}$, $\mathcal{D}^2\{x_n\} = x_{n-2}$ itd.

Własność 9.4.2 (bieguny dowolne). Niech $K(z)$ ma bieguny oznaczone jak w (9.11). System ma następującą odpowiedź impulsową:

$$k_n = \alpha_0 \delta_n + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j) \xi_i^n\} \\ + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \frac{|\beta_{ij}|}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j) |\eta_i|^n \cos(\omega_i n + \varphi_{ij})\},$$

gdzie: $\alpha_0 = K(0)$,

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \frac{1}{\xi_i} \lim_{z \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{dz^{k_i-j}} [(z - \xi_i)^{k_i} K(z)],$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \frac{1}{\eta_i} \lim_{z \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{dz^{\kappa_i-j}} [(z - \eta_i)^{\kappa_i} K(z)]$$

oraz $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$.

Dowód. Po dokonaniu rozkładu na ułamki proste otrzymujemy

$$\frac{1}{z} K(z) = \alpha_0 \frac{1}{z} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(z - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(z - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

a współczynniki α_0 , α_{ij} , β_{ij} znajdujemy bez trudu, korzystając z twierdzenia B.2.1. ■

Dla biegunów jednokrotnych odpowiedź impulsową można zapisać w znacznie prostszej postaci.

Wniosek 9.4.1 (bieguny jednokrotne). Jeśli bieguny transmitancji oznaczone jak w (9.11) są jednokrotne, to system ma następującą odpowiedź impulsową:

$$k_n = K(0) \delta_n + \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i^n + 2 \sum_{i=1}^q \beta_i |\eta_i|^n \cos(\omega_i n + \varphi_i),$$

gdzie:

$$\alpha_i = \frac{1}{\xi_i} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) K(z), \beta_i = \frac{1}{\eta_i} \lim_{z \rightarrow \eta_i} (z - \eta_i) K(z), \varphi_i = \arg \beta_i.$$

Uwaga 9.4.1. Pary $(|\eta|e^{j\omega}, |\eta|e^{-j\omega})$, $(\alpha|\eta|e^{j\omega}, \alpha|\eta|e^{-j\omega})$, $\alpha > 0$, czyli pary biegunów leżących na tych samych półprostych o początku w punkcie $(0, j0)$, wnoszą do odpowiedzi impulsowej składowe o tej samej pulsacji ω .

Każdy biegun rzeczywisty i każda para biegunów zespolonych wnoszą do odpowiedzi odpowiednie składowe. Pojedynczy biegun rzeczywisty, powiedzmy ξ , jest przyczyną pojawienia się składowej ξ^n . Jeśli jego krotność jest k , to w odpowiedzi pojawiają się (z dokładnością do przesunięcia i stałego mnożnika) składowe:

$$\xi^n, n\xi^n, \dots, n^{k-1}\xi^n.$$

Z lematu B.3.1 wynika, że jeśli $|\xi| < 1$, to, niezależnie od krotności, składowe związane z tym biegunem maleją do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Jeśli $|\xi| = 1$ i biegun jest jednokrotny, to składowa ξ^n przez niego wnoszona jest ograniczona, lecz nie maleje do zera. Jeśli natomiast $|\xi| > 1$, to, z uwagi na wspomniany lemat, niezależnie od krotności każda ze składowych odpowiedzi ma tę własność, że jej wartość bezwzględna narasta do nieskończoności, gdy $n \rightarrow \infty$.

Z kolei pojedyncza para $(\eta, \bar{\eta})$, $\eta = |\eta|e^{j\omega}$, powoduje, że w odpowiedzi obserwujemy składową typu $|\eta|^n \cos \omega n$. Jeśli para ta ma krotność k , to w odpowiedzi występują składowe (także z dokładnością do przesunięcia i stałego mnożnika)

$$|\eta|^n n \cos \omega n, \dots, |\eta|^n n^{k-1} \cos \omega n.$$

Każda para biegunów zespolonych wnosi składową periodyczną. Z lematu B.3.1 wynika, że jeśli $|\eta| < 1$, to, niezależnie od krotności, wszystkie składowe z nią związane maleją do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Jeśli natomiast $|\eta| > 1$, to amplitudy tych składowych narastają do nieskończoności.

Własność 9.4.3. Niech $p = m - l$. Dla $p = 0$,

$$k_0 = \frac{b_m}{a_m} \neq 0,$$

natomiast dla $p \geq 1$,

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{p-1} = 0 \text{ i dopiero } k_p = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Jest oczywiste, że transmitancję można przedstawić jako następujące rozwinięcie: $K(z) = k_0 + k_1 z^{-1} + \dots$. Dla $p = 0$, zatem $k_0 = b_m/a_m \neq 0$. Dla $p = 1$, $k_0 = 0$ i $k_1 = b_l/a_m \neq 0$. Ogólnie, dla $p \geq 1$, sytuacja jest oczywista. ■

Powyższa własność orzeka, że im większa różnica pomiędzy stopniami wielomianów $M(z)$ i $L(z)$, tym dłużej odpowiedź impulsowa równa się zero, a zatem tym wolniejsza jest reakcja systemu.

Przykład 9.4.1. System o transmitancji $K(z) = z/(z + 1/3)$ ma odpowiedź impulsową $k_n = (-1/3)^n$.

Przykład 9.4.2. Dla systemu o transmitancji $K(z) = z(2z + 1)/(z - 2)(z + 3)$ odpowiedź impulsowa jest równa $k_n = 2^n + (-3)^n$.

Przykład 9.4.3. System o transmitancji $K(z) = 1/(z - 3)$ ma odpowiedź impulsową o postaci $k_n = (1/3)(3^n - \delta_n)$.

Przykład 9.4.4. System o transmitancji $K(z) = z^2/(z - 1)^2$ ma odpowiedź impulsową $k_n = n$.

Przykład 9.4.5. Dla $K(z) = (7z + 6)/(2z^3 + z^2 + 4z + 5)$ znajdujemy $k_0 = k_1 = 0$, $k_2 = 7/2$.

Przykład 9.4.6. Dla $K(z) = (3z^2 + 3z + 4)/(5z^2 + 6z + 7)$ wyliczamy $k_0 = 3/5$.

Przykład 9.4.7. Dla transmitancji $K(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0)/z^m$, mamy $K(z) = b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-m+1} + b_0 z^{-m}$. Odpowiedzią impulsową jest zatem $k_0 = b_m, k_1 = b_{m-1}, \dots, k_{m-1} = b_1, k_m = b_0, k_{m+1} = 0, k_{m+2} = 0, \dots$. Ustala się więc ona po skończonym czasie.

9.4.2. Odpowiedź skokowa

Definicja 9.4.2. Odpowiedzią skokową $\{\lambda_n\}$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie skokiem jednostkowym 1_n w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.

Podamy teraz relację między odpowiedzią skokową i transmitancją.

Własność 9.4.4. Związek między odpowiedzią skokową i transmitancją jest określony wzorem

$$\lambda_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} K(z) \right\}.$$

Jest przy tym oczywiste, że własność powyższą rozumiemy w ten sposób, że $\lambda_n = 0$ dla $n = \dots, -2, -1$ oraz $\lambda_n = (z/(z-1))\mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}$ dla $n = 0, 1, \dots$

Własność 9.4.5 (bieguny dowolne). Niech bieguny transmitancji $K(z)$ będą oznaczone jak w (9.11), przy czym $\xi_1 = 1$. System ma następującą odpowiedź skokową:

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \sum_{j=1}^{k_1+1} \frac{c_{1j}}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j)\} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j) \xi_i^n\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \frac{|d_{ij}|}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j) |\eta_i|^n \cos(n\omega_i + \psi_{ij})\}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{1}{(k_1+1-j)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^{k_1+1-j}}{dz^{k_1+1-j}} [(z-1)^{k_1} K(z)], \\ c_{ij} &= \frac{1}{(k_i-j)!} \lim_{z \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{dz^{k_i-j}} \left[(z-\xi_i)^{k_i} \frac{1}{z-1} K(z) \right], \\ d_{ij} &= \frac{1}{(\kappa_i-j)!} \lim_{z \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{dz^{\kappa_i-j}} \left[(z-\eta_i)^{\kappa_i} \frac{1}{z-1} K(z) \right] \end{aligned}$$

oraz $\psi_{ij} = \arg d_{ij}$.

Dowód. Z własności 9.4.4 wynika, że odpowiedź skokowa jest oryginałem transformaty $zK(z)/(z-1)$. Dokonując zatem rozkładu funkcji $K(z)/(z-1)$ na ułamki proste i mnożąc następnie obydwie strony otrzymanego rezultatu przez z , otrzymujemy:

$$\frac{z}{z-1} K(z) = \sum_{j=1}^{k_1+1} \frac{c_{1j} z}{(z-\xi_1)^j} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij} z}{(z-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{d_{ij} z}{(z-\eta_i)^j} + \frac{\bar{d}_{ij} z}{(z-\bar{\eta}_i)^j} \right],$$

a jego współczynniki c_{1j}, c_{ij}, d_{ij} znajdujemy, korzystając z twierdzenia B.2.1. ■

Gdy bieguny transmitancji są jednokrotne, odpowiedź skokowa ma postać jak w poniższym wniosku.

Wniosek 9.4.2 (bieguny jednokrotne). *Jeśli bieguny transmitancji oznaczone jak w (9.11) są jednokrotne i wszystkie różne od 1, to*

$$\lambda_n = K(1) + \sum_{i=1}^p c_i \xi_i^n + 2 \sum_{i=1}^q |d_i| |\eta_i|^n \cos(n\omega_i + \psi_i),$$

gdzie: $\psi_i = \arg d_i$,

$$c_i = \frac{1}{\xi_i - 1} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) K(z),$$

$$d_i = \frac{1}{\eta_i - 1} \lim_{z \rightarrow \eta_i} (z - \eta_i) K(z).$$

Związek między odpowiedzią skokową i impulsową określa poniższa własność.

Własność 9.4.6. *Odpowiedź impulsowa i skokowa są powiązane wzorem*

$$\lambda_n = \sum_{i=0}^n k_i, \text{ czyli } k_n = \lambda_n - \lambda_{n-1},$$

gdzie $\lambda_{-1} = 0$.

Kolejna własność w sposób oczywisty nawiązuje do własności 9.4.3 dotyczącej odpowiedzi impulsowej.

Własność 9.4.7. *Niech $p = m - l$. W odpowiedzi skokowej*

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \text{ i dopiero } \lambda_{p+1} = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Przykład 9.4.8. Dla systemu jak w przykładzie 9.4.7, odpowiedź skokowa jest taka, że $\lambda_0 = b_m$, $\lambda_1 = b_{m-1} + b_m, \dots$, $\lambda_{m-1} = \sum_{i=1}^m b_i$, $\lambda_m = \sum_{i=0}^m b_i$ i dalej $\lambda_{m+1} = \lambda_m$, $\lambda_{m+2} = \lambda_m, \dots$. Ustala się ona zatem po skończonym czasie.

Przykład 9.4.9. Dla transmitancji podanej w przykładzie 9.4.5, bez trudu znajdujemy $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ oraz $\lambda_3 = 7/2$.

Przykład 9.4.10. Dla transmitancji jak w przykładzie 9.4.6, wyznaczamy $\lambda_0 = 0$ oraz $\lambda_1 = 3/5$.

Przykład 9.4.11. Dla transmitancji $K(z) = (b_1 z + b_0)/(a_2 z^2 + a_1 z + a_0)$, wyliczamy $k_0 = 0$, $k_1 = b_1/a_2$ oraz $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = b_1/a_2$.

Przykład 9.4.12. Dla systemu o transmitancji $K(z) = (b_1 z + b_0)/(a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0)$, znajdujemy $k_0 = k_1 = 0$, $k_2 = b_1/a_3$ oraz $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = b_1/a_3$.

9.5. Splot dyskretny

Z uwagi na to, że $\mathcal{Z}^{-1}\{K(z)U(z)\} = \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i$, patrz punkt B.1.1, przy zerowym warunku początkowym, wyjście wyraża się wzorem

$$y_n = \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i = \sum_{i=0}^n k_i u_{n-i},$$

gdzie k_i jest odpowiedzią impulsową.

Odpowiedź (9.10) systemu przy dowolnym warunku początkowym można teraz zapisać w następujący sposób:

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\} + \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i. \quad (9.13)$$

9.6. Równanie fazowe

Przy zerowym pobudzeniu, zachowanie się systemu jest opisywane przez równanie jednorodne (9.8). Zakładamy przy tym, że $a_m = 1$. Wprowadzając więc wektor fazowy

$$\boldsymbol{\xi}_n = [y_{n-m+1}, \dots, y_{n-1}, y_n]^T,$$

zauważamy, że w takiej sytuacji

$$\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{n-1}, \quad (9.14)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, przy czym

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

jest tzw. macierzą fazową. Równanie powyższe nazywa się fazowym,

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = [y_{-m}, \dots, y_{-2}, y_{-1}]^T$$

jest jego warunkiem początkowym, a rozwiązanie ma postać:

$$\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{A}^{n+1}\boldsymbol{\xi}_0.$$

Ciąg punktów $\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots$ w przestrzeni fazowej nazywa się trajekcją fazową.

Zauważmy, że

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Zatem $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = M(\lambda)$, gdzie $M(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym jak w (9.3) równania skalarne (9.1). Wynika stąd poniższa własność.

Własność 9.6.1. Wartości własne macierzy \mathbf{A} , pierwiastki charakterystyczne równania skalarnego (9.1) oraz bieguny transmitancji są identyczne.

Przy warunku początkowym $\xi_{-1} = [y_{-m+1}, \dots, y_{-2}, y_{-1}]^T$ reakcją systemu na wymuszenie zerowe jest

$$y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n+1} \xi_0 = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\}, \quad (9.16)$$

gdzie $\mathbf{c} = [0, \dots, 0, 1]^T$, natomiast $W(z)$ jest wielomianem jak w (9.7). W rezultacie reakcję (9.13) systemu na wymuszenie u_n , przy dowolnym warunku początkowym, można zapisać następująco:

$$y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n+1} \xi_{-1} + \sum_{i=0}^n k_{n-i} u_i. \quad (9.17)$$

Ćwiczenie 9.6.1. Sprawdzić, że jeśli

$$\boldsymbol{\eta}_n = [y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m+1}]^T,$$

to

$$\boldsymbol{\eta}_n = \begin{bmatrix} -a_{m-1} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{n-1}.$$

Ćwiczenie 9.6.2. Sprawdzić, że dla równania różnicowego

$$a_m y_{n+1} + a_{m-1} y_n + \cdots + a_0 y_{n-m+1} = 0,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, otrzymujemy równanie fazowe (9.14), w którym warunkiem początkowym jest $\xi_0 = [y_{-m+1}, \dots, y_{-1}, y_0]^T$, patrz ćwiczenia 9.1.2 i 9.2.1.

9.7. System ciągly sterowany dyskretnie

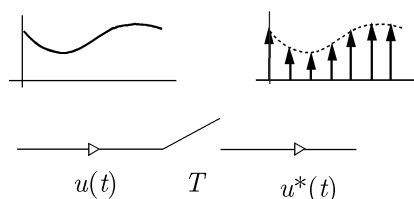
Instalując w systemie ciąglym urządzenie nazywane impulsatorem, zamienia się go niejako w system dyskretny. Innym urządzeniem stosowanym w takich systemach jest ekstrapolator, który zamienia ciąg impulsów Diraca w funkcję schodkową.

9.7.1. Impulsator, ekstrapolator

Wejściem impulsatora, patrz rys. 9.6, jest sygnał $u(t)$, natomiast wyjściem

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \delta(t - nT). \quad (9.18)$$

Zamienia więc on funkcję czasu w ciąg impulsów Diraca, modulowanych przez jej wartości w chwilach $0, T, 2T, 3T, \dots$. Liczba T nazywa się okresem impulsowania.



Rys. 9.6. Impulsator

Impulsator może współpracować z ekstrapolatorem oznaczonym na rys. 9.7 jako E . Jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca jak w (9.18). Wyjściem $\bar{u}(t)$ jest natomiast funkcja stała pomiędzy chwilami, w których działa impulsator, tzn. stała na odcinkach $[0, T)$, $[T, 2T)$, \dots . Na odcinku $[0, T)$ przyjmuje ona wartość $u(0)$, na $[T, 2T)$ wartość $u(T)$, na kolejnym $[2T, 3T)$ wartość $u(2T)$ itd. Ogólnie zatem

$$\bar{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T).$$

Zauważmy, że

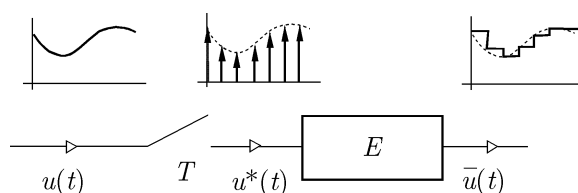
$$\bar{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) [1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)], \quad (9.19)$$

skąd wynika, że

$$\bar{U}(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) [e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT}] = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nsT}.$$

Zatem, z uwagi na to, że $U^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nsT}$, otrzymujemy ostatecznie

$$\bar{U}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} U^*(s). \quad (9.20)$$



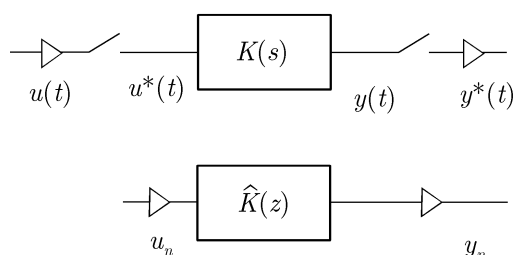
Rys. 9.7. Impulsator z ekstrapolatorem

9.7.2. Transmitancja

System ciągły może współpracować z dwoma synchronicznie działającymi impulsatorami o okresie T , z których jeden znajduje się na wejściu tego systemu, a drugi na

wyjściu, rys 9.8. Sygnały $u^*(t)$ i $y^*(t)$ są ciągami impulsów Diraca, przy czym $u^*(t)$ określone jest wzorem (9.18), natomiast

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT).$$



Rys. 9.8. Obiekt ciągly sterowany przez impulsator

Z sygnałem $u^*(t)$ można w sposób wzajemnie jednoznaczny skojarzyć ciąg liczbowy $u(0), u(T), u(2T), \dots$, a z sygnałem $y^*(t)$ ciąg $y(0), y(T), y(2T), \dots$. Oznaczając więc $u_n = u(nT)$ oraz $y_n = y(nT)$, można powiedzieć, że ciąg wejściowy u_0, u_1, u_2, \dots jest przez system dynamiczny przekształcany w ciąg y_0, y_1, y_2, \dots . System, który to robi, jest oczywiście dyskretny.

Znajdziemy teraz jego transmitancję. Przy zerowym warunku początkowym w obiekcie (tzn. systemie ciągłym o transmitancji $K(s)$), otrzymujemy $Y(s) = K(s)U^*(s)$, skąd, na podstawie reguły o splocie, punkt B.1.1, wynika, że jego sygnałem wyjściowym jest $y(t) = \int_0^t k(t - \tau)u^*(\tau)d\tau$. Zatem

$$y(nT) = \sum_{i=0}^n u(iT) \int_0^{nT} k(nT - \tau)\delta(\tau - iT)d\tau = \sum_{i=0}^n k((n - i)T)u(iT).$$

Oznaczając $k_n = k(nT)$, możemy więc napisać, że $y_n = \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i$. Zatem $\hat{K}(z)$, czyli transmitancja systemu dyskretnego o wejściu u_n i wyjściu y_n , patrz rys. 9.8, jest równa $\mathcal{Z}\{k_n\}$, czyli

$$\hat{K}(z) = \mathcal{Z}\{k(nT)\}.$$

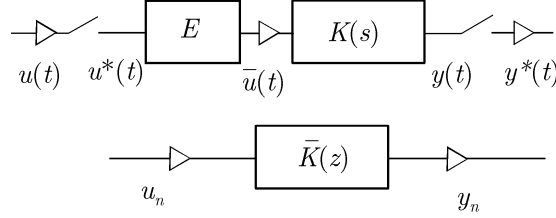
Odpowiedzią impulsową systemu jest oczywiście k_n .

Schemat postępowania przy znajdowaniu transmitancji dyskretniej jest pokazany poniżej:

$$K(s) \xrightarrow{\mathcal{S}^{-1}} k(t) \Rightarrow k(nT) \Rightarrow \mathcal{Z}\{k(nT)\} = \hat{K}(z). \quad (9.21)$$

Impulsatorowi znajdującemu się na wejściu systemu ciągłego o transmitancji $K(s)$ może towarzyszyć ekstrapolator, co pokazano na rys. 9.9. Sygnały $u^*(t)$ i $y^*(t)$ są ciągami impulsów Diraca, z którymi można w sposób wzajemnie jednoznaczny skojarzyć ciągi liczbowe $u(0), u(T), u(2T), \dots$ oraz $y(0), y(T), y(2T), \dots$. Oznaczając $u_n = u(nT)$ i $y_n = y(nT)$, możemy zatem stwierdzić, że ciąg liczbowy u_0, u_1, u_2, \dots jest przez system

dynamiczny przetwarzany na ciąg y_0, y_1, y_2, \dots i że system, który wykonuje tę operację, jest natury dyskretnej.



Rys. 9.9. Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem

W celu znalezienia jego opisu zakładamy, że w systemie ciągłym o transmitancji $K(s)$ warunek początkowy jest zerowy. Zauważmy, że z (9.20) wynika

$$Y(s) = K(s)\bar{U}(s) = H(s)U^*(s), \quad (9.22)$$

gdzie

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} K(s).$$

Zauważmy dalej, że

$$\mathfrak{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} - \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)e^{-sT}\right\} = \lambda(t) - \lambda(t - T),$$

gdzie $\lambda(t)$ jest odpowiedzią skokową systemu o transmitancji $K(s)$. Stosując wobec równości (9.22) regułę o splocie, punkt B.1.1, otrzymujemy więc $y(t) = \xi(t) + \xi(t - T)$, gdzie $\xi(t) = \int_0^t \lambda(t - \tau) u^*(\tau) d\tau$. Uwzględnienie (9.18) prowadzi zatem do wniosku, że $\xi(nT) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda((n-i)T) u(iT)$, czyli $\xi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{n-i} u_i$. W końcu otrzymujemy

$$y_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_{n-i} - \lambda_{n-1-i}) u_i.$$

System dyskretny ma zatem transmitancję

$$\bar{K}(z) = \mathcal{Z}\{\lambda_n - \lambda_{n-1}\} = \mathcal{Z}\{\lambda_n\} - z^{-1}\mathcal{Z}\{\lambda_n\},$$

czyli

$$\bar{K}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{\lambda(nT)\}. \quad (9.23)$$

Możemy więc podać następujący schemat postępowania, który prowadzi do transmitancji dyskretnej:

$$\frac{1}{s}K(s) \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} \lambda(t) \Rightarrow \lambda(nT) \Rightarrow \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{\lambda(nT)\} = \bar{K}(z). \quad (9.24)$$

Przykład 9.7.1. Niech teraz $K(s) = 1/(s+a)$. Ponieważ $k(t) = e^{-at}$, a zatem $k(nT) = e^{-naT}$, skąd wynika, patrz (B.5), że $\bar{K}(z) = z/(z - e^{-aT})$.

Przykład 9.7.2. Dla $K(s) = 1/s$ znajdujemy $k(t) = 1$. Wynika stąd, że $k_n = 1$. Zatem $\hat{K}(z) = z/(z - 1)$.

Przykład 9.7.3. Weźmy pod uwagę system ciągly o równaniu $y(t) = u(t - T)$, czyli równaniu różniczkowym zerowego rzędu z opóźnieniem. Jego odpowiedzią impulsową jest $k(t) = \delta(t - T)$, a transmitancją $K(s) = e^{-sT}$ (jako transmitancję rozumiemy oczywiście iloraz $Y(s)/U(s)$). Zauważmy, że k_n ma teraz postać $\{0, 1, 0, 0, \dots\}$, skąd wynika, że $\hat{K}(z) = z^{-1}$. System dyskretny o tej transmitancji należy do klasy systemów z opóźnieniem, patrz punkt 9.2.2. Zauważmy, że punkt osobliwy transmitancji $K(s)$, czyli $s = -\infty$, odpowiada punktowi osobliwemu, czyli biegunowi, $z = 0$ transmitancji $\hat{K}(z)$.

Ćwiczenie 9.7.1. Korzystając z ostatniego przykładu, wyznaczyć $\hat{K}(z)$, jeśli system jest opisywany równaniem $y'(t) + y(t) = u(t - T)$, czyli równaniem różniczkowym pierwszego rzędu z opóźnieniem. Następnie wyznaczyć tę transmitancję dla systemu o równaniu $y'(t) + y(t) = u(t - T/2)$.

Ćwiczenie 9.7.2. Sprawdzić, że dla transmitancji $K(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$ otrzymujemy $\hat{K}(z) = z \sin(\omega T)/(z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1)$.

Ćwiczenie 9.7.3. Ponieważ $\hat{K}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k(nT)z^{-n}$, a zatem możemy napisać, że $T\hat{K}(e^{sT}) = \sum_{n=0}^{\infty} k(nT)Te^{-snT}$. Następnie, z uwagi na to, że prawdziwa jest równość $\lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} k(nT)Te^{-snT} = \int_0^{\infty} k(t)e^{-st} dt = K(s)$, otrzymujemy ostatecznie $\lim_{T \rightarrow 0} T\hat{K}(e^{sT}) = K(s)$.

Przykład 9.7.4. Niech teraz $K(s) = a/(s + a)$. Ponieważ $\lambda(t) = 1 - e^{-at}$, a zatem $\lambda(nT) = 1 - e^{-naT}$, skąd wynika, że $\bar{K}(z) = (1 - e^{-aT})/(z - e^{-aT})$.

Ćwiczenie 9.7.4. Z (9.23) wynika, że $\bar{K}(e^{sT}) = ((e^{sT} - 1)/Te^{sT}) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(nT)Te^{-snT}$. Zauważając następnie, że $\lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(nT)Te^{-snT} = \int_0^{\infty} \lambda(t)e^{-st} dt = s^{-1}K(s)$ oraz $\lim_{T \rightarrow 0} (e^{sT} - 1)/Te^{sT} = s$, otrzymujemy $\lim_{T \rightarrow 0} \bar{K}(e^{sT}) = K(s)$.

Ćwiczenie 9.7.5. Zweryfikować poniższą tabelę:

$K(s)$	$\hat{K}(z)$	$\bar{K}(z)$
k	k	k
$\frac{1}{\tau s + 1}$	$\frac{z}{\tau(z - e^{-T/\tau})}$	$\frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}}$
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z - 1}$	$\frac{T}{z - 1}$
$\frac{1}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{(1 - e^{-T/\tau})z}{(z - 1)(z - e^{-T/\tau})}$	$\frac{(z - 1)Te^{-T/\tau}}{z(z - e^{-T/\tau})}$
$\frac{s}{\tau s + 1}$		$\frac{z - 1}{\tau(z - e^{-T/\tau})}$

Uwaga: Dla $K(s) = k$ odpowiedzią impulsową jest $k(t) = \delta(t)$ i dlatego przyjmujemy $k(0) = 1$ oraz $k(nT) = 0$, dla $n = 1, 2, \dots$

9.8. Związki między opisami

Podobnie jak w systemach o czasie ciągłym, związek między równaniem różnicowym (tam różniczkowym) a transmitancją nie jest wzajemnie jednoznaczny. Świadczą o tym, na przykład, systemy o równaniach

$$y_n + y_{n-1} = u_{n-1}$$

oraz

$$y_n + 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = u_{n-1} + 2u_{n-2}.$$

Transmitancja pierwszego jest równa

$$\frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{1}{z + 1}$$

i drugiego także, gdyż wyliczając ją, dokonujemy skrócenia jak poniżej:

$$\frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z + 2}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1}{z + 1}.$$

Równanie różnicowe i transmitancja, jak można wykazać, są opisami równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy $M(z)$ i $L(z)$ nie mają wspólnych pierwiastków. Z tego też powodu założenie to zostało przez nas przyjęte na samym początku.

W pozostałych opisach, jak już wiemy, związek między skalarnym równaniem różnicowym a wektorowym jest wzajemnie jednoznaczny. Równanie fazowe jest w oczywistej relacji do lewej strony równania różnicowego. Powiązania między odpowiedzią impulsową czy skokową nie wymagają komentarza.

Rozdział 10

Stabilność systemów dyskretnych

10.1. Definicja

Przedmiotem naszego zainteresowania jest teraz system dyskretny o transmitancji

$$K(z) = \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}, \quad (10.1)$$

w której $a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$. Warunkiem początkowym jest $y_{-m}, \dots, y_{-2}, y_{-1}$. Przez

$$z_1, z_2, \dots, z_m$$

oznaczymy pierwiastki jego wielomianu charakterystycznego

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0.$$

Omówimy podstawową dla nas własność jaką jest stabilność. Cechy tej będziemy później żądać od dyskretnych systemów automatycznej regulacji.

Definicja 10.1.1 (stabilność). *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

to system (10.1) nazywamy stabilnym.

Systemy, które nie są stabilne, nazywamy niestabilnymi. Wśród niestabilnych wyróżnia się klasę systemów na granicy stabilności.

Definicja 10.1.2. *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\sup_{n=0,1,2,\dots} |y_n| < \infty,$$

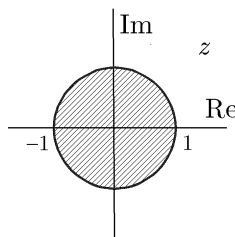
to mówimy, że system (10.1) jest na granicy stabilności.

10.2. Twierdzenie o stabilności

Twierdzenie 10.2.1 (stabilność). *System (10.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_m| < 1. \quad (10.2)$$

System jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz koła o promieniu 1 i środku $z = 0$, tzn. wewnątrz koła jednostkowego, rys. 10.1.



Rys. 10.1. Płaszczyzna liczb zespolonych i koło jednostkowe

Aby wykazać prawdziwość podanego twierdzenia, udowodnimy najpierw pewien lemat. Zakładając w tym celu, zgodnie z definicją stabilności, zerowe pobudzenie, otrzymujemy równanie jednorodne o postaci

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = 0. \quad (10.3)$$

Dokonując następnie transformacji \mathcal{Z} wobec obydwu stron tego równania, otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{zW(z)}{M(z)}, \quad (10.4)$$

gdzie

$$W(z) = w_{m-1} z^{m-1} + \dots + w_1 z + w_0$$

jest wielomianem stopnia $m - 1$, patrz (9.5). Zatem

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\}.$$

Zapowiadany lemat ustala relację pomiędzy warunkiem początkowym oraz współczynnikami wielomianu $W(z)$.

Lemat 10.2.1. *Dla dowolnego wielomianu $W_0(z)$ stopnia $m - 1$ istnieje warunek początkowy taki, że $W(z) \equiv W_0(z)$.*

Dowód. Poszczególne współczynniki wielomianu $W(z)$, patrz podrozdział 9.1, są równe:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_0 y_{-1}, \\ w_1 &= a_1 y_{-1} + a_0 y_{-2}, \\ &\vdots \\ w_{m-2} &= a_{m-2} y_{-1} + a_{m-3} y_{-2} + \cdots + a_0 y_{-m+1}, \\ w_{m-1} &= a_{m-1} y_{-1} + a_{m-2} y_{-2} + \cdots + a_1 y_{-m+1} + a_0 y_{-m}. \end{aligned}$$

Oznaczając $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}]^T$, $\mathbf{y} = [y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m}]^T$, a także

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_0 & & \\ a_{m-3} & & \ddots & \ddots & \\ & a_{m-2} & a_{m-3} & \ddots & a_0 \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \ddots & a_0 \end{bmatrix},$$

możemy napisać $\mathbf{w} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$. Ponieważ $\det \mathbf{Q} = a_0^m \neq 0$, dla każdego zadanego wektora \mathbf{w}_0 współczynników wielomianu $W_0(z) = w_{m-1}z^{m-1} + \cdots + w_1z + w_0$, istnieje więc wektor warunku początkowego \mathbf{y} taki, że $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w}_0$. ■

Dowód twierdzenia 10.2.1. Wykażemy, że warunek (10.2) jest wystarczający, tzn. że z (10.2) wynika stabilność. Zaczniemy od relacji, patrz (B.8),

$$\frac{z}{(z-\xi)^k} \hat{=} \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{\theta_n(k)\xi^n\}, \quad (10.5)$$

w której ξ jest rzeczywiste. Ponieważ $|\theta_n| \leq 2^k n^k$, patrz lemat B.3.1, ciąg po prawej stronie jest więc, co do bezwzględnej wartości, ograniczony przez

$$\frac{1}{(k-1)!} 2^k \mathcal{D}^{k-1} \{n^k |\xi|^n\},$$

gdzie \mathcal{D} jest operatorem opóźnienia. Jeśli $|\xi| < 1$, to ciąg ten, a zatem także ciąg w (10.5), zbiega się do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Z kolei, dla zespolonego η otrzymujemy

$$\frac{\beta z}{(z-\eta)^k} + \frac{\bar{\beta} z}{(z-\bar{\eta}_i)^k} \hat{=} 2|\beta| \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{|\eta|^n \theta_n(k) \cos(n\omega + \varphi)\}, \quad (10.6)$$

patrz (B.11), gdzie $\omega = \arg \eta$ i $\varphi = \arg \beta$. Wykorzystując jeszcze raz lemat B.3.1, stwierdzamy, że bezwzględna wartość wyrażenia po prawej stronie jest ograniczona przez

$$2^{k+1} |\beta| \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{n^k |\eta|^n\}$$

i także zbiega się do zera. Zero jest zatem granicą ciągu w (10.6).

Wychodząc z (10.4) i oznaczając teraz bieguny transmitancji jak w (9.11), otrzymujemy

$$y_n \doteq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij} z}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij} z}{(z - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij} z}{(z - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

gdzie α_{ij} i β_{ij} są współczynnikami rozkładu, i dzięki powyższym spostrzeżeniom wnioskujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, co kończy pierwszą część dowodu.

W drugiej części dowodu wykażemy, że warunek (10.2) jest konieczny, tzn., że ze stabilności wynika (10.2). Załóżmy, że system jest stabilny. Przypuśćmy najpierw, że z_1 jest rzeczywistym biegunem transmitancji. Z lematu 10.2.1 wynika, że istnieje warunek początkowy taki, że $W(z) = \prod_{i=2}^m (z - z_i)$. Ponieważ $M(z) = \prod_{i=1}^m (z - z_i)$, dla warunku tego

$$\frac{zW(z)}{M(z)} = \frac{z}{z - z_1},$$

a to z uwagi na (10.4). Wynika stąd, że $y_n = z_1^n$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, a zatem $|z_1| < 0$.

Weźmy teraz pod uwagę parę sprzężonych biegunów zespolonych, powiedzmy (z_1, z_2) , gdzie $z_1 = |z_1|e^{j\omega_1}$ i $z_2 = |z_1|e^{-j\omega_1}$. Z lematu 10.2.1 wynika istnienie warunku początkowego, dla którego $W(z) = |z_1| \prod_{i=3}^m (z - z_i)$. Przy warunku tym

$$\frac{zW(z)}{M(z)} = \frac{|z_1|z}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{|z_1|z}{z^2 - 2z|z_1| \cos \omega_1 + |z_1|^2},$$

skąd wynika, że $y_n = |z_1|^n \sin \omega_1 n$. Zatem $|z_1| < 1$ i $|z_2| < 1$.

Ponieważ powyższą argumentację można zastosować do każdego bieguna rzeczywistego i każdej pary zespolonej, wykazaliśmy więc, że ze stabilności wynika (10.2), co kończy dowód. ■

Twierdzenie 10.2.2. *System (10.1) jest na granicy stabilności wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \dots, |z_m| \leq 1, \quad (10.7)$$

przy czym bieguny transmitancji, dla których zachodzą równości, są co najwyżej jednokrotne.

Dowód. Dowód jest łatwy i dlatego go pomijamy. ■

Ćwiczenie 10.2.1. Korzystając z lematu 10.2.1, wykazać, że istnieją warunki początkowe takie, że:

- $y_n = z_i^n$,
- $\mathcal{Z}\{y_n\} = z^m / (z - z_1) \cdots (z - z_m)$,
- $\mathcal{Z}\{y_n\} = z^j / (z - z_i)^j$, $j = 1, \dots, \kappa_i$, gdzie z_i jest biegunem o krotności κ_i ,
- $y_n = k_n$

oraz że nie istnieje warunek początkowy, taki że $y_n = \lambda_n$.

10.3. Własności systemów stabilnych

Dowody własności podanych w niniejszym podrozdziale są pominięte, gdyż są podobne do tych, które odnoszą się do systemów o czasie ciągłym. Przypominamy, że $\{k_n\}$ jest odpowiedzią impulsową, a $\{\lambda_n\}$ skokową.

10.3.1. Odpowiedź impulsowa i skokowa

Własność 10.3.1. *Odpowiedź impulsowa ma każdą z poniższych własności:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |k_n| < \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny.

Jeśli granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$, gdzie λ_n jest odpowiedzią skokową, istnieje, to nazywamy ją wzmocnieniem systemu w stanie ustalonym. O jej istnieniu stanowi poniższa własność.

Własność 10.3.2. *Granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny. Ponadto, w systemie stabilnym wzmocnienie w stanie ustalonym jest równe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = K(1).$$

Dowód. Dowód istnienia granicy pomijamy, gdyż jest podobny do dowodu własności 4.3.4 dotyczącej systemu ciągłego. Ponieważ dla systemu stabilnego granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ istnieje oraz

$$\mathcal{Z}\{\lambda_n\} = \frac{z}{z-1} K(z),$$

z twierdzenia B.3.1 wnioskujemy zatem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = K(1)$. ■

System może mieć charakterystykę statyczną, tzn. charakterystykę wiążącą wysokość skoku na wejściu z poziomem, na którym ustala się reakcja systemu. Z powyższej własności wynika, że mają ją tylko systemy stabilne. Ich charakterystyka statyczna jest liniowa, tzn. $y = K(1)u$, co oznacza, że $K(1)$ jest jej współczynnikiem wzmocnienia. Ponieważ transmitancja takiego systemu nie ma bieguna w punkcie $z = 0$, więc $K(1)$ jest skończone.

Ćwiczenie 10.3.1. Wykazać, że jeśli pobudzenie jest takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, to w systemie stabilnym $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Ćwiczenie 10.3.2. Niech $\rho = \max_i |z_i|$. Wykazać, że:

- $|k_n| \leq c_1 \rho^n$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,
 - $|k_n| \leq c_2 n^{m-1} \rho^n \leq c_3 \rho^{n-\varepsilon}$, pewne c_2, c_3 oraz dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.
- Wskazówka: Skorzystać z (B.8) oraz lematu B.3.1.

Ćwiczenie 10.3.3. System będzie stabilny. Wykazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ istnieje, to $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ także istnieje. Ponadto $K(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n / \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Ćwiczenie 10.3.4. Niech system będzie stabilny i niech $\rho = \max_i |z_i|$. Wykazać, że:

a) $|k_n - \lim_{n \rightarrow \infty} k_n| \leq c_1 \rho^n$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,

b) $|k_n - \lim_{n \rightarrow \infty} k_n| \leq c_2 \rho^{n-\varepsilon}$, pewne c_2 i dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Wskazówka: Postąpić jak w ćwiczeniu 10.3.2.

10.3.2. Transmitancja widmowa

Reakcja na pobudzenie sinusoidalne

Zbadamy teraz reakcję systemu na pobudzenie ciągiem $u_n = \sin \omega n$, czyli dyskretną sinusoidą. Warunek początkowy jest przy tym zerowy. Pamiętając, że

$$\mathcal{Z}\{\sin n\omega\} = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} = \frac{z \sin \omega}{(z - e^{-j\omega})(z - e^{j\omega})},$$

zgodnie z (9.10) otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{z \sin \omega}{(z - e^{-j\omega})(z - e^{j\omega})} K(z) = \frac{zL(z) \sin \omega}{(z - e^{-j\omega})(z - e^{j\omega})M(z)}.$$

Jak łatwo sprawdzić, wyrażenie to jest równe

$$\frac{\alpha(\omega)z}{z - e^{-j\omega}} + \frac{\bar{\alpha}(\omega)z}{z - e^{j\omega}} + \frac{R(z)}{M(z)},$$

czego oryginałem jest

$$2|\alpha(\omega)| \cos(\omega n + \arg \alpha(\omega)) + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{R(z)}{M(z)} \right\},$$

przy czym $R(z)$ jest pewnym, bliżej nieokreślonym, wielomianem stopnia nie wyższego niż m , natomiast $\alpha(\omega) = -(j/2)K(e^{j\omega})$, patrz (B.9). Zauważając następnie, że $\arg \alpha(\omega) = \arg K(j\omega) - \pi/2$, znajdujemy

$$y_n = |K(e^{j\omega})| \sin(\omega n + \varphi(\omega)) + p_n,$$

gdzie $\varphi(\omega) = \arg K(e^{j\omega})$ oraz $p_n = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)/M(z)\}$. Z uwagi na stabilność systemu składowa przejściowa zanika, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. Zatem, dla dużych n składowa p_n jest bardzo mała i nie popełniając dużego błędu, możemy napisać, że na wyjściu systemu obserwujemy jedynie składową ustaloną, tzn. że

$$y_n \approx |K(e^{j\omega})| \sin(\omega n + \varphi(\omega)).$$

Składowa ustalona ma zatem następujące własności:

- jest dyskretną sinusoidą o tej samej pulsacji co pobudzenie,
- wzmocnienie amplitudowe zależy od ω i jest równe $|K(e^{j\omega})|$,
- przesunięcie fazowe zależy od ω i jest równe $\arg K(e^{j\omega})$.

Odpowiedź impulsowa

Dla systemu stabilnego zachodzi równość $K(e^{j\omega}) = \bar{K}(\omega)$, gdzie $\bar{K}(\omega)$ jest dyskretną transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej, patrz (B.15).

Własność 10.3.3. *Dla systemu stabilnego:*

$$\operatorname{Re} K(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos \omega n, \quad \operatorname{Im} K(e^{j\omega}) = -\sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin \omega n.$$

Dowód. Równość

$$K(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos \omega n - j \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin \omega n$$

dowodzi tezy. ■

Własność 10.3.4. *Dla systemu stabilnego*

$$k_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}[K(e^{j\omega})] \cos(\omega n) d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Im}[K(e^{j\omega})] \sin(\omega n) d\omega.$$

Dowód. Argumentacja jest podobna do tej w dowodzie własności 4.3.6. ■

Z wzoru Parsewala (B.19) wynika kolejna własność:

Własność 10.3.5. *Dla systemu stabilnego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

10.3.3. Równanie fazowe

Wektor fazowy ξ^* taki, że $\xi^* = \mathbf{A}\xi^*$, nazywamy punktem równowagi równania fazowego. Jest bowiem oczywiste, że trajektoria rozpoczynająca się w takim punkcie pozostaje w nim. Punkt równowagi ξ^* jest zatem rozwiązaniem równania $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$. Wynika stąd, że $\xi^* = \mathbf{0}$ jest punktem równowagi każdego równania fazowego. Jeśli $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \neq 0$, to jest to jedyny taki punkt. Jeśli natomiast $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$, tzn. jeśli $\lambda = 1$ jest pierwiastkiem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} , to jest ich więcej.

Ponieważ wielomiany charakterystyczne macierzy \mathbf{A} i transmitancji są identyczne, podrozdział 9.6, równanie fazowe ma zatem więcej niż jeden punkt równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy transmitancja ma biegun w punkcie $z = 1$. Jest przy tym oczywiste, że jeśli ξ^* jest punktem równowagi, to jest nim także każdy wektor postaci $\alpha\xi^*$, gdzie α jest dowolne.

Definicja 10.3.1. *Równanie fazowe nazywa się stabilnym, jeśli, dla każdego ξ_{-1} ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0.$$

Ponieważ $\xi_n = \mathbf{A}^n \xi_{-1}$, a więc równanie fazowe jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = 0. \quad (10.8)$$

Oznaczając przez $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ wartości własne macierzy \mathbf{A} , czyli rozwiązania równania $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, wykażemy teraz istotną własność.

Twierdzenie 10.3.1. *Zbieżność (10.8) zachodzi wtedy i tylko wtedy, tzn. równanie fazowe jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|\lambda_1| < 0, |\lambda_2| < 0, \dots, |\lambda_m| < 0. \quad (10.9)$$

Dowód. Zaczniemy od tego, że wyjściem systemu jest $y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n+1} \xi_{-1}$, gdzie ξ jest wektorem fazowym, a $\mathbf{c} = [0, 0, \dots, 1]^T$, patrz (9.16).

Z (10.8) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ dla każdego ξ_{-1} , czyli każdego warunku początkowego jednorodnego skalarnego równania różnicowego (10.3), co oznacza stabilność tego równania. Korzystając następnie z twierdzenia 10.2.1 o stabilności, dochodzimy do wniosku, że są spełnione nierówności (10.2). Ponieważ pierwiastki charakterystyczne równania są takie same jak wartości własne macierzy \mathbf{A} , patrz podrozdział 9.6, a zatem zachodzi (10.9).

Z drugiej strony, z (10.9) wynika (10.7), co, z uwagi na wspomniane już twierdzenia 10.2.1, oznacza stabilność równania różnicowego (10.3), czyli zbieżność $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ dla każdego ξ_{-1} . Jest przy tym oczywiste, że z uwagi na postać wektora fazowego, ze zbieżności tej wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ dla każdego ξ_{-1} , co pociąga za sobą (10.8) i kończy dowód. ■

Z powyższego twierdzenia i własności 9.6.1 wynika poniższy wniosek:

Własność 10.3.6. *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego równanie fazowe jest stabilne.*

10.3.4. Ograniczone wejście – ograniczone wyjście

Dowody podanych poniżej własności są podobne do tych, które dotyczą systemów ciągłych i dlatego są pominięte.

Własność 10.3.7. *Niech system będzie stabilny. Jeśli warunek początkowy jest zerowy, to:*

$$\begin{aligned} \sup_n |y_n| &\leq c \sup_n |u_n|, \\ \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| &\leq c \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|, \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 &\leq d^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2, \end{aligned}$$

gdzie $c = \sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$, $d = \sup_{\omega \in [0, \pi)} |K(e^{j\omega})|$.

Posługując się pojęciem normy, własności powyższe można zapisać krótko przy pomocy jednego wzoru. Definiując bowiem poszczególne normy jako:

$$\|x_n\|_1 = \sup_n |x_n|, \|x_n\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \|x_n\|_3 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2},$$

zauważamy, że nierówności w dwóch ostatnich własnościach można przedstawić w następującej, jednolitej postaci:

$$\|y_n\|_i \leq \gamma_i \|u_n\|_i,$$

gdzie $\gamma_1 = \gamma_2 = c$ oraz $\gamma_3 = d$.

Ćwiczenie 10.3.5. Wyznaczyć c oraz d dla systemu o transmitancji $z/(z - \lambda)$. Przeprowadzić dyskusję na temat ich istnienia w zależności od λ .

10.4. Własności systemów niestabilnych

Poniższe własności są oczywiste.

Własność 10.4.1. *W systemie na granicy stabilności*

$$\sup_n |k_n| < \infty.$$

Własność 10.4.2. *W systemie niestabilnym nie będącym na granicy stabilności*

$$\max_{i \in \{0, \dots, n\}} |k_i| \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

Rozdział 11

Kryteria stabilności systemów dyskretnych

Aby stwierdzić, czy system dyskretny jest stabilny, należy rozstrzygnąć, czy wszystkie pierwiastki z_1, \dots, z_m jego wielomianu charakterystycznego

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (11.1)$$

gdzie $a_m \neq 0$, leżą w kole jednostkowym, tzn., czy spełniają nierówności:

$$|z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_m| < 1. \quad (11.2)$$

Można to zrobić na dwa, zasadniczo różne, sposoby. W pierwszym można zastosować metody opracowane specjalnie dla systemów dyskretnych, tzn. kryterium Schura–Cohna wraz z różnymi jego modyfikacjami oraz kryterium Jury’ego. Można także dokonać pewnej modyfikacji kryteriów Michajłowa i Nyquista, przedstawionych wcześniej przy analizie systemów ciągłych, otrzymując ich dyskretnie odpowiedniki.

Istotą drugiego sposobu jest pewien zabieg, za pomocą którego od wielomianu (11.1) przechodzi się do innego. Ustala się następnie, czy ten nowy wielomian ma wszystkie swoje pierwiastki charakterystyczne w lewej półpłaszczyźnie. Zagadnienie to można oczywiście rozwiązać, stosując znane już kryteria omówione podczas analizy systemów ciągłych. Zabiegiem tym jest operacja odwzorowania płaszczyzny z na płaszczyznę innej zmiennej zespolonej, powiedzmy w . Odwzorowanie to przekształca okrąg jednostkowy w oś liczb urojonych, a jego wnętrze w lewą półpłaszczyznę. Badanie, czy pierwiastki wielomianu charakterystycznego o zmiennej z leżą w kole jednostkowym, sprowadza się w ten sposób do pytania, czy pierwiastki nowego wielomianu o zmiennej w leżą w lewej półpłaszczyźnie.

11.1. Kryterium Schura–Cohna

Przedstawimy teraz kryterium Schura–Cohna, patrz także [8] lub [10]. Podamy je zarówno w postaci oryginalnej, jak i w formach pochodnych, znacznie prostszych. Wersja

(11.3) poniższego twierdzenia, która pochodzi od Schura¹ i Cohna² jest niewygodna ze względu na konieczność wyliczania wyznacznika stopnia $2m$. Jury i Bharucha³ znacznie uproszcili ją podając wariant (11.4). Wersje (11.5) i (11.6) są równie wygodne.

Warto w tym miejscu wyjaśnić, że Schur i Cohn badali, czy w kole jednostkowym leżą pierwiastki wielomianu o współczynnikach zespolonych. U nas są one rzeczywiste, co właśnie umożliwia uproszczenia, którym jest poświęcony ten i następny podrozdział.

W celu przedstawienia zapowiedzianego kryterium wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech, dla $i = 1, 2, \dots, m$:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} a_{m-i+1} & a_{m-i+2} & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_{m-i+2} & a_{m-i+3} & \cdots & a_m & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m-1} & a_m & & & \\ a_m & & & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_i & a_{i-1} \\ & a_0 & \cdots & a_{i+1} & a_i \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_0 & a_1 \\ & & & & a_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_{m-i+2} & a_{m-i+1} \\ & a_m & \cdots & a_{m-i+3} & a_{m-i+2} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_m & a_{m-1} \\ & & & & a_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} & a_{i-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_{i-2} & a_{i-3} & \cdots & a_0 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_0 & & & & \end{bmatrix}$$

będą macierzami stopnia i . Na przykład zatem, dla wielomianu

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0:$$

$$\mathbf{X}_1 = [a_4], \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

¹I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, Journal für Mathematik, 1917, 147, 205–232.

²A. Cohn, *Über die Anzahl der Wurzeln einer Algebraischen Gleichung in einem Kreise*, Math., 1922, 16, 110–148.

³E.J. Jury, B.H. Bharucha, *Notes on the stability criterion for linear discrete systems*, IRE Transactions on Automatic Control, 1961, AC-6, 88–90.

$$\mathbf{Y}_1 = [a_0], \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_1 = [a_4], \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{Z}_1 = [a_0], \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_4 = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 11.1.1 (Schur–Cohn). *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony dowolny z poniższych czterech warunków:*

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & \mathbf{V}_i^T \end{bmatrix} > 0, \quad (11.3)$$

$$\det(\mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i)(\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i) > 0, \quad (11.4)$$

$$\det(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T - \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T) > 0, \quad (11.5)$$

$$\det(\mathbf{X}_i^2 - \mathbf{Z}_i^2) > 0, \quad (11.6)$$

przy czym każdy z nich dla $i = 1, 2, \dots, m$.

Dowód. Części (11.3) twierdzenia podanej przez Schura i Cohna nie będziemy dowodzić ze względu na znaczny stopień trudności. Pokażemy jedynie, że warunki (11.3), (11.5), (11.4) oraz (11.6) są równoważne.

Z ćwiczenia C.1.3 wynika, że

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & \mathbf{V}_i^T \end{bmatrix} &= \det \mathbf{V}_i \det(\mathbf{V}_i^T - \mathbf{Y}_i \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Y}_i^T) \\ &= \det(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T - \mathbf{V}_i \mathbf{Y}_i \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Y}_i^T) = \det(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T - \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T), \end{aligned}$$

ponieważ $\mathbf{V}_i \mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{V}_i$. Zatem warunek (11.3) jest równoważny (11.5).

Niech teraz

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

będą macierzami stopnia i . Oznaczając

$$\mathbf{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i^T & \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_i^T & \mathbf{Y}_i \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i & \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i & \mathbf{Y}_i \end{bmatrix},$$

zauważamy, że

$$\Lambda_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_i \end{bmatrix} \mathbf{Q}_i,$$

gdyż $\mathbf{X}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{V}_i^T$, $\mathbf{P}_i \mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i^T \mathbf{P}_i$, patrz także ćwiczenie 11.1.1. Zatem $\det \Lambda_i = \det \mathbf{Q}_i$. Stąd i z tożsamości

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{I}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i \end{bmatrix} \mathbf{Q}_i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & -\mathbf{I}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_i & -(\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i) \end{bmatrix}$$

wynika, że

$$\begin{aligned} \det \Lambda_i &= \det \mathbf{Q}_i = \det \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_i & -(\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i) \end{bmatrix} \\ &= (-1)^i \det(\mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i) \det(\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i), \end{aligned}$$

patrz ćwiczenie C.1.2. Ponieważ

$$\det \Lambda_i = (-1)^i \det \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & \mathbf{V}_i^T \end{bmatrix},$$

zatem warunki (11.3) i (11.4) są równoważne.

Przejdźmy do (11.6). Ponieważ

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i & \mathbf{X}_i \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_i \mathbf{X}_i & \mathbf{Z}_i \mathbf{P}_i \end{bmatrix},$$

więc

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_i \\ \mathbf{X}_i & -\mathbf{Z}_i \end{bmatrix} \Lambda_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i & \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i \mathbf{P}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_i^2 \mathbf{P}_i - \mathbf{Z}_i^2 \mathbf{P}_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_i^2 \mathbf{P}_i - \mathbf{Z}_i^2 \mathbf{P}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i & \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i \mathbf{P}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

W celu wykazania prawdziwości pierwszej równości skorzystaliśmy z tego, że zachodzi równość $\mathbf{X}_i \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_i \mathbf{P}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{0}$. Zatem, patrz ćwiczenie C.1.3,

$$(-1)^i \det \mathbf{X}_i \det \mathbf{P}_i \det \Lambda_i = \det(\mathbf{X}_i^2 \mathbf{P}_i - \mathbf{Z}_i^2 \mathbf{P}_i) \det \mathbf{X}_i,$$

przy czym $\det \mathbf{X}_i \neq 0$. Wynika stąd, że $(-1)^i \det \Lambda_i = \det(\mathbf{X}_i^2 - \mathbf{Z}_i^2)$, co kończy dowód równoważności warunków (11.3) i (11.6). ■

Uwaga 11.1.1. Zauważmy na koniec, że w dowodzie powyższego twierdzenia wykazaliśmy w istocie, że

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & \mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{Y}_i & \mathbf{V}_i^T \end{bmatrix} &= \det(\mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i) \det(\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i) \\ &= \det(\mathbf{X}_i^2 - \mathbf{Z}_i^2) = \det(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T - \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T), \end{aligned} \quad (11.8)$$

dla każdego i .

Przykład 11.1.1. Niech teraz $M(z) = 3z^2 + 5z - 2$. Zatem

$$\mathbf{X}_1 = [3], \mathbf{Z}_1 = [-2], \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^2 - \mathbf{Z}_1^2 &= 3^2 - (-2)^2 = 5, \\ \det(\mathbf{X}_2^2 - \mathbf{Z}_2^2) &= \det \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^2 \right) = -600. \end{aligned}$$

System jest zatem niestabilny. Pierwiastkami wielomianu są bowiem -2 oraz $1/3$.

Przykład 11.1.2. W celu zbadania stabilności systemu o wielomianie charakterystycznym $6z^2 + 7z + 2$, który ma pierwiastki $-1/2$ oraz $-2/3$, zastosujemy poszczególne warianty kryterium Schura–Cohna. Na początku ustalamy, że:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= [6], \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_1 = [2], \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_1 &= [6], \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_1 = [2], \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Warunek (11.3). Sprawdzając ten warunek, wyliczamy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{V}_1^T \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 32 > 0, \\ \det \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_2^T \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_2^T \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} = 240 > 0. \end{aligned}$$

Warunek (11.4). Teraz znajdujemy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1) &= 32 > 0, \\ \det(\mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_2)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Y}_2) &= \det \begin{bmatrix} 123 & -35 \\ 42 & -10 \end{bmatrix} = 240 > 0. \end{aligned}$$

Warunek (11.5). Wyliczamy kolejno:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^T - \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_1^T) &= 32 > 0, \\ \det(\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T - \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_2^T) &= \det \begin{bmatrix} 32 & 28 \\ 28 & 32 \end{bmatrix} = 240 > 0. \end{aligned}$$

Warunek (11.6). Jest oczywiste, że:

$$\mathbf{X}_1^2 - \mathbf{Z}_1^2 = 32 > 0,$$

$$\det(\mathbf{X}_2^2 - \mathbf{Z}_2^2) = \det \begin{bmatrix} 32 & 28 \\ 28 & 32 \end{bmatrix} = 240.$$

Każda wersja kryterium doprowadza oczywiście do tego samego wniosku, a mianowicie, że system jest stabilny. Weryfikacja warunku (11.3) jest najtrudniejsza ze względu na konieczność wyliczania wyznacznika macierzy wysokiego stopnia.

Przykład 11.1.3. Dla systemu o wielomianie charakterystycznym

$$z^2 + a_1 z + a_0 \tag{11.9}$$

wyliczamy:

$$\mathbf{X}_1 = [1], \mathbf{Z}_1 = [a_0], \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

System jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\mathbf{X}_1^2 - \mathbf{Z}_1^2) = 1 - a_0^2 > 0$$

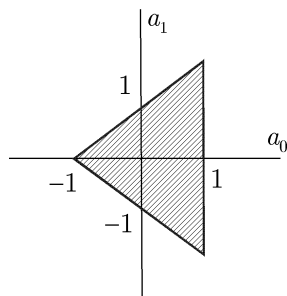
oraz

$$\det(\mathbf{X}_2^2 - \mathbf{Z}_2^2) = \det \begin{bmatrix} 1 - a_0^2 & a_1 - a_1 a_0 \\ a_1 - a_1 a_0 & 1 - a_0^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Ponieważ jako wartości własne macierzy $\mathbf{X}_2^2 - \mathbf{Z}_2^2$ znajdujemy $(1 - a_0)(1 + a_0 - a_1)$ oraz $(1 - a_0)(1 + a_0 + a_1)$, zatem

$$\det(\mathbf{X}_2^2 - \mathbf{Z}_2^2) = (1 - a_0)^2(1 + a_0 - a_1)(1 + a_0 + a_1),$$

patrz (C.6). System jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione nierówności $1 - a_0^2 > 0$ oraz $(1 + a_0 - a_1)(1 + a_0 + a_1) > 0$. Zbiór punktów (a_0, a_1) je spełniających pokazano na rys. 11.1.



Rys. 11.1. Zbiór punktów (a_0, a_1) , dla których system o wielomianie charakterystycznym $z^2 + a_1 z + a_0$ jest stabilny, przykłady 11.1.3 i 11.4.8

Ćwiczenie 11.1.1. Sprawdzić, że:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{P}_3 jest określone jak w (11.7), co oznacza, że prawostronne lub lewostronne mnożenie macierzy przez \mathbf{P}_3 jest przestawieniem odpowiednio kolumn lub wierszy.

11.2. Kryterium Jury'ego

Kryterium 11.1.1 można nieco uprościć. Okazuje się, że nie musimy obliczać wyznacznika stopnia m , a jedynie $1, \dots, m-1$, o czym stanowi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 11.2.1. *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$M(1) > 0, \quad (11.10)$$

$$(-1)^m M(-1) > 0 \quad (11.11)$$

oraz (11.4) lub (11.6), lub (11.5) zachodzi dla $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Dowód. Prawdziwość twierdzenia w odniesieniu do (11.4) wykazał Jury⁴. Część odnosząca się do (11.6) i (11.5) jest oczywistym wnioskiem, patrz uwaga 11.1.1. ■

Dowodząc twierdzenia podanego poniżej, Jury⁵ pokazał, że powyższy rezultat można jeszcze bardziej uprościć.

Twierdzenie 11.2.2 (Jury). *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione nierówności (11.10), (11.11) oraz (11.4) zachodzi dla*

$$i = \begin{cases} 1, 3, \dots, m-3, m-1, & \text{dla } m \text{ parzystego,} \\ 2, 4, \dots, m-3, m-1, & \text{dla } m \text{ nieparzystego.} \end{cases} \quad (11.12)$$

W świetle uwagi 11.1.1 poniższy wniosek jest oczywisty.

Wniosek 11.2.1. *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione nierówności (11.10) i (11.11) oraz (11.6) lub (11.5) zachodzi dla i określonego jak w (11.12).*

Po dalszej i głębszej analizie, patrz [8], można otrzymać rezultat podany poniżej, który jest znany jako kryterium Jury'ego. Trzeba jednak przyznać, twierdzenie 11.2.2 jest bardziej poręczne, gdyż, dla każdego i , wymaga wyliczenia tylko jednego wyznacznika.

Twierdzenie 11.2.3 (Jury). *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione nierówności (11.10), (11.11) oraz*

$$\det(\mathbf{V}_i + \mathbf{Z}_i) > 0, \quad \det(\mathbf{V}_i - \mathbf{Z}_i) > 0$$

zachodzą dla i określonego jak w (11.12).

⁴E.J. Jury, *Additions to "Notes on the stability criterion for linear discrete systems"*, IRE Transactions on Automatic Control, 1961, AC-6, 342–343.

⁵E.J. Jury, *On the evaluation of the stability determinants in linear discrete systems*, IRE Transactions on Automatic Control, 1962, AC-7, 51–55.

Przykład 11.2.1. Dla wielomianu charakterystycznego $36z^4 + 12z^3 - 17z^2 - 3z + 2$ mamy $M(1) = 30$ oraz $M(-1) = 30$. Ponadto:

$$\mathbf{V}_1 = [36], \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 36 & 12 & -17 \\ 0 & 36 & 12 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_1 = [2], \mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} -17 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że:

$$\det(\mathbf{V}_3 + \mathbf{Z}_3) = \det \begin{bmatrix} 19 & 9 & -15 \\ -3 & 38 & 12 \\ 2 & 0 & 36 \end{bmatrix} = 28320 > 0,$$

$$\det(\mathbf{V}_3 - \mathbf{Z}_3) = \det \begin{bmatrix} 53 & 15 & -19 \\ 3 & 34 & 12 \\ -2 & 0 & 36 \end{bmatrix} = 61600 > 0,$$

$\mathbf{V}_1 + \mathbf{Z}_1 = 36$, $\mathbf{V}_2 + \mathbf{Z}_2 = 34$. System jest więc stabilny.

11.3. Kryterium Michajłowa

Omówimy teraz kryterium Michajłowa, które jest naturalną adaptacją kryterium odnoszącego się do systemów ciągłych, patrz punkt 5.1.4. Jest ono natury częstotliwościowej.

Przypominamy, że badamy stabilność systemu o równaniu charakterystycznym (11.1). Zakładamy przy tym, że $a_m > 0$. Zajmiemy się teraz funkcją $M(e^{j\omega})$ dla $\omega \in [0, \pi]$ i powiążemy jej własności z położeniem pierwiastków tego równania. Ponieważ $M(z)$ i $e^{j\omega}$ są funkcjami ciągłymi swoich argumentów, zatem, na domkniętym odcinku $[0, \pi]$, także $M(e^{j\omega})$ jest funkcją ciągłą argumentu ω . Zaczniemy od poniższego lematu:

Lemat 11.3.1. *Wielomian $M(z)$ nie ma żadnego pierwiastka na okręgu jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy $M(e^{j\omega}) \neq 0$ dla wszystkich $\omega \in [0, \pi]$.*

Założymy teraz, że wielomian $M(z)$ nie ma żadnego pierwiastka na okręgu jednostkowym i zajmujemy się własnościami funkcji $\arg M(e^{j\omega})$. Rzeczywiste pierwiastki wielomianu oznaczmy w tym celu jako ξ_1, \dots, ξ_p , a pary zespolone jako $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, co oznacza, że $p + 2q = m$. Zatem

$$M(z) = a_m \prod_{i=1}^p (z - \xi_i) \prod_{i=1}^q (z - \eta_i)(z - \bar{\eta}_i).$$

Z uwagi na to, że $M(e^{j\omega}) \neq 0$ dla wszystkich $\omega \in [0, \pi]$, $\arg M(e^{j\omega})$ jest funkcją ciągłą na tym odcinku. Możemy zatem zdefiniować następujący funkcjonal będący przyrostem jej argumentu na odcinku $\omega \in [0, \pi]$:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg M(e^{j\omega}) = \arg M(e^{j\pi}) - \arg M(e^{j0}).$$

Pamiętając, że $a_m > 0$, możemy zatem napisać

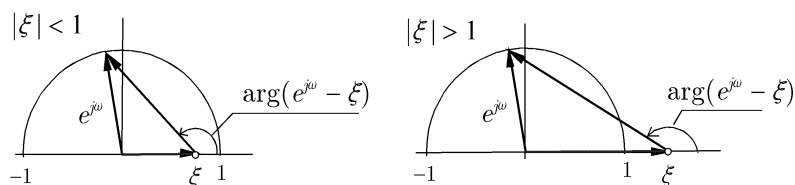
$$\arg M(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^p \arg(e^{j\omega} - \xi_i) + \sum_{i=1}^q \arg(e^{j\omega} - \eta_i)(e^{j\omega} - \bar{\eta}_i).$$

Rozpatrzmy teraz poszczególne składniki sum w tym wyrażeniu. Dla rzeczywistego pierwiastka ξ otrzymujemy

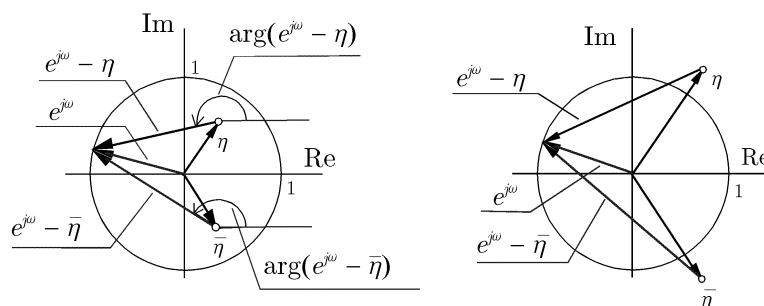
$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg(e^{j\omega} - \xi) = \begin{cases} \pi, & \text{dla } |\xi| < 1, \\ 0, & \text{dla } |\xi| > 1, \end{cases}$$

patrz rys. 11.2. Dla pary pierwiastków zespolonych $(\eta, \bar{\eta})$ natomiast, patrz rys. 11.3,

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) = \begin{cases} 2\pi, & \text{dla } |\eta| < 1, \\ 0, & \text{dla } |\eta| > 1. \end{cases}$$



Rys. 11.2. $\arg(e^{j\omega} - \xi)$, ξ rzeczywiste poza okręgiem jednostkowym



Rys. 11.3. $\arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$, η zespolone poza okręgiem jednostkowym

Oznaczając zatem przez m_- oraz m_+ liczbę pierwiastków wielomianu $M(z)$ leżących wewnątrz i na zewnątrz okręgu jednostkowego, możemy podać następujący lemat.

Lemat 11.3.2. Niech $a_m > 0$. Jeśli wielomian $M(z)$ nie ma żadnego pierwiastka na okręgu jednostkowym, to

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg M(e^{j\omega}) = (m_- - m_+)\pi.$$

Bezpośrednim wnioskiem z ostatnich dwóch lematów jest poniższe twierdzenie, nazywane kryterium Michajłowa.

Twierdzenie 11.3.1 (Michajłow). Niech $a_m > 0$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

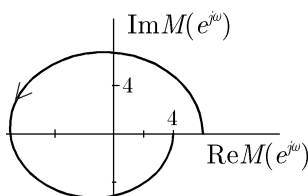
$$M(e^{j\omega}) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \pi] \quad (11.13)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} M(e^{j\omega}) = m\pi. \quad (11.14)$$

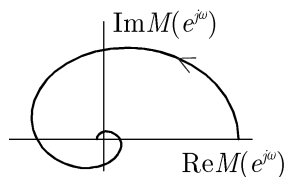
Powyższe twierdzenie jest dyskretnym odpowiednikiem kryterium Michajłowa znanego już nam w wersji ciągłej. Podobnie jak tamto, podaje ono warunek, który jest konieczny i wystarczający zarazem.

Podamy teraz geometryczną interpretację kryterium. Graficzne przedstawienie funkcji $M(e^{j\omega})$ dla $\omega \in [0, \pi]$ nazywa się dyskretnym wykresem Michajłowa. Przykład, dla wielomianu $M(z) = 6z^2 + z - 1$, pokazano na rys. 11.4. Wykres ten nie przechodzi przez punkt $z = 0$, co oznacza, że warunek (11.13) jest spełniony. Ponadto $\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} M(e^{j\omega}) = 2\pi$.



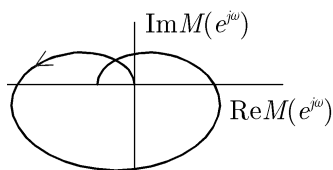
Rys. 11.4. Przykład dyskretnego wykresu Michajłowa

Przykład 11.3.1. Dla $M(z) = 12z^3 + 16z^2 + 7z + 1$, $\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} M(e^{j\omega}) = 3\pi$, patrz rys. 11.5. System jest stabilny.



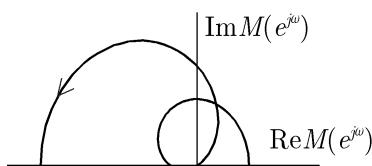
Rys. 11.5. Wykres Michajłowa, przykład 11.3.1

Przykład 11.3.2. Dla $M(z) = 4z^3 - 3z - 1$ wykres Michajłowa przedstawiony na rys. 11.6 przechodzi przez punkt $z = 0$. System nie jest więc stabilny.



Rys. 11.6. Wykres Michajłowa, przykład 11.3.2

Przykład 11.3.3. Dla wielomianu charakterystycznego $M(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$ stwierdzamy, że krzywa $M(j\omega)$ przechodzi przez punkt $z = 0$, patrz rys. 11.7. System jest niestabilny.



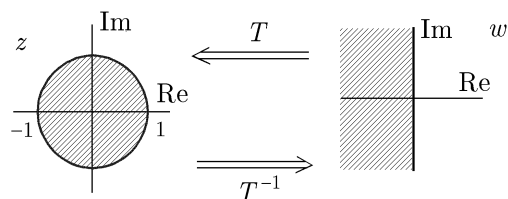
Rys. 11.7. Wykres Michajłowa, przykład 11.3.3

11.4. Przekształcenie półpłaszczyzny w koło

Jak już wiemy, aby stwierdzić, czy system jest stabilny, wystarczy zbadać, czy wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego $M(z) = 0$ spełniają warunek (11.2), tzn. czy leżą wewnątrz koła jednostkowego, czyli koła o promieniu 1 i środku w punkcie $z = 0$. Można w tym celu posłużyć się odwzorowaniem $z = T(w)$, zdefiniowanym następująco⁶, patrz także [8]:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}. \quad (11.15)$$

Jest to szczególny przypadek tzw. odwzorowania homograficznego (tzn. takiego, że $z = (aw + b)/(cw + d)$, gdzie $ad - bc \neq 0$). Przekształca ono całą płaszczyznę domkniętą (tzn. uzupełnioną o punkt $w = \infty$) w nią samą.

Rys. 11.8. Transformacje T i T^{-1}

⁶P.A. Samuelson, *Conditions that the roots of a polynomial be less than unity in absolute value*, Am. Math. Statist., 1941, 12, 360–364.

Jak nietrudno sprawdzić, patrz także rys. 11.8, $z = T(w)$ przekształca:

- oś $\text{Im } w$ w okrąg $|z| = 1$, z którego usunięto punkt $z = 1$,
- punkt $w = \infty$ w punkt $z = 1$,
- lewą półpłaszczyznę $\text{Re } w < 0$ we wnętrze koła jednostkowego, czyli zbiór punktów z , dla których $|z| < 1$,
- prawą półpłaszczyznę $\text{Re } w > 0$ w obszar leżący na zewnątrz koła jednostkowego, czyli zbiór punktów z takich, że $|z| > 1$.

Z kolei jego odwrotność $w = T^{-1}(z)$, czyli

$$w = \frac{z + 1}{z - 1},$$

przekształca:

- okrąg $|z| = 1$, z którego usunięto punkt $z = 1$, w oś $\text{Im } w$,
- punkt $z = 1$ w punkt $w = \infty$,
- wnętrze koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę,
- obszar leżący na zewnątrz koła jednostkowego w prawą półpłaszczyznę.

Powyższe własności sugerują, że aby zweryfikować, czy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego

$$M(z) = 0, \quad (11.16)$$

gdzie $M(z)$ jest wielomianem jak w (11.1), spełniają nierówności (11.2), można sprawdzić, czy wszystkie pierwiastki równania

$$M\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right) = 0,$$

a raczej

$$(w - 1)^m M\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right) = 0, \quad (11.17)$$

leżą w lewej półpłaszczyźnie, który to problem można rozwiązać, stosując kryterium Routha–Hurwitza, Hurwitza czy Michajłowa.

W postępowaniu takim jest ukryte jednak pewne niebezpieczeństwo, co pokazuje przykład, w którym $M(z) = 2z^2 - 3z + 1 = (z - 1)(2z - 1)$, co oznacza, że wielomian ten ma pierwiastek $z_1 = 1/2$ leżący w kole jednostkowym oraz drugi $z_2 = 1$. Podstawienie (11.15) doprowadza nas do równania $2w + 6 = 0$ o jedynym rozwiązaniu $w_1 = -3$. Leży ono w lewej półpłaszczyźnie, a odpowiadające mu z_1 w kole jednostkowym. Rozwiązanie $z_2 = 1$ nie ma natomiast swojego odpowiednika.

Oznacza to, że przedstawiony sposób postępowania może zawieść, gdy równanie (11.16) ma pierwiastek w punkcie $z = 1$. Aby bliżej przyjrzeć się problemowi, założymy, że $z_1 = 1$ oraz że pozostałe pierwiastki są różne od 1. Ponieważ

$$M(z) = (z - z_1) \prod_{i=2}^m (z - z_i),$$

a zatem (11.16) można więc zapisać jako

$$(z - z_1) \prod_{i=2}^m (z - z_i) = 0.$$

Podstawienie (11.15) doprowadza do równania

$$\left(\frac{w+1}{w-1} - z_1\right) \prod_{i=2}^m \left(\frac{w+1}{w-1} - z_i\right) = 0,$$

czyli, z uwagi na to, że $z_1 = 1$,

$$\frac{2}{w-1} \prod_{i=2}^m \left(\frac{(1-z_i)w+1+z_i}{w-1}\right) = 0.$$

Mnożąc następnie obydwie strony przez $(w-1)^m$, dostajemy ostatecznie równanie

$$2 \prod_{i=2}^m [(1-z_i)w+1+z_i] = 0 \quad (11.18)$$

o $m-1$ pierwiastkach, a mianowicie:

$$w_i = \frac{z_i+1}{z_i-1} = T(z_i), \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

Ze względu na własności odwzorowań T oraz T^{-1} , $|z_i| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re} w_i < 0$, $i = 2, \dots, m$. Pierwiastek z_1 nie ma jednak swojego odpowiednika wśród rozwiązań równania (11.18), a to dlatego, że punktowi $z = 1$ odpowiada $w = \infty$. Można powiedzieć, że przechodząc od równania (11.16) do (11.18), niejako zgubiliśmy pierwiastek leżący w punkcie $z = 1$, a on właśnie jest przyczyną tego, że system nie jest stabilny. Podobnie przedstawia się problem, gdy pierwiastek ten jest wielokrotny. Wykazaliśmy więc następujące własności:

Własność 11.4.1. *Jeśli równanie (11.16) jest stopnia m , to równanie (11.18) ma stopień $m-k$, gdzie k jest krotnością pierwiastka $z = 1$ równania (11.16).*

Własność 11.4.2. *Jeśli równanie (11.16) nie ma żadnego rozwiązania w punkcie $z = 1$, to wszystkie jego rozwiązania leżą wewnątrz koła jednostkowego wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie rozwiązania równania (11.18) leżą w lewej półpłaszczyźnie.*

Nietrudno jednak zabezpieczyć się przed groźącym błędem. Zauważmy bowiem, że $M(1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 1$ jest pierwiastkiem równania (11.16). W rezultacie dochodzimy do ostatecznego wniosku:

Twierdzenie 11.4.1. *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $M(1) \neq 0$ oraz wszystkie rozwiązania równania (11.17) leżą w lewej półpłaszczyźnie.*

Do sprawdzenia, czy jest spełniona druga część warunku podanego w powyższym twierdzeniu, można zastosować kryteria Routha–Hurwitza, Hurwitza lub Michajłowa, podane podczas analizy systemów ciągłych.

Przykład 11.4.1. Wielomian $M(z) = 6z^2 - z - 1 = (3z + 1)(2z - 1)$ ma pierwiastki $z_1 = 1/2$ oraz $z_2 = -1/3$. Dokonując podstawienia (11.15), otrzymujemy równanie $4w^2 + 14w + 6 = 0$ o rozwiązaniach $w_1 = -3, w_2 = -1/2$. Jest przy tym oczywiste, że $z_1 = (w_1 + 1)/(w_1 - 1)$ oraz $z_2 = (w_2 + 1)/(w_2 - 1)$. Stwierdzamy zatem, że pierwiastki z_1, z_2 leżą w kole jednostkowym, natomiast pierwiastki w_1, w_2 w lewej półpłaszczyźnie.

Przykład 11.4.2. Równanie $2z^2 + 3z - 2 = 0$ ma dwa pierwiastki $z_1 = 1/2$ oraz $z_2 = -2$. Podstawienie (11.15) doprowadza do równania $3w^2 + 8w - 3 = 0$ o rozwiązaniach $w_1 = -3, w_2 = 1/3$. Pierwiastek z_1 leży w kole jednostkowym, a odpowiadający mu pierwiastek w_1 w lewej półpłaszczyźnie. Drugi, czyli z_2 , znajduje się poza kołem jednostkowym, a związany z nim w_2 w prawej półpłaszczyźnie.

Kryterium Routha–Hurwitza

Do zbadania stabilności systemu wykorzystamy twierdzenie 11.4.1, a do sprawdzenia drugiej części jego warunku zastosujemy kryterium Routha–Hurwitza, tzn. twierdzenie 5.1.2. Zwracamy uwagę na to, że – podobnie jak oryginalne kryterium Routha–Hurwitza także i takie postępowanie sprawdza, czy spełniony jest warunek wystarczający.

Przykład 11.4.3. Dla $M(z) = (z + 2)(2z - 1) = 2z^2 + 3z - 2$, mamy $M(1) = 5 \neq 0$. Podstawienie (11.15) prowadzi od równania $2z^2 + 3z - 2 = 0$ do $3w^2 + 8w - 3 = 0$, dla którego

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

oraz $\Delta_1 = 8, \Delta_2 = -24$. Zatem $V(3, 8, -24/8) = 1$, skąd, na mocy kryterium Routha–Hurwitza, wynika, że jeden pierwiastek równania $3w^2 + 8w - 3 = 0$ leży w prawej półpłaszczyźnie, co jest równoważne z tym, że jeden pierwiastek równania $M(z) = 0$ leży na zewnątrz koła jednostkowego. Stwierdzamy zatem, że system jest niestabilny.

Przykład 11.4.4. Dla $M(z) = 3z^2 - 2z + 3$ spostrzegamy, że $M(1) = 4 \neq 1$. Podstawienie (11.15) doprowadza do równania $w^2 + 2 = 0$. Kryterium Routha–Hurwitza nie wypowiada się na temat stabilności.

Kryterium Hurwitza

Sposób wykorzystania kryterium Hurwitza, czyli twierdzenia 5.1.3, pokażemy na przykładach. Ponieważ kryterium to określa warunek konieczny i wystarczający, zatem również postępowanie w nich przedstawione sprawdza warunek konieczny i zarazem wystarczający.

Przykład 11.4.5. Niech $M(z) = 24z^3 + 10z^2 - 3z - 1$. Jest oczywiste, że $M(1) = 30 \neq 0$. Podstawienie (11.15) prowadzi teraz do równania $15w^3 + 44w^2 + 31w + 6 = 0$. Aby sprawdzić, czy wszystkie jego rozwiązania leżą w lewej półpłaszczyźnie, tworzymy macierz

Hurwitza

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 44 & 6 & 0 \\ 15 & 31 & 0 \\ 0 & 44 & 6 \end{bmatrix}$$

i następnie znajdujemy jej główne podwyznaczniki, a mianowicie: $\Delta_1 = 44$, $\Delta_2 = 1274$ oraz $\Delta_3 = 7644$. System jest zatem stabilny.

Przykład 11.4.6. Niech teraz $M(z) = 6z^3 - 5z^2 - 2z + 1$. Ponieważ $M(1) = 0$, więc system nie jest stabilny.

Przykład 11.4.7. Niech $M(z) = 6z^3 + 13z^2 + z - 2$. Po pierwsze, $M(1) = 18 \neq 0$. Po drugie, podstawiając (11.15), otrzymujemy równanie $18w^3 + 36w^2 - 2w - 4 = 0$. Macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 36 & -4 & 0 \\ 18 & -2 & 0 \\ 0 & 36 & -4 \end{bmatrix}.$$

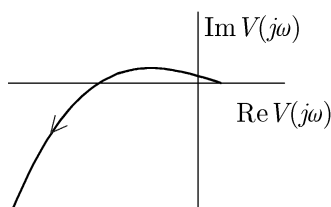
Ponieważ $\Delta_2 = 0$, a zatem system nie jest stabilny.

Przykład 11.4.8. Dla systemu o wielomianie charakterystycznym (11.9), podstawienie (11.15) prowadzi do równania $(1 + a_1 + a_0)w^2 + (2 - 2a_0)w - a_1 + a_0 + 1 = 0$. Z kryterium Hurwitza wynika, że jego pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie, czyli system jest stabilny, wtedy i tylko wtedy, gdy $1 + a_1 + a_0 > 0$, $1 - a_0 > 0$ oraz $a_0 - a_1 + 1 > 0$. Zbiór punktów (a_0, a_1) spełniających te nierówności przedstawia rys. 11.1, patrz także przykład 11.5.1.

Kryterium Michajłowa

Teraz również wykorzystamy twierdzenie 11.4.1, lecz tym razem do sprawdzenia drugiej części jego warunku zastosujemy kryterium Michajłowa, czyli twierdzenie 5.1.5. Nie trzeba dodawać, że otrzymujemy w ten sposób kryterium podające warunek konieczny i wystarczający.

Przykład 11.4.9. Dla $M(z) = 18z^3 - 9z^2 - 2z + 1$ wyliczamy $M(1) = 8 \neq 0$. Podstawienie (11.15) doprowadza do równania $V(w) = 0$, w którym $V(w) = 8w^3 + 44w^2 + 68w + 24$. Wykres Michajłowa wielomianu $V(w)$, tzn. wykres $V(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$, jest pokazany na rys. 11.9. Wynika z niego, że $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} V(j\omega) = 3\pi/2$, co prowadzi do wniosku, że system jest stabilny.



Rys. 11.9. Wykres Michajłowa, przykład 11.4.9

11.5. Inne kryteria

Oprócz rezultatów dotyczących położenia pierwiastków wielomianu algebraicznego podanych wcześniej, znane są również inne, które można wykorzystać przy badaniu stabilności. Podają one zazwyczaj warunki, które są tylko wystarczające lub tylko konieczne. Niektóre podajemy poniżej.

Twierdzenie 11.5.1. *Niech $a_m = 1$. Jeśli*

$$|a_0| + \dots + |a_{m-1}| < 1,$$

to system jest stabilny.

Dowód. Z równania $y_n + a_{m-1}y_{n-1} + \dots + a_0y_{n-m} = 0$ wynika następująca nierówność: $|y_n| \leq \rho \max(|y_{n-1}|, \dots, |y_{n-m}|)$, gdzie $\rho = \sum_{i=0}^{m-1} |a_i| < 1$. Po wstawieniu w równaniu tym $n+1$ w miejsce n , wnioskujemy w podobny sposób, że ma miejsce nierówność $|y_{n+1}| \leq \rho \max(|y_n|, |y_{n-1}|, \dots, |y_{n-m+1}|) \leq \rho \max(|y_n|, \max(|y_{n-1}|, \dots, |y_{n-m}|))$, której prawa strona nie jest większa niż $\rho \max(|y_{n-1}|, \dots, |y_{n-m}|)$. Na podobnej zasadzie, $|y_{n+m-1}| \leq \rho \max(|y_{n-1}|, \dots, |y_{n-m}|)$. Ostatecznie więc $\max(|y_{n+m-1}|, \dots, |y_n|) \leq \rho \max(|y_{n-1}|, \dots, |y_{n-m}|)$ i w rezultacie $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, co kończy dowód. ■

Argumentacja, którą zastosowaliśmy w dowodzie kryterium Michajłowa, pozwala sformułować konieczny warunek stabilności, co podajemy w formie twierdzenia⁷, patrz [8].

Twierdzenie 11.5.2. *Niech $a_m = 1$. Jeśli, dla dowolnego k , gdzie $1 \leq k \leq m$,*

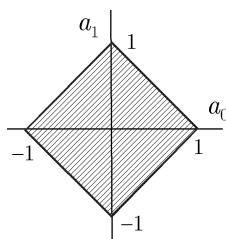
$$|a_0| + \dots + |a_m| < 2|a_k|,$$

to system jest niestabilny.

Dowód. Oznaczmy $\varphi(z) = a_k z^k$ i $\psi(z) = \sum_{i=0, i \neq k}^m a_i z^i$, gdzie $1 \leq k \leq m$. Z założonej nierówności wynika następujący ciąg relacji: $|\psi(e^{j\omega})| = |\sum_{i=1, i \neq k}^m a_i e^{j\omega}| \leq \sum_{i=1, i \neq k}^m |a_i| < |a_k| = |\varphi_k(e^{j\omega})|$. Zatem $|\psi(e^{j\omega})/\varphi(e^{j\omega})| < 1$, skąd wynika z kolei, że jest prawdziwa równość $\Delta \arg_{0 \leq \omega < 2\pi} (1 + \psi_k(e^{j\omega})/\varphi(e^{j\omega})) = 0$. Ponadto $\Delta \arg_{0 \leq \omega < 2\pi} \varphi(e^{j\omega}) = 2\pi k$. Zatem $\Delta \arg_{0 \leq \omega < 2\pi} M(e^{j\omega}) - \Delta \arg_{0 \leq \omega < 2\pi} \varphi(e^{j\omega}) = \Delta \arg_{0 \leq \omega < 2\pi} (1 + \psi(e^{j\omega})/\varphi(e^{j\omega})) = 0$, a to z uwagi na to, że $M(z)/\varphi(z) = 1 + \psi(z)/\varphi(z)$. Z równości tej wynika, że $\Delta \arg_{0 \leq \omega < 2\pi} M(e^{j\omega}) = 2k\pi > 0$. System jest zatem niestabilny. ■

Przykład 11.5.1. Z twierdzenia 11.5.1 wynika, że system o wielomianie charakterystycznym (11.9) jest stabilny, jeśli $|a_0| + |a_1| < 1$. Zbiór punktów (a_0, a_1) spełniających warunek pokazano na rys. 11.10, patrz także rys. 11.1 i odpowiadające mu przykłady.

⁷A. Cohn, *Über die Anzahl der Wurzeln einer Algebraischen Gleichung in einem Kreise*, Math., 1922, 14, 110–148.



Rys. 11.10. Zbiór punktów (a_0, a_1) , dla których system jest stabilny, przykład 11.5.1

Przykład 11.5.2. Z twierdzenia 11.5.2 wynika, że system o wielomianie charakterystycznym (11.9) jest niestabilny, jeśli $1 + |a_0| < |a_1|$.

Przykład 11.5.3. Niech $a_m = 1$. Można pokazać, że jeśli:

- a) $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < 1$, to system jest stabilny,
 - b) $1 < a_{m-1} < \dots < a_1 < a_0$, to system jest niestabilny⁸, patrz [8].
- Odwołując się do uwagi C.5.1, wyjaśnić związek pomiędzy a) oraz b).

Przykład 11.5.4. Niech $a_m = 1$. Jest oczywiste, że $a_0 = \prod_{i=1}^m z_i$. Jeśli więc $1 \leq |a_0|$, to system jest niestabilny, bowiem przynajmniej jeden pierwiastek leży na zewnątrz okręgu jednostkowego.

Przykład 11.5.5. Niech $a_m = 1$. Jeśli $1 + \sum_{j=0}^{m-2} |a_j| < |a_{m-1}|$, to system jest niestabilny. W szczególności, jeśli $1 + |a_0| < |a_1|$, to system o wielomianie charakterystycznym (11.9) jest niestabilny. Z twierdzenia Gerszgorina C.5.1 i wniosku C.5.1 wynika bowiem, że koła $\{z; |z| \leq 1\}$ oraz $\{z; |z + a_{m-1}| \leq \sum_{i=1}^{m-2} |a_i|\}$ nie mają ani jednego punktu wspólnego. Zatem w drugim leży dokładnie jeden pierwiastek wielomianu, a jego odległość od początku układu współrzędnych jest większa od 1.

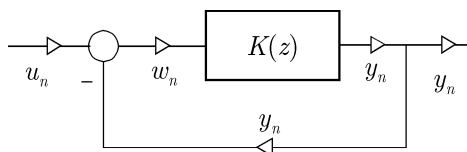
Ćwiczenie 11.5.1. Niech $a_m = 1$. Korzystając z wyników ćwiczenia C.5.4, sprawdzić, że wszystkie bieguny transmitancji spełniają nierówności $|z_i| \leq \min(1, \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|)$ oraz $|z_i| \leq \min(|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{m-1}|)$.

Ćwiczenie 11.5.2. Niech $a_m = 1$. Wykazać, że jeśli system jest stabilny, to zachodzą nierówności $0 < M(1) \leq 2^m$, $0 < (-1)^m M(-1) \leq 2^m$.

11.6. System ze sprzężeniem zwrotnym, kryterium Nyquista

Przejdziemy teraz do dyskretnej wersji kryterium Nyquista. Służy ono do badania stabilności systemów ze sprzężeniem zwrotnym, tzn. systemów o strukturze pokazanej na rys. 11.11.

⁸O. Perron, *Algebra*. Bd. 2. *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Walter de Gruyter, Berlin 1951.



Rys. 11.11. System z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

Ponieważ argumentacja jest bardzo podobna do tej, którą przeprowadziliśmy wcześniej, w części dotyczącej systemów z czasem ciągłym, ograniczymy zatem się jedynie do ostatecznych rezultatów. Przypominamy jednak, że transmitancją systemu otwartego jest

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

natomiast zamkniętego

$$K_Z(z) = \frac{K(z)}{1 + K(z)} = \frac{L(z)}{L(z) + M(z)}.$$

Zatem

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} [L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})] - \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} M(e^{j\omega}).$$

Z kryterium Michajłowa wynika, że badany system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} [L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})] = \pi \deg[L + M].$$

Argumentując jak w przypadku systemów ciągłych, nietrudno teraz wykazać prawdziwość wszystkich podanych poniżej rezultatów. Każdy z nich dotyczy innego położenia biegunów transmitancji systemu otwartego. W pierwszej sytuacji system otwarty jest stabilny, co oznacza, że leżą one w kole jednostkowym. W drugiej jego transmitancja ma biegun w punkcie $z = 1$. W kolejnej – bieguny mogą leżeć na zewnątrz koła jednostkowego. Na końcu rozpatrujemy przypadek, w którym transmitancja układu otwartego ma biegun na okręgu jednostkowym.

System otwarty stabilny

Zacniemy od najprostszej sytuacji, tzn. założymy, że system otwarty jest stabilny, co oznacza, że wszystkie bieguny jego transmitancji leżą w kole jednostkowym. Ponieważ w sytuacji takiej $\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} M(e^{j\omega}) = m\pi$, jest więc prawdziwe następujące twierdzenie:

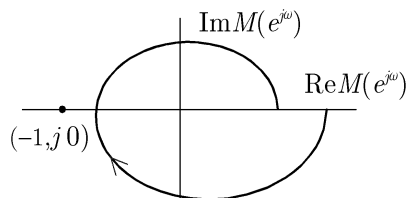
Twierdzenie 11.6.1 (Nyquist). Niech $a_m > 0$ i $l < m$. Niech system otwarty będzie stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + K(e^{j\omega}) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \pi] \quad (11.19)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = 0.$$

Przykład 11.6.1. Niech $K(z) = 5/(2z - 1)(3z + 1)$. Ponieważ charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego ma kształt jak na rys. 11.12, system zamknięty więc jest stabilny.



Rys. 11.12. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 11.6.1

System otwarty ma bieguny w punkcie $z = 1$

Dla sytuacji, w której wielomian $M(z)$ ma pierwiastek w punkcie $z = 1$, modyfikujemy nieco pojęcie przyrostu argumentu funkcji $M(e^{j\omega})$. Teraz bowiem

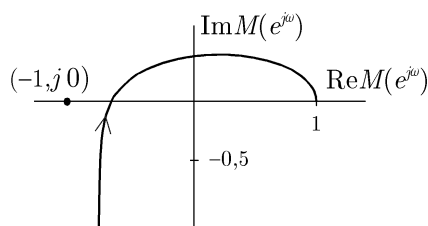
$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg M(e^{j\omega}) = \arg M(e^{j\pi}) - \lim_{\omega \rightarrow 0} \arg M(e^{j\omega}).$$

Twierdzenie 11.6.2 (Nyquist). Niech $a_m > 0$ i $l < m$. Niech transmitancja $K(z)$ systemu otwartego ma m_1 -krotny biegun w punkcie $z = 1$, a wszystkie pozostałe wewnątrz koła jednostkowego. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (11.19) oraz

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg [1 + K(e^{j\omega})] = m_1 \frac{\pi}{2}.$$

Dowód. W celu wykazania prawdziwości tej wersji kryterium, wystarczy jedynie zauważyć, że $\Delta_{0 < \omega < \pi} \arg M(e^{j\omega}) = (m - m_1/2)\pi$. ■

Przykład 11.6.2. Dla $K(z) = 2/(z - 1)(2z + 1)$ charakterystykę amplitudowo-fazową pokazano na rys. 11.13. System zamknięty jest zatem stabilny.



Rys. 11.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 11.6.2

System otwarty niestabilny

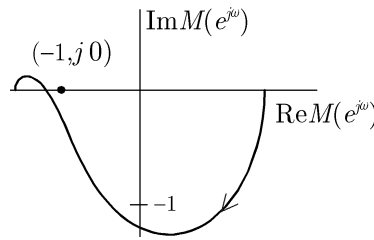
Omówimy kolejną sytuację. System otwarty jest teraz niestabilny. Zakładamy przy tym, że jego transmitancja ma bieguny wewnątrz i na zewnątrz okręgu jednostkowego. Żaden biegun nie leży jednak na samym okręgu. O stabilności systemu zamkniętego wypowiada się poniższe kryterium.

Twierdzenie 11.6.3 (Nyquist). *Niech $a_m > 0$ i $l < m$. Niech ponadto transmitancja $K(z)$ systemu otwartego ma wszystkie bieguny w kole jednostkowym z wyjątkiem m_+ biegunów na zewnątrz. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (11.19) oraz*

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \pi} \arg [1 + K(e^{j\omega})] = m_+ \pi.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\Delta_{0 < \omega < \pi} M(e^{j\omega}) = (m - m_+) \pi$. ■

Przykład 11.6.3. Niech teraz $K(z) = 4/(z+2)(2z-1)$ będzie transmitancją systemu otwartego. Z rys. 11.14 i przedstawionej powyżej wersji kryterium Nyquista wynika, że system zamknięty nie jest stabilny.



Rys. 11.14. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 11.6.3

System otwarty ma bieguny zespolone na okręgu $|z| = 1$

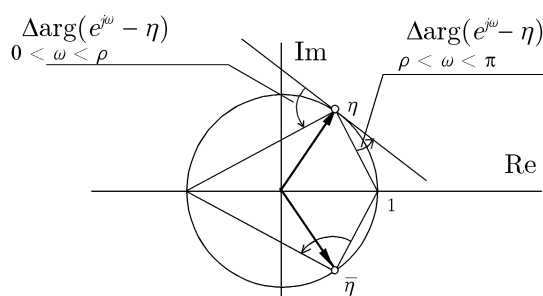
Wśród różnych biegunów, transmitancja systemu otwartego ma teraz parę biegunów zespolonych $(\eta, \bar{\eta})$, przy czym $\text{Im} \eta \neq 0$, na okręgu jednostkowym. Niech $\rho = \arg \eta$, $0 < \rho < \pi$. Oznaczając $\eta = e^{j\rho}$, zauważamy, że funkcja $\arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$, czyli $\arg(e^{j\omega} - e^{j\rho})(e^{j\omega} - e^{-j\rho})$, jest ciągła na dwóch otwartych odcinkach $(0, \rho)$ oraz (ρ, π) . Zatem, korzystając z rysunku 11.15, łatwo stwierdzamy, że

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) + \Delta_{\rho < \omega < \pi} \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) = \pi.$$

Wynika stąd, że

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg M(e^{j\omega}) + \Delta_{\rho < \omega < \pi} \arg M(e^{j\omega}) = (m - 1)\pi,$$

dzięki czemu możemy podać odpowiednią wersję kryterium Nyquista dostosowaną do własności systemu otwartego.

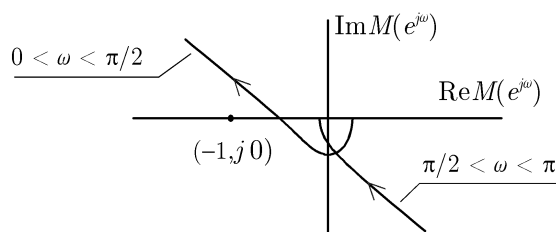
Rys. 11.15. $\Delta \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$, $(\eta, \bar{\eta})$ na okręgu jednostkowym

Twierdzenie 11.6.4 (Nyquist). Niech $a_m > 0$ i $l < m$. Niech ponadto transmitancja $K(z)$ systemu otwartego ma wszystkie bieguny w kole jednostkowym z wyjątkiem jednokrotnej pary na okręgu jednostkowym. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (11.19) oraz

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \rho} [1 + K(e^{j\omega})] + \Delta \arg_{\rho < \omega < \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = \pi.$$

Podany rezultat zilustrujemy przykładem, w którym transmitancja systemu otwartego ma parę biegunów urojonych $(-j, j)$.

Przykład 11.6.4. Niech teraz $K(z) = 1/2(z^2 + 1)(2z - 1)$. Transmitancja ma parę biegunów urojonych $(j, -j)$. Wykres funkcji $K(e^{j\omega})$ składa się z dwóch gałęzi, patrz rys. 11.16. Odpowiadają one zmianom ω w przedziałach $(0, \pi/2)$ oraz $(\pi/2, \pi)$. Zatem $\Delta \arg_{0 < \omega < \pi/2} [1 + K(e^{j\omega})] + \Delta \arg_{\pi/2 < \omega < \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = \pi$. System zamknięty jest więc stabilny.



Rys. 11.16. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 11.6.4

Rozdział 12

Równanie stanu systemu dyskretnego

12.1. Wprowadzenie

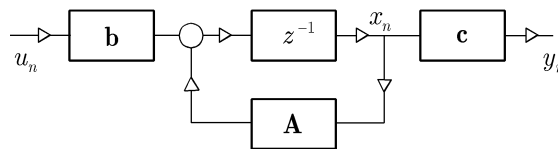
Omówimy teraz jeszcze jeden opis, a mianowicie równanie stanu

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{b}u_{n-1}, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n, \end{cases} \quad (12.1)$$

w którym \mathbf{x}_n jest wektorem stanu w chwili n . Wymiarem wektora jest k . Zatem \mathbf{A} jest macierzą kwadratową stopnia k , natomiast \mathbf{b} oraz \mathbf{c} wektorami o wymiarze k . Opis utożsamić można zatem z trójką $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Schemat blokowy odpowiadający temu równaniu przedstawiono na rys. 12.1. Blok oznaczony jako z^{-1} wykonuje operację opóźnienia o 1. Zauważmy jeszcze, że

$$y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{b} u_i,$$

gdzie \mathbf{x}_0 jest stanem początkowym.



Rys. 12.1. Schemat blokowy równań stanu (12.1); z^{-1} oznacza opóźnienie o 1

Podstawienie $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, do (12.1) doprowadza do nowego równania

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n &= \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{Tb}u_{n-1}, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_n, \end{cases} \quad (12.2)$$

w którym stanem jest \mathbf{v} . Równania (12.1) i (12.2), a zatem także trójki

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ oraz } (\mathbf{TAT}^{-1}, \mathbf{Tb}, \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1}),$$

nazywamy równoważnymi. Opis (12.1) ma zatem tyle opisów z nim równoważnych, ile istnieje nieosobliwych macierzy \mathbf{T} . Wszystkie te równania stanu są skojarzone oczywiście z jednym systemem, a cechy posiadane przez wszystkie opisy są cechami systemu. Omówimy trzy takie cechy, a mianowicie: sterowalność, obserwowalność, a także stabilność. Dzięki temu zbadamy strukturę systemu i ustalimy relacje pomiędzy różnymi opisami, czyli równaniem różnicowym, transmitancją oraz równaniem stanu.

Wielomianem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} i \mathbf{TAT}^{-1} jest

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

patrz podrozdział C.3. Wektorem jego współczynników będzie

$$\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{k-1}]^T.$$

12.2. System sterowalny

Opis (12.1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz sterowalności

$$\mathbf{P} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}]$$

jest nieosobliwa, patrz Dodatek D. Podamy teraz różne, równoważne opisy systemu sterowalnego.

Własność 12.2.1. *Sterowalny system (12.1) ma opis równoważny (12.2), w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6.2.1. ■

Można także wykazać, patrz ćwiczenie 6.2.2, że jeśli system jest sterowalny, to ma opis równoważny, w którym

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pary

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

nazywamy kanonicznymi, w odniesieniu, rzecz jasna, do sterowalności.

Z powyższego wynika, że system sterowalny ma opisy równoważne o postaciach:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \mathbf{a} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n &= \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}_n, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n &= \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x}_n, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{\theta}$ i $\boldsymbol{\gamma}$ są pewnymi wektorami.

12.2.1. System obserwowalny

Opis (12.1) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz obserwowalności

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa, patrz Dodatek D. Przedstawimy teraz równoważne opisy systemu obserwowalnego. Dowód poniższego twierdzenia jest taki sam jak twierdzenia 6.3.1.

Twierdzenie 12.2.1. *System (12.1) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ma opis równoważny (12.2), w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} = [1, 0, \dots, 0].$$

Z ćwiczenia 6.3.2 wynika, że innym opisem równoważnym jest taki, w którym

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \mathbf{a} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} = [0, \dots, 0, 1].$$

Pary

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}, [1, 0, \dots, 0] \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{a} \\ \mathbf{I} & \end{bmatrix}, [0, \dots, 0, 1] \right)$$

nazywamy kanonicznymi parami obserwowalnymi.

Podsumowując, możemy stwierdzić, że system obserwowalny ma poniższe opisy równoważne:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \boldsymbol{\rho} u_{n-1}, \\ y_n &= [1, 0, \dots, 0] \mathbf{x}_n \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \boldsymbol{\beta} u_{n-1}, \\ y_n &= [0, \dots, 0, 1] \mathbf{x}_n, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{\beta}$ są pewnymi wektorami.

12.3. Struktura systemu

Omówimy teraz relacje pomiędzy sterowalnością i obserwowalnością systemu a jego strukturą. Rozważania nasze są związane z relacją podobieństwa macierzy i są w zasadzie całkowicie podobne to tych w podrozdziale 6.4. Dlatego też wszelkie rezultaty podamy bez żadnych dowodów.

12.3.1. Struktura a sterowalność

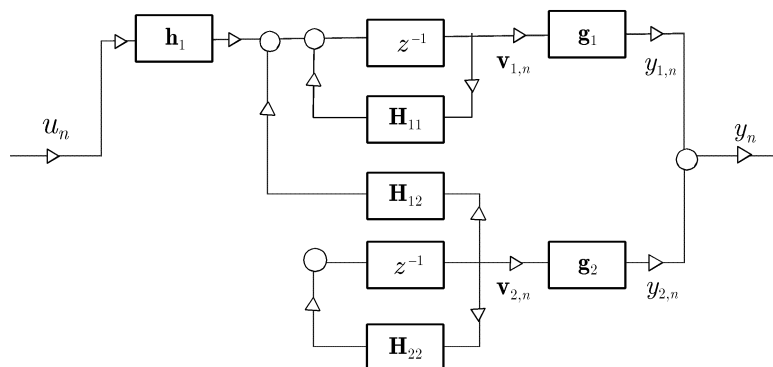
Jeśli $\text{rank } \mathbf{P} = r \leq k$, to system ma opis równoważny (12.2) o postaci

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,n} \\ \mathbf{v}_{2,n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,n-1} \\ \mathbf{v}_{2,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n &= [\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,n} \\ \mathbf{v}_{2,n} \end{bmatrix}, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}.$$

W opisie tym \mathbf{v}_1 , \mathbf{h}_1 oraz \mathbf{g}_1 są wektorami o r wymiarach, natomiast \mathbf{v}_2 oraz \mathbf{g}_2 o $k - r$ wymiarach. Kwadratowe macierze \mathbf{H}_{11} oraz \mathbf{H}_{22} są stopnia r oraz $k - r$, a \mathbf{H}_{12} jest macierzą prostokątną. System można zatem przedstawić jak na rys. 12.2.



Rys. 12.2. Dekompozycja systemu na część sterowalną (\mathbf{H}_{11} , \mathbf{h}_1 , \mathbf{g}_1) i niesterowalną (\mathbf{H}_{22} , $\mathbf{0}$, \mathbf{g}_2)

Pierwszy podsystem, rzędu r , o wektorze stanu \mathbf{v}_1 , wejściu u i wyjściu y_1 , jest sterowalny i ma równanie

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{1,n} &= \mathbf{H}_{11}\mathbf{v}_{1,n-1} + \mathbf{h}_1 u_{n-1}, \\ y_{1,n} &= \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_{1,n}, \end{cases}$$

a jego macierz \mathbf{H}_{11} i wektor \mathbf{h}_1 mają sterowalną formę kanoniczną. Drugi, rzędu $k - r$, ma równanie

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{2,n} &= \mathbf{H}_{22}\mathbf{v}_{2,n-1}, \\ y_{2,n} &= \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_{2,n}. \end{cases}$$

Wyjściem całego systemu jest $y_n = y_{1,n} + y_{2,n}$.

System (12.1) został zatem zdekomponowany na dwa sprzęgnięte ze sobą podsystemy, mianowicie $(\mathbf{H}_{11}, \mathbf{h}_1, \mathbf{0})$ oraz $(\mathbf{H}_{22}, \mathbf{0}, \mathbf{g}_2)$, przy czym pierwszy z nich jest sterowalny.

12.3.2. Struktura a obserwowalność

Jeśli $\text{rank } \mathbf{Q} = s \leq k$, to istnieje opis równoważny o postaci

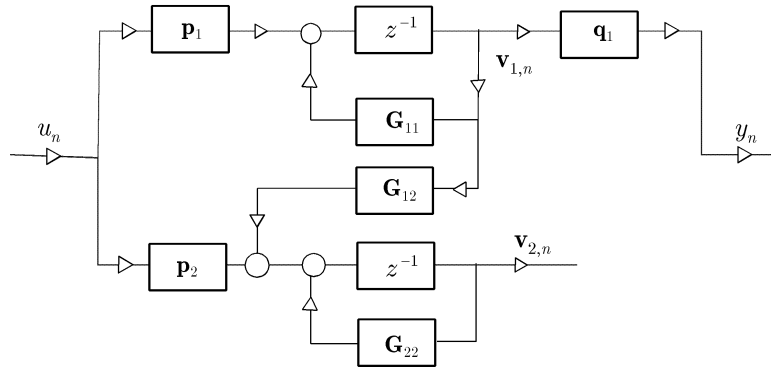
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,n} \\ \mathbf{v}_{2,n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,n-1} \\ \mathbf{v}_{2,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n &= [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,n} \\ \mathbf{v}_{2,n} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (12.3)$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{v},$$

przy czym \mathbf{v}_1 , \mathbf{p}_1 oraz \mathbf{q}_1 są wektorami o s wymiarach, natomiast \mathbf{v}_2 oraz \mathbf{p}_2 wektorami o $k - s$ wymiarach. Kwadratowe macierze \mathbf{G}_{11} oraz \mathbf{G}_{22} są stopnia s oraz $k - s$.

System składa się zatem z dwóch podsystemów obserwowalnego i nieobserwowalnego i ma strukturę taką jak na rys. 12.3.



Rys. 12.3. Dekompozycja systemu na część obserwowalną (\mathbf{G}_{11} , \mathbf{p}_1 , \mathbf{q}_1) i nieobserwowalną (\mathbf{G}_{22} , \mathbf{p}_2 , $\mathbf{0}$)

Pierwszy podsystem, rzędu s , jest obserwowalny i ma równanie

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{1,n} &= \mathbf{G}_{11}\mathbf{v}_{1,n-1} + \mathbf{p}_1 u_{n-1}, \\ y_{1,n} &= \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_{1,n}, \end{cases}$$

przy czym jego macierz \mathbf{G}_{11} i wektor \mathbf{q}_1 mają obserwowalną formę kanoniczną. Drugi podsystem nie jest obserwowalny, ma rząd $k - s$ i równanie

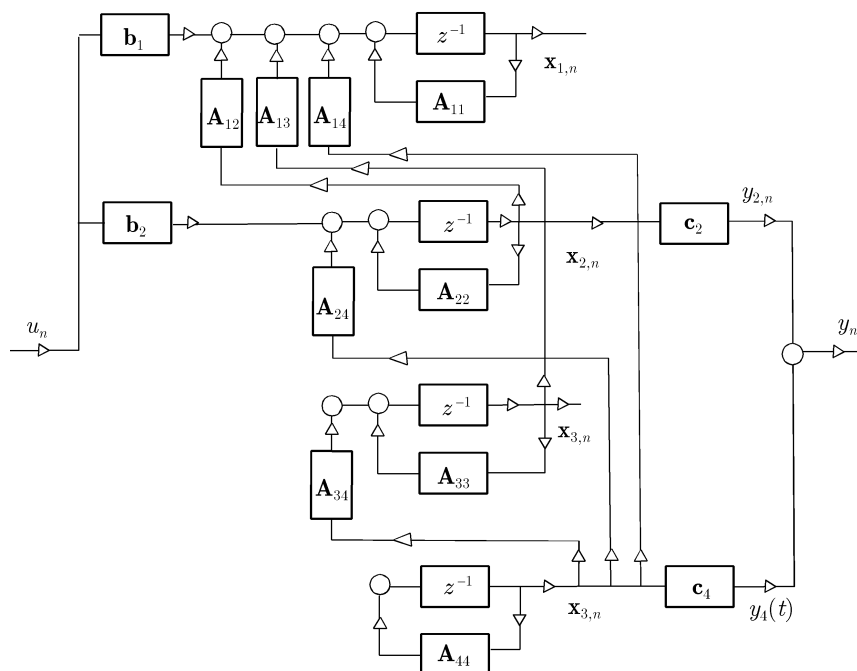
$$\begin{cases} \mathbf{v}_{2,n} &= \mathbf{G}_{22}\mathbf{v}_{2,n-1} + \mathbf{p}_2 u_{n-1}, \\ y_{2,n} &= \mathbf{0}^T \mathbf{v}_{2,n}. \end{cases}$$

Podsystemy sprzężone są macierzą prostokątną \mathbf{G}_{21} .

12.3.3. Pełna struktura systemu

Postępując w opisany powyżej sposób, można zdekomponować podsystem obserwowalny na dwa podsystemy, a mianowicie: sterowalny i niesterowalny. To samo można uczynić z podsystemem nieobserwowalnym. W rezultacie otrzymamy równanie stanu jak poniżej i odpowiadający mu rys. 12.4. Pokazuje one pełną strukturę systemu.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,n} \\ \mathbf{x}_{2,n} \\ \mathbf{x}_{3,n} \\ \mathbf{x}_{4,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,n-1} \\ \mathbf{x}_{2,n-1} \\ \mathbf{x}_{3,n-1} \\ \mathbf{x}_{4,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n = [\mathbf{0}^T, \mathbf{c}_2^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{c}_4^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,n} \\ \mathbf{x}_{2,n} \\ \mathbf{x}_{3,n} \\ \mathbf{x}_{4,n} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (12.4)$$



Rys. 12.4. Pełna dekompozycja systemu

Wektor stanu \mathbf{x} składa się z czterech części, tzn. ma on postać

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix},$$

w której kolejne jego części mają wymiary, powiedzmy, p, q, r oraz s , co oznacza, że $p + q + r + s = k$. System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ składa się więc z czterech podsystemów, a mianowicie $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{b}_1, \mathbf{0})$, $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$, $(\mathbf{A}_{33}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ oraz $(\mathbf{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{c}_4)$ o rzędach p, q, r oraz s . Możemy zatem stwierdzić, że podsystem

- $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{b}_1, \mathbf{0})$ jest sterowalny i nieobserwowalny,
- $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ jest sterowalny i obserwowalny,
- $(\mathbf{A}_{33}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest niesterowalny i nieobserwowalny,
- $(\mathbf{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{c}_4)$ jest niesterowalny i obserwowalny.

Macierze $\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{14}, \mathbf{A}_{24}$ oraz \mathbf{A}_{34} oznaczają sprzężenia pomiędzy tymi podsystemami, a macierze zerowe ich brak.

12.4. Równanie stanu, równanie różnicowe, transmitancja

12.4.1. Równoważne równania stanu

Z równań (12.3) i odpowiadającego mu rys. 12.3 wynika, że wyjście y systemu zależy jedynie od części obserwowalnej, czyli od $(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ oraz $(\mathbf{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{c}_4)$, a także sprzężenia \mathbf{A}_{24} między nimi. Równanie różnicowe systemu zależy zatem jedynie od równania jego części obserwowalnej, czyli od

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2,n} \\ \mathbf{x}_{4,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2,n-1} \\ \mathbf{x}_{4,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n = [\mathbf{c}_2^T, \mathbf{c}_4^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2,n} \\ \mathbf{x}_{4,n} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (12.5)$$

Prawdziwa jest zatem poniższa własność:

Własność 12.4.1. *Równanie różnicowe systemu (12.1) zależy tylko od części obserwowalnej. Część systemu opisywana równaniem różnicowym jest obserwowalna.*

Założymy teraz, że system obserwowalny ma równanie różnicowe

$$y_n + a_{k-1}y_{n-1} + \dots + a_1y_{n-k+1} + a_0y_{n-k} = b_{k-1}u_{n-1} + \dots + b_0u_{n-k} \quad (12.6)$$

i oznaczymy $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T$ oraz $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{k-1}]^T$. Podamy teraz różne równania stanu (12.1) odpowiadające równaniu różnicowemu (12.6). We wszystkich \mathbf{A} jest macierzą fazową, patrz podrozdział C.5. Dowody równoważności tych opisów podajemy w kolejnym paragrafie.

Zacznijmy od równania

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \boldsymbol{\beta} u_{n-1}, \\ y_n = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{x}_n, \end{cases} \quad (12.7)$$

gdzie $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{b}$,

$$\boldsymbol{\Gamma} = - \begin{bmatrix} & & & & a_0 & 0 \\ & & & & a_0 & a_1 & 0 \\ & & & & a_1 & a_2 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-4} & a_{k-3} & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det \boldsymbol{\Gamma} = (-1)^{(k-1)(k-2)/2} (-a_0)^{k-1} \neq 0$, to macierz $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ istnieje.

Kolejne równanie stanu ma następującą postać:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_n. \end{cases} \quad (12.8)$$

Trzecim i ostatnim jest

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{a} \\ \mathbf{I} & \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{b}u_{n-1}, \\ y_n = [0, \dots, 0, 1] \mathbf{x}_n. \end{cases} \quad (12.9)$$

Dla równania tego

$$\mathbf{c}^T \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = b_{k-1}z^{k-1} + \dots + b_1z + b_0, \quad (12.10)$$

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z + a_0, \quad (12.11)$$

gdzie $\mathbf{c} = [0, \dots, 0, 1]^T$, patrz ćwiczenia C.5.1 oraz C.5.3.

12.4.2. Dowody równoważności opisów

Dowód równoważności opisów (12.6) i (12.7). Zaczniemy, wprowadzając oznaczenie $\mathbf{x}_n = [x_{1,n}, \dots, x_{k,n}]^T$ oraz przepisując $k + 1$ równań stanu jako

$$\begin{cases} x_{1,n} = x_{2,n-1} + \beta_0 u_{n-1}, \\ \vdots \\ x_{k-2,n} = x_{k-1,n-1} + \beta_{k-3} u_{n-1}, \\ x_{k-1,n} = x_{k,n-1} + \beta_{k-2} u_{n-1}, \\ x_{k,n} = -\mathbf{a}^T \mathbf{x} + \beta_k u_{n-1}, \\ y_n = x_{k,n}. \end{cases}$$

Z ostatniego równania wynika, że

$$x_{k,n} = y_n. \quad (12.12)$$

Wykonując operację przesunięcia, otrzymujemy $x_{k,n-1} = y_{n-1}$, dzięki czemu trzecie od końca równanie przedstawiamy w następującej postaci:

$$x_{k-1,n} = y_{n-1} + \beta_{k-2} u_{n-1},$$

skąd po przesunięciu otrzymujemy $x_{k-1,n-1} = y_{n-2} + \beta_{k-2} u_{n-2}$. Po uwzględnieniu tego możemy czwarte od końca równanie zapisać w postaci

$$x_{k-2,n} = y_{n-2} + \beta_{k-2} u_{n-2} + \beta_{k-3} u_{n-1}.$$

Powtarzając powyższe czynności, otrzymujemy wreszcie

$$x_{1,n} = y_{n-k+1} + \beta_{k-2}u_{n-k+1} + \cdots + \beta_0u_{n-1}.$$

Wykazaliśmy więc, że wektor stanu ma postać

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} y_{n-k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_{n-k+1} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (12.13)$$

przy czym

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ & \beta_{k-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & 0 \\ & & & & \beta_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przedostatnie ze wszystkich skalarnych równań, po uwzględnieniu (12.12), przyjmuje postać

$$y_n = -\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{k-1}u_{n-1}.$$

Biorąc teraz pod uwagę (12.13), otrzymujemy

$$y_n + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y_{n-k} \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = (-\mathbf{a}^T \mathbf{B} + [0, \dots, 0, b_{k-1}]) \begin{bmatrix} u_{n-k} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Porównanie tego z równaniem różnicowym

$$y_n + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y_{n-k} \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T \begin{bmatrix} u_{n-k} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix},$$

doprowadza do wniosku, że

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^T &= -\mathbf{a}^T \mathbf{B} + [0, \dots, 0, \beta_{k-1}] \\
 &= -[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}] \begin{bmatrix} \beta_{k-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ & \beta_{k-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ & & \beta_{k-2} & \ddots & \beta_2 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \beta_{k-2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + [0, \dots, 0, \beta_{k-1}] \\
 &= -[\beta_0, \dots, \beta_{k-1}] \begin{bmatrix} & & & a_0 & 0 & 0 \\ & & & a_0 & a_1 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & \cdots & a_{k-4} & a_{k-3} & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T$, otrzymujemy równość $\mathbf{b} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\beta}$ i kończymy dowód. ■

Dowód równoważności opisów (12.6) i (12.8). Zacznijmy od przepisania równania (12.8) w wygodniejszej postaci

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} & \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n = [b_0, \dots, b_{k-1}] \mathbf{x}_n. \end{cases} \quad (12.14)$$

Zauważając, że

$$\frac{z^{-1}U(z)}{1 + \cdots + a_1 z^{-k+1} + a_0 z^{-k}} = \frac{Y(z)}{b_{k-1} + \cdots + b_1 z^{-k+2} + b_0 z^{-k+1}},$$

wprowadzimy nową zmienną x_n , której transformata Z jest równa

$$X(z) = z^{-1}U(z) \frac{1}{1 + \cdots + a_1 z^{-k+1} + a_0 z^{-k}}.$$

Ponieważ $X(z)(1 + a_{k-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-k+1} + a_0 z^{-k}) = z^{-1}U(z)$, zatem

$$x_n + a_{k-1}x_{n-1} + \cdots + a_1 x_{n-k+1} + a_0 x_{n-k} = u_{n-1}.$$

Ustalając wektor stanu jako $\mathbf{x}_n = [x_{n-k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n]^T$, weryfikujemy pierwsze z równań (12.14).

Ze względu na to, że $Y(z) = (b_{k-1} + \dots + b_1 z^{-k+2} + b_0 z^{-k+1})X(z)$, możemy napisać

$$y_n = b_{k-1}x_n + \dots + b_0x_{n-k+1},$$

skąd wynika drugie równanie w zestawie (12.14). Dowód jest zakończony. ■

Dowód równoważności opisów (12.6) i (12.9). Dzięki temu, że $y_n = x_{k,n}$, pierwsze wektorowe równanie w (12.9) przepisujemy następująco:

$$\begin{cases} x_{1,n} &= (b_0 u_{n-1} - a_0 y_{n-1}), \\ x_{2,n} &= x_{1,n-1} + (b_1 u_{n-1} - a_1 y_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{k-1,n} &= x_{k-2,n-1} + (b_{k-2} u_{n-1} - a_{k-2} y_{n-1}), \\ x_{k,n} &= x_{k-1,n-1} + (b_{k-1} u_{n-1} - a_{k-1} y_{n-1}). \end{cases}$$

Dokonując w pierwszym przesunięcia i wstawiając wynik do drugiego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_{2,n} &= x_{1,n-1} + (b_1 u_{n-1} - a_1 y_{n-1}) \\ &= (b_0 u_{n-2} - a_0 y_{n-2}) + (b_1 u_{n-1} - a_1 y_{n-1}). \end{aligned}$$

Podobna operacja wykonana wobec trzeciego, po uwzględnieniu otrzymanego wyniku, daje

$$x_{3,n} = (b_0 u_{n-3} - a_0 y_{n-3}) + (b_1 u_{n-2} - a_1 y_{n-2}) + (b_2 u_{n-1} - a_2 y_{n-1}).$$

Powtarzając tę procedurę, otrzymujemy

$$x_{k,n} = (b_0 u_{n-k} - a_0 y_{n-k}) + (b_1 u_{n-k+1} - a_1 y_{n-k+1}) + \dots + (b_{k-1} u_{n-1} - a_{k-1} y_{n-1})$$

i, biorąc pod uwagę to, że $x_{k,n} = y_n$, kończymy dowód. ■

12.4.3. Równanie różnicowe, transmitancja

Podamy teraz wynik dotyczący systemu jednocześnie obserwowalnego i sterowalnego. Odnosi się on do opisów (12.1) oraz (12.6).

Twierdzenie 12.4.1. *Obserwowalny system (12.1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany*

$$\mathbf{c}^T [\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b} \text{ oraz } \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

nie mają żadnego wspólnego pierwiastka. System (12.6) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany

$$z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z^1 + a_0z$$

oraz

$$\beta_{k-1}z^{k-1} + \dots + \beta_1z^1 + \beta_0$$

nie mają żadnego wspólnego pierwiastka.

Dowód. Dowód jest taki sam jak dowód twierdzenia 6.5.1. ■

Ciekawą jest interpretacja warunku, według którego równanie różnicowe (12.6) opisuje system sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany

$$L(z) = b_{k-1}z^{k-1} + \dots + b_1z + b_0$$

oraz

$$M(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z + a_0$$

nie mają żadnego wspólnego pierwiastka. Ponieważ transmitancją jest

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

jest on równoważny temu, że wielomiany stojące w liczniku i mianowniku transmitancji nie mają żadnego wspólnego pierwiastka.

Z powyższego wynika, że system o transmitancji

$$\frac{z+1}{z^2+4z+3}$$

nie jest sterowalny bowiem $z^2+4z+3 = (z+1)(z+3)$. Podobnie system o równaniu

$$y_n + 4y_{n-1} + 3y_{n-2} = u_{n-1} + u_{n-2}$$

nie jest sterowalny, gdyż $z^2+4z+3 = (z+1)(z+3)$. Jego transmitancja, czyli $1/(z+3)$, jest taka sama jak systemu o równaniu

$$y_{n+1} + 3y_n = u_n \text{ oraz } y_n + 3y_{n-1} = u_{n-1}.$$

Zatem – tylko w systemie jednocześnie sterowalnym i obserwowalnym istnieje jednoznaczny związek pomiędzy równaniem różnicowym i transmitancją. Jednoznaczny jest także ich związek z równaniem stanu, oczywiście z dokładnością do transformacji podobieństwa macierzy.

Na zakończenie wyznaczmy transmitancję systemu (12.1). Jest nią oczywiście

$$K(z) = \mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_2^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{b}_2.$$

Przykład 12.4.1. Sprawdzimy, że równaniem różnicowym systemu

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \\ \theta_{n+1} \\ \zeta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \\ \theta_n \\ \zeta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_n, \\ \\ y_n = [0, c_2, 0, c_4] \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \\ \theta_n \\ \zeta_n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

jest

$$\eta_{n+2} - (a_{22} + a_{44})\eta_{n+1} + a_{22}a_{44}\eta_n = c_2b_2u_{n+1} - c_2b_2a_{44}u_n,$$

a transmitancją

$$K(z) = \frac{c_2 b_2}{z - a_{22}}.$$

Wyznaczenie transmitancji jest łatwe. Do równania różnicowego dochodzimy, zaczynając od równania stanu części obserwowalnej, czyli

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{2,n} \\ x_{4,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,n-1} \\ x_{4,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n = [c_2, c_4] \begin{bmatrix} x_{2,n} \\ x_{4,n} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Zauważając, że wartościami własnymi macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

są a_{22} oraz a_{44} , bez trudu weryfikujemy podane równanie różnicowe.

W ostatnim przykładzie równanie stanu rzędu 4 ma równanie różnicowe rzędu 2 oraz transmitancję rzędu 1, tzn. taką, której mianownik jest wielomianem stopnia 1. Przyczyny, dla których rząd równania różnicowego jest niższy od wymiaru wektora stanu, już podaliśmy. Istotę zjawiska polegającego na pojawieniu się różnicy rzędów równania różnicowego i transmitancji jest to, co już wiemy, że wielomiany $\mathbf{c}^T [\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b}$ oraz $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$, tzn. wielomiany w liczniku i mianowniku ułamka

$$K(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}^T [\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{b}}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

będącego transmitancją systemu, mają jeden wspólny pierwiastek. Prowadzi on do skróceń, a właściwie jednego skrócenia, czyli obniżenia rzędu.

Przykład 12.4.2. Równaniem różnicowym systemu

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{n-1} \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_{n-1}, \\ y_n = [1, 0] \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix}, \end{cases}$$

a także jego części obserwowalnej, tzn. systemu

$$\begin{cases} \xi_n = a_{11} \xi_{n-1} + b_1 u_{n-1}, \\ y_n = \xi_n, \end{cases}$$

jest $y_{n+1} - a_{11} y_n = b_1 u_n$. Transmitancją jest natomiast $K(z) = b_1 / (z - a_{11})$. Z drugiej jednak strony,

$$\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj} \begin{bmatrix} z - a_{11} & 0 \\ a_{21} & z - a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - a_{22} & 0 \\ -a_{21} & z - a_{11} \end{bmatrix},$$

skąd w sposób oczywisty wynika, że $\mathbf{c}^T[\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b} = b_1z - b_1a_{22}$. Łatwo wyliczając następnie, że $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^2 - (a_{22} + a_{11})z + a_{22}a_{11}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} &= \frac{1}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{c}^T[\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b} = \frac{b_1z - b_1a_{22}}{z^2 - (a_{22} + a_{11})z + a_{22}a_{11}} \\ &= \frac{(z - a_{22})b_1}{(z - a_{11})(z - a_{22})} = \frac{b_1}{z - a_{11}}, \end{aligned}$$

co jest zgodne z wcześniejszym rezultatem. System, którego równanie stanu jest drugiego rzędu, ma więc transmitancję rzędu pierwszego. Dzieje się tak ponieważ wielomiany $\mathbf{c}^T[\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b}$ oraz $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mają wspólny pierwiastek, a mianowicie a_{22} .

12.5. Stabilność względem stanu

Oznaczając przez $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ wartości własne macierzy \mathbf{A} równania stanu (6.1), stwierdzamy, że są one także wartościami własnymi macierzy podobnej \mathbf{TAT}^{-1} występującej w równoważnym równaniu (6.2). Rozwiązania równań $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ oraz $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}) = 0$ są bowiem takie same. Własności związane z wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} są zatem wspólne dla wszystkich równań równoważnych. Są one więc cechą systemu. Własnością taką jest stabilność.

Na początku przypominamy, że pobudzeniem zerowym nazywamy taki sygnał, że $u_n = 0$ dla $n = 0, 1, \dots$. Wówczas

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

oraz

$$y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0.$$

Jest więc oczywiste, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, lecz niekoniecznie na odwrót.

Jeśli, przy zerowym pobudzeniu, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ dla każdego warunku początkowego, to mówimy, że system jest stabilny względem wyjścia. Omówimy teraz stabilność względem stanu.

Definicja 12.5.1. *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

dla każdego warunku początkowego, to mówimy, że system (6.1) jest stabilny względem stanu.

Jest oczywiste, że stabilność względem stanu pociąga za sobą stabilność względem wyjścia, lecz niekoniecznie na odwrót.

Zbieżność $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n \mathbf{x}_{-1} = \mathbf{0}$ dla każdego \mathbf{x}_{-1} zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}.$$

System jest więc stabilny względem stanu wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi powyższa zbieżność. Własność ta jest powiązana z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ macierzy \mathbf{A} , patrz (C.24).

Twierdzenie 12.5.1. *System (6.1) jest stabilny względem stanu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_k| < 1.$$

Aby stwierdzić, czy system jest stabilny względem stanu, wystarczy zatem sprawdzić, czy wszystkie pierwiastki wielomianu $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ leżą w kole jednostkowym, szczegóły można znaleźć w rozdziale 11.

Z uwagi na dekompozycję (12.4) można rozpatrywać stabilność całego systemu (12.1) lub poszczególnych czterech jego części składowych. W szczególności można mówić o stabilności:

- całego systemu, czyli równania stanu $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1}$,
- równania różnicowego, czyli części obserwowalnej, oraz
- transmitancji, czyli części jednocześnie sterowalnej i obserwowalnej.

Jest przy tym oczywiste, że pierwszy typ stabilności, tzn. stabilność równania stanu, pociąga za sobą pozostałe, a drugi trzecią. Z drugiej jednak strony, stabilność transmitancji nie musi oznaczać stabilności ani równania różnicowego, ani równania stanu.

Przykład 12.5.1. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^2 - 3z$, skąd wynika, że 0 oraz 3 są wartościami własnymi macierzy. System nie jest stabilny.

Przykład 12.5.2. Jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 4/6 \end{bmatrix},$$

to $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (z - 1/2)(z - 1/3)$, skąd wynika stabilność systemu.

Przykład 12.5.3. Jeśli $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, to system jest niestabilny, gdyż 1 jest wartością własną.

Przykład 12.5.4. System

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1}$$

nie jest stabilny, bowiem $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (z - 1/2)(z - 2)$. Jego część obserwowalna o równaniu

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}$$

jest jednak stabilna.

Przykład 12.5.5. System obserwowalny o równaniu różnicowym

$$3y_n + 8y_{n-1} - 3y_{n-2} = u_n + 3u_{n-1}$$

nie jest stabilny, ponieważ jego wielomian charakterystyczny to $(3z - 1)(z + 3)$, ale transmitancja

$$\frac{1}{3z - 1},$$

czyli jego część sterowalna, jest stabilna.

Ćwiczenie 12.5.1. Jeśli $|\det \mathbf{A}| \geq 1$, to system (12.1) jest niestabilny. Zauważmy bowiem, że z (C.6) wynika, że $|\det \mathbf{A}| = \prod_{i=1}^k |\lambda_i|$. Jeśli więc system jest stabilny, to $|\det \mathbf{A}| < 1$.

Ćwiczenie 12.5.2. Jeśli $\text{tr} \mathbf{A} \geq k$, to system jest niestabilny. Z (C.7) wynika bowiem, że $|\text{tr} \mathbf{A}| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i|$. Zatem $|\lambda_i| \geq 1$ dla przynajmniej jednego i .

Ćwiczenie 12.5.3. Wykazać, że jeśli $\text{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \geq 0$, to system jest niestabilny.

Ćwiczenie 12.5.4. Sprawdzić, że jeśli obserwowalny i jednocześnie sterowalny system (12.1) jest stabilny, to jego wzmocnienie w stanie ustalonym jest równe $\mathbf{c}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

Ćwiczenie 12.5.5. Sprawdzić, że w systemie (12.1), przy zerowym warunku początkowym i pobudzeniu $u_n = \delta_n$, mamy $\mathbf{x}_n = \mathcal{Z}^{-1}\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\}$, skąd wynika, że $y(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{z\mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\}$.

Ćwiczenie 12.5.6. Sprawdzić, że w systemie (12.1) $k_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{b}$.

Ćwiczenie 12.5.7. Dla macierzy \mathbf{A} o wszystkich wartościach własnych w lewej półpłaszczyźnie $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$, skąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\mathbf{A}T} = \mathbf{0}$ dla każdego $T > 0$. Jeśli zatem system ciągly (12.15) jest stabilny, to także systemy dyskretnie (12.16) oraz (12.17), a zatem i systemy o transmitancjach $\hat{K}(z)$ i $\bar{K}(z)$ są stabilne. Zauważyć, że wzmocnienie w stanie ustalonym systemu ciągłego jest równe $K(0) = -\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, natomiast systemów dyskretnych $\hat{K}(1) = \mathbf{c}^T(\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T})^{-1}\mathbf{b}$ oraz $\bar{K}(1) = K(0) = -\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

12.6. System ciągly sterowany dyskretnie

Podamy teraz związek pomiędzy równaniem wektorowym

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{cases} \quad (12.15)$$

systemu ciągłego sterowanego dyskretnie a równaniem wektorowym powstałego w ten sposób systemu dyskretnego.

Zacniemy od sterowania za pomocą impulsatora, patrz podrozdział 9.7. Zauważamy, że $\mathbf{x}(nT)$ zależy od $\mathbf{x}((n-1)T)$ oraz pobudzenia spowodowanego impulsem Diraca w chwili nT , czyli od $u(t)\delta(t - nT)$. Zatem

$$\mathbf{x}(nT) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} e^{\mathbf{A}(nT-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)\delta(\tau - nT)d\tau,$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{x}(nT) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}((n-1)T) + \mathbf{b}u(nT).$$

Oznaczając $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(nT)$ oraz $u_n = u(nT)$, otrzymujemy w rezultacie następujące równanie wektorowe systemu dyskretnego:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{b}u_n, \\ y_n &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_n, \end{cases}$$

które prowadzi do następującego równania stanu:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{v}_{n-1} + e^{\mathbf{A}T} \mathbf{b} u_{n-1}, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{v}_n + d u_n, \end{cases} \quad (12.16)$$

gdzie $d = \mathbf{c}^T \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{b} u_n$.

W systemie sterowanym przez impulsator z ekstrapolatorem stan $\mathbf{x}(nT)$ zależy od $\mathbf{x}((n-1)T)$ oraz pobudzenia na odcinku $[(n-1)T, nT)$, czyli u_{n-1} , które jest stałe i równe $u((n-1)T)$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(nT) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} e^{\mathbf{A}(nT-\tau)} \mathbf{b} u((n-1)T) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}((n-1)T) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{b} u((n-1)T). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_{n-1} + \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{b} u_{n-1}, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n. \end{cases}$$

Zakładając, że $\det \mathbf{A} \neq 0$ i uwzględniając (C.21), otrzymujemy następujące równanie systemu dyskretnego:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{b} u_{n-1}, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n. \end{cases} \quad (12.17)$$

Zauważmy, że wymiary wektorów stanu $\mathbf{x}(t)$ oraz \mathbf{x}_n i \mathbf{v}_n są identyczne, skąd wniosek, że system ciągły i obydwie systemy dyskretnie są tego samego rzędu; patrz także ćwiczenie 12.5.7.

Dzięki powyższym rezultatom możemy głębiej wniknąć w zależność między transmitancją systemu ciągłego $K(s)$ a transmitancją $\hat{K}(z)$ systemu (12.16) oraz $\bar{K}(z)$ systemu (12.17). Stwierdzamy bowiem, że transmitancja

$$K(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

systemu ciągłego prowadzi do

$$\hat{K}(z) = \mathbf{c}^T z(z\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T})^{-1} e^{\mathbf{A}T} \mathbf{b}$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{K}(z) &= \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T})^{-1} \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}T})^{-1} \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Zauważmy na koniec, że jeśli system ciągły (12.15) jest stabilny, to obydwie systemy dyskretnie (12.16) oraz (12.17) także. Jeśli bowiem zachodzi zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\mathbf{A}T})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}nT} = \mathbf{0}$.

Rozdział 13

Dyskretna regulacja automatyczna

13.1. System automatycznej regulacji

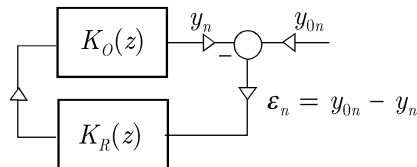
Dyskretny system automatycznej regulacji jest pokazany na rys. 13.1. Transmitancja systemu zamkniętego, tzn. systemu o wejściu y_{0n} i wyjściu y_n , jest równa

$$K_Z(z) = \frac{K(z)}{1 + K(z)},$$

gdzie

$$K(z) = K_O(z)K_R(z)$$

jest transmitancją systemu otwartego, a $K_O(z)$ oraz $K_R(z)$ są odpowiednio transmitancjami obiektu i regulatora. Sygnał ε_n nazywa się uchybem.



Rys. 13.1. Dyskretny system automatycznej regulacji

Regulator powinien zapewnić, że sygnał wyjściowy obiektu y_n jest bliski sygnałowi wartości zadanej y_{0n} . Oznacza to, że uchyb ε_n powinien być możliwie mały.

Pamiętając, że

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

gdzie $L(z)$ i $M(z)$ są wielomianami, otrzymujemy

$$K_Z(z) = \frac{L(z)}{L(z) + M(z)},$$

skąd wynika, że

$$M_Z(z) = L(z) + M(z)$$

jest wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego. Dla wygody warto oznaczyć przez $L_Z(z)$ licznik transmitancji układu zamkniętego i zapamiętać, że

$$K_Z(z) = \frac{L_Z(z)}{M_Z(z)}.$$

Ponadto

$$K_E(z) = \frac{1}{1 + K(z)} = \frac{M(z)}{L(z) + M(z)}$$

jest transmitancją uchybową.

Podstawową własnością, jaką system regulacji powinien mieć, jest stabilność. Zapewnia ona bowiem ustalenie się uchybu regulacji w sytuacji, gdy wartość zadana zmienia się skokowo, czyli przyjmuje nową wartość. W szczególności zastanowimy się dla jakich regulatorów uchyb ten maleje do zera, gdy czas narasta do nieskończoności.

Drugą ważną własnością jest szybkość reakcji, którą będziemy oceniać, badając opóźnienie na pobudzenie skokiem jednostkowym $y_{0n} = 1_n$. Miarą tego opóźnienia będzie czas pozostawania sygnału wyjściowego obiektu y_n na poziomie zerowym. Im jest on krótszy, tym lepiej. Mniejsza jest bowiem wtedy bezwładność systemu, czyli szybszy przebieg regulacji w początkowej fazie.

W analizie, którą teraz przeprowadzimy, obiekt ma transmitancję

$$K_O(z) = \frac{L_O(z)}{M_O(z)},$$

gdzie:

$$L_O(z) = \beta_l z^l + \beta_{l-1} z^{l-1} + \dots + \beta_0,$$

$$M_O(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_0,$$

przy czym $\beta_l \neq 0$. Zakładamy ponadto, że transmitancja ta nie ma bieguna w punkcie $z = 1$. Oznaczmy jeszcze $p = m - l$. Zauważmy, że z własności 9.4.7 wynika, że

$$\lambda_{O,1} = \lambda_{O,2} = \dots = \lambda_{O,p-1} = 0$$

i dopiero

$$\lambda_{O,p} = \frac{\beta_l}{\alpha_m} \neq 0.$$

Omówimy systemy regulacji z różnymi typami regulatorów i porównamy je. Przez $\deg[Q(z)]$ będziemy oznaczać stopień wielomianu $Q(z)$.

13.2. Regulacja statyczna, czyli P

O regulacji P mówimy, gdy regulator ma transmitancję $K_R(z) = k_1$, czyli gdy jest proporcjonalny, tzn. typu P. Zakładamy, że system zamknięty jest stabilny i ponadto $y_{0n} = 1_n$, co oznacza, że $Y_0(z) = z/(z-1)$. Zatem

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)(1+k_1K_O(z))}.$$

Ponieważ system jest stabilny, z własności 10.3.2 wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)E(z) = \frac{1}{1+k_1K_O(1)}.$$

Wykazaliśmy następującą własność:

Własność 13.2.1. *Niech $y_{0n} = 1_n$. W stabilnym systemie automatycznej regulacji statycznej*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \frac{1}{1+k_1K_O(1)} \neq 0.$$

Z uwagi na przyjęty obiekt, transmitancją systemu zamkniętego jest

$$K_Z(z) = \frac{k_1L_O(z)}{k_1L_O(z) + M_O(z)}.$$

Poza szczególnymi przypadkami, $\deg[k_1L_O(z) + M_O(z)] - \deg[k_1L_O(z)] = p$. Z własności 9.4.7 wynika zatem, że przy pobudzeniu systemu skokiem jednostkowym i zerowym warunkiem początkowym,

$$y_0 = \dots = y_{p-1} = 0 \tag{13.1}$$

i dopiero

$$y_p = k_1 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_1 \lambda_{O,p}.$$

Miarą szybkości reakcji systemu regulacji na pobudzenie $y_{0,n} = 1_n$ jest dla nas liczba p , tzn. opóźnienie, z jakim system na nie reaguje.

13.3. Regulacja astatyczna

13.3.1. Regulacja I

Podobnie jak przy regulacji statycznej zakładamy, że $y_{0n} = 1_n$. Przyjmujemy teraz, że

$$K_R(z) = k_2 \frac{1}{z-1}$$

jest transmitancją regulatora. Zauważmy, że jego odpowiedź impulsowa jest równa 0 dla $n = 0$ oraz k_2 dla $n = 1, 2, \dots$. Przy pobudzeniu sygnałem ε_n , jego wyjście w chwili n jest więc równe $k_2 \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i$. Ma on zatem własności sumacyjne i, w związku z tym, możemy powiedzieć, że jest dyskretnym odpowiednikiem całkującego regulatora I.

Jeśli system zamknięty jest stabilny, to z twierdzenia granicznego B.3.2 wynika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + k_2 \frac{1}{z-1} K_O(z)} = 0.$$

Prawdziwa jest więc następująca własność:

Własność 13.3.1. Niech $y_{0n} = 1_n$. W stabilnym systemie automatycznej regulacji astatycznej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Przy założonym regulatorze i obiekcie

$$K_Z(z) = \frac{k_2 L_O(z)}{k_1 L_O(z) + (z-1)M_O(z)},$$

skąd wynika, że $\deg[k_1 L_O(z) + (z-1)M_O(z)] - \deg[k_2 L_O(z)] = p+1$. Zatem, przy pobudzeniu systemu skokiem jednostkowym i przy zerowym warunku początkowym,

$$y_0 = \dots = y_p = 0$$

i dopiero

$$y_{p+1} = k_2 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_2 \lambda_{O,p}.$$

Reakcja układu przy regulatorze I jest zatem wolniejsza niż przy regulacji P.

13.3.2. Regulacja PI

Nietrudno sprawdzić, że regulator o transmitancji

$$K_R(z) = k_1 + k_2 \frac{1}{z-1},$$

czyli typu PI, zapewnia korzystne cechy obserwowane z osobna w regulacji statycznej i astatycznej. Uchyb w stanie ustalonym jest bowiem zerowy, a szybkość reakcji jak w (13.1), ponieważ

$$K_Z(z) = \frac{(k_1 z - k_1 + k_2) L_O(z)}{(k_1 z - k_1 + k_2) L_O(z) + (z-1)M_O(z)}.$$

Teraz zatem

$$y_0 = \dots = y_{p-1} = 0$$

i dopiero

$$y_p = k_2 \frac{\beta_l}{\alpha_m} = k_2 \lambda_{O,p}.$$

Własności regulacji P, I oraz PI, przy zerowym warunku początkowym, zestawiono w tabelach 13.1 oraz 13.2. Wynika z nich w sposób oczywisty, że pod względem badanych własności najlepsza jest regulacja PI.

Tabela 13.1. Własności uchybu

Regulacja	ε_0	$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n$
P	1	$\frac{1}{1 + k_1 K_O(1)} \neq 0$
I	1	0
PI	1	0

Tabela 13.2. Własności wyjścia obiektu

Regulacja	y_0	\dots	y_{p-1}	y_p	y_{p+1}
P	0	\dots	0	$k_1 \lambda_{O,p}$	
I	0	\dots	0	0	$k_2 \lambda_{O,p}$
PI	0	\dots	0	$k_1 \lambda_{O,p}$	

13.4. Regulacja z obiektem ciągłym

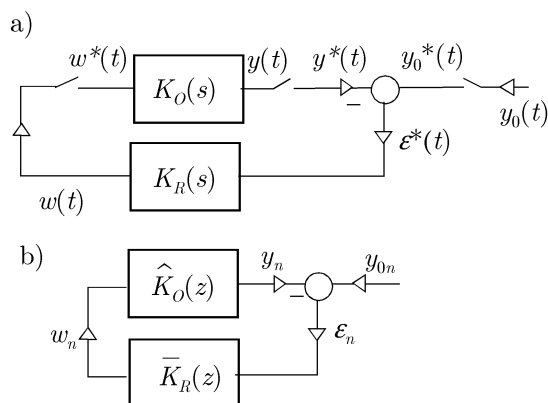
Wykorzystując impulsator i ekstrapolator, patrz podrozdział 9.7, można budować systemy automatycznej regulacji, w których obiekty ciągłe są sterowane w sposób dyskretny. Przykład takiego systemu z impulsatorami pokazano na rys. 13.2. Z uwagi na to, że sygnały $y_0^*(t)$, $\varepsilon^*(t)$, $w^*(t)$ oraz $y^*(t)$ można utożsamić z ciągami liczbowymi y_{0n} , ε_n , w_n oraz y_n , sporządzamy schemat systemu dyskretnego pokazany na tym samym rysunku.

Należy zaznaczyć, że o ile system ciągły z impulsatorami istnieje realnie, o tyle system dyskretny jest jedynie schematem, czyli pewną abstrakcją. Po wyznaczeniu, zgodnie z procedurą (9.21), transmitancji $\hat{K}_O(z)$ i $\hat{K}_R(z)$, czyli zastępczych dyskretnych transmitancji obiektu i regulatora, można przeprowadzić analizę powstałego w ten sposób systemu dyskretnego. Możemy badać np. jego stabilność.

Dla przykładu, w systemie pokazanym na rys. 13.2a transmitancją obiektu ciągłego jest $K_O(s) = 1/(\tau s + 1)$, a regulatora $K_R(s) = k$. Postępując zgodnie z opisanymi powyżej regułami sporządzamy schemat odpowiadającego mu układu dyskretnego, który jest przedstawiony na rys. 13.2b. Ustalamy następnie, że – w systemie tym – transmitancją obiektu dyskretnego jest $\hat{K}_O(z) = z/\tau(z - e^{-T/\tau})$, patrz ćwiczenie 9.7.5, a regulatora $\hat{K}_R(z) = k$. Transmitancja systemu zamkniętego jest więc równa

$$K(z) = \hat{K}_O(z)\hat{K}_R(z) = \frac{kz}{\tau(z - e^{-T/\tau})},$$

a jego równaniem charakterystycznym jest $(k + \tau)z - \tau e^{-T/\tau} = 0$. System zamknięty jest zatem stabilny, jeśli $-\tau(1 - e^{-T/\tau}) < k$.

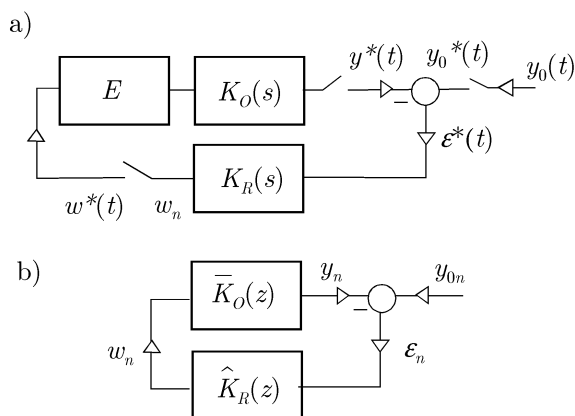


Rys. 13.2. Układ automatycznej regulacji z impulsatorami i odpowiadający mu schemat systemu dyskretnego

System z ekstrapolatorem oraz odpowiadający mu schemat systemu dyskretnego przedstawiono na rys. 13.3a. Transmitancję $\bar{K}_0(z)$ obiektu dyskretnego wylicza się zgodnie z procedurą (9.24), natomiast transmitancję $\hat{K}_R(z)$ regulatora według (9.21). Dla przyjętych transmitancji otrzymujemy zatem $\bar{K}_0(z) = (1 - e^{-T/\tau})/(z - e^{-T/\tau})$ oraz $\hat{K}_R(z) = k$. Transmitancja systemu otwartego jest więc równa

$$K(z) = \bar{K}_0(z)\hat{K}_R(z) = \frac{k(1 - e^{-T/\tau})}{z - e^{-T/\tau}},$$

a równanie charakterystyczne systemu zamkniętego to $z + k(1 - e^{-T/\tau}) + e^{-T/\tau} = 0$. System jest stabilny, jeśli $-1 < k(1 - e^{-T/\tau}) + e^{-T/\tau} < 1$, czyli jeśli współczynnik wzmacnienia regulatora spełnia nierówności $-(1 + e^{-T/\tau})/(1 - e^{-T/\tau}) < k < 1$.



Rys. 13.3. Układ automatycznej regulacji z ekstrapolatorem i odpowiadający mu schemat systemu dyskretnego

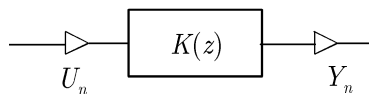
Przykład 13.4.1. W systemie przedstawionym na rys. 13.3, transmitancjami ciągłego obiektu i ciągłego regulatora są odpowiednio $K_O(s) = 1/s(\tau s + 1)$ oraz $K_R(s) = k$. Dla schematu systemu dyskretnego pokazanego na tym samym rysunku znajdujemy transmitancję obiektu dyskretnego $\bar{K}_O(z) = (z-1)Te^{-T/\tau}/z(z-e^{-T/\tau})$, patrz ćwiczenie 9.7.5, oraz $\bar{K}_R(z) = k$. Wielomianem charakterystycznym zamkniętego systemu dyskretnego jest zatem $k(z-1)Te^{-T/\tau} + z(z-e^{-T/\tau})$, czyli $z^2 + (kT-1)e^{-T/\tau}z - kTe^{-T/\tau}$. Zastosowanie odwzorowania $z = (w+1)/(w-1)$ i skorzystanie z kryterium Hurwitza, patrz przykład 11.4.8, doprowadza do nierówności $-1/Te^{-T/\tau} < k < 1/2T$, których spełnienie jest równoważne ze stabilnością systemu regulacji.

Rozdział 14

Sygnaly losowe w systemach dyskretnych

14.1. Wprowadzenie

Zakładamy teraz, że stabilny system o transmitancji $K(z)$ jest pobudzany stacjonarnym procesem stochastycznym U_n drugiego rzędu, patrz rys. 14.1. Najpierw przyjmujemy, że jest on białym szumem, a w kolejnym podrozdziale, że jest on skorelowany. Przypominamy ponadto, że E oznacza wartość oczekiwaną.



Rys. 14.1. System dyskretny o losowym sygnale wejściowym

14.2. System pobudzany białym szumem

Niech teraz U_n będzie białym szumem o zerowej średniej (czyli takim, że $EU_n = 0$), tzn. procesem o funkcji korelacji $R_U(n) = \sigma_U^2 \delta_n$. Zbadamy teraz własności losowego sygnału wyjściowego, tzn. wyznaczmy jego funkcję korelacji, gęstość widmową oraz funkcję korelacji pomiędzy wejściem i wyjściem. Pamiętając, że $k_n = 0$ dla $n < 0$, wykażemy teraz, że:

- Y_n jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu,
- $EY_n = 0, EY_n^2 = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2$,
- $R_Y(n) = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{i-n} k_i$,
- $R_Y(n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$,
- $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(e^{j\omega})|^2$,
- $R_{YU}(n) = \sigma_U^2 k_n$.

Zacznijemy od spostrzeżenia, że ze stabilności systemu wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 < \infty$ oraz

$\sum_{n=0}^{\infty} |k_n| < \infty$. Wiedząc, że $Y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i U_{n-i}$, znajdujemy

$$\begin{aligned} EY_n^2 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j E\{U_{n-i} U_{n-j}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j R_U(i-j) \\ &= \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \delta_{i-j} = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $EY_n = 0$, wykazaliśmy zatem prawdziwość punktów a) i b). Na podstawie definicji funkcji korelacji, patrz (E.3),

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= E\{Y_n Y_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j E\{U_{n-i} U_{-j}\} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \delta_{n-i+j} = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{i-n} k_i, \end{aligned}$$

skąd wynika c).

Ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} |k_i| < \infty$, więc $\sum_{i=n}^{\infty} |k_i| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem

$$|R_Y(n)| = \sigma_U^2 \left| \sum_{i=n}^{\infty} k_{i-n} k_i \right| \leq \sigma_U^2 \max_n |k_n| \sum_{i=n}^{\infty} |k_i|,$$

co dowodzi prawdziwości d). Po wyliczeniu transformaty Fouriera funkcji korelacji otrzymujemy, patrz (E.4),

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sigma_U^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{n+p} k_p e^{-j\omega n} = \sigma_U^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{n+p} e^{-j\omega(n+p)} k_p e^{j\omega p} \\ &= \sigma_U^2 \bar{K}(\omega) \bar{K}(-\omega), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{K}(\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej k_n systemu. Wiedząc, że $\bar{K}(\omega) = K(e^{j\omega})$ oraz $\bar{K}(-\omega) = K^*(e^{j\omega})$, możemy napisać $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(e^{j\omega})|^2$, co oznacza, że e) jest prawdziwe. Na koniec zauważmy, że

$$R_{YU}(n) = E\{Y_n U_0\} = \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} E\{U_i U_0\} = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} \delta_i = \sigma_U^2 k_n,$$

co oznacza, że f) także jest prawdziwe.

Przykład 14.2.1. Niech U_n będzie białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji δ_n i niech $K(z) = z/(z - \lambda)$, $|\lambda| < 1$. Ponieważ $k_n = \lambda^n$ dla $n \geq 0$ (oraz $k_n = 0$ dla $n < 0$), a więc $EY_n = 0$, $EY_n^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i} = 1/(1 - \lambda^2)$ oraz ponadto $R_Y(n) = \sum_{i=n}^{\infty} k_{i-n} k_i = \lambda^{-n} \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^{2j} = \lambda^n / (1 - \lambda^2)$. Gęstością widmową jest natomiast $S_Y(\omega) = |K(e^{j\omega})|^2 = 1/(\lambda^2 - 2\lambda \cos \omega + 1)$.

Ćwiczenie 14.2.1. Wykazać, że jeśli sygnał wejściowy U_n jest stacjonarnym, białym szumem o średniej m_U i funkcji korelacji $R_U(n) = \sigma_U^2 \delta_n + m_U^2$, to:

- $EY_n = m_U \sum_{i=0}^{\infty} k_i$,
- $\text{var}[Y_n] = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2$,
- $EY_n^2 = m_U^2 (\sum_{i=0}^{\infty} k_i)^2 + \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2$,
- $R_Y(n) = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{i-n} k_i + m_U^2 (\sum_{i=0}^{\infty} k_i)^2$,
- $R_Y(n) \rightarrow m_U^2 (\sum_{i=0}^{\infty} k_i)^2$, gdy $n \rightarrow \infty$,
- $R_{YU}(n) = \sigma_U^2 k_n + m_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i$.

14.3. System przy pobudzeniu skorelowanym

Niech teraz U_n będzie procesem o zerowej średniej i funkcji korelacji $R_U(n)$. Pokażemy, że:

- Y_n jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu, $EY_n = 0$,
- $R_Y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j R_U(n-i+j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_{j-n} R_U(j-i)$,
- $R_Y(n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$,
- $S_Y(\omega) = |K(e^{j\omega})|^2 S_U(\omega)$,
- $R_{YU}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i R_U(n-i)$, czyli $S_{YU}(\omega) = K(e^{j\omega}) S_U(\omega)$.

Jest oczywiste, że

$$EY_n^2 = \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=-\infty}^n k_{n-i} k_{n-j} E\{U_i U_j\} = \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=-\infty}^n k_{n-i} k_{n-j} R_U(i-j).$$

Ponieważ $|R_U(n)| \leq EU_n^2$, patrz podrozdział E.2, zatem powyższa wartość jest ograniczona przez

$$E\{U_n^2\} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |k_i k_j| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |k_i| \right)^2 EU_n^2.$$

Ponieważ ponadto $EY_n = 0$, więc zachodzi a). Dalej

$$R_Y(n) = E\{Y_n Y_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j E\{U_{n-i} U_{-j}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j R_U(n-i+j),$$

skąd wynika b). Punkt c) weryfikujemy jak w podrozdziale 8.2. Aby dowieść d) zauważamy, że

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} k_p k_q R_U(n-p+q) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} k_p e^{-j\omega p} k_q e^{j\omega q} R_U(n-p+q) e^{-j\omega(n-p+q)} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_p e^{-j\omega p} \sum_{q=-\infty}^{\infty} k_q e^{j\omega q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_U(n) e^{-j\omega n} \\ &= K(e^{j\omega}) K(e^{-j\omega}) S_U(\omega). \end{aligned}$$

Aby wykazać e), wystarczy zauważyć, że

$$R_{YU}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i E\{U_{n-i}U_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i R_U(i-n).$$

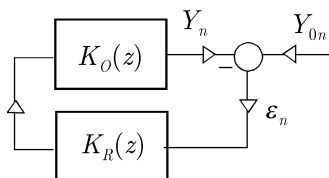
14.4. Regulacja w obecności sygnału losowego

Omówimy teraz zachowanie się systemu automatycznej regulacji w sytuacjach, gdy działają nań sygnały o charakterze losowym. Zakładamy, że system jest stabilny i pamiętamy, że $K(z) = L(z)/M(z)$ jest transmitancją układu otwartego, w której $L(z)$ i $M(z)$ są wielomianami. Ponadto $K_E(z)$ oraz $K_Z(z)$ są odpowiednio transmitancją uchybową i systemu zamkniętego.

14.4.1. Wartość zadana procesem stochastycznym

Zakładamy teraz, że sygnał zadany Y_{0n} jest stacjonarnym procesem stochastycznym o gęstości widmowej $S_{Y_0}(\omega)$, patrz system przedstawiony na rys. 14.2. Z uwagi na to, że $S_E(\omega) = |K_E(j\omega)|^2 S_{Y_0}(\omega)$, dzięki (E.2), możemy napisać

$$E\varepsilon_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_E(e^{j\omega})|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega.$$



Rys. 14.2. Układ automatycznej regulacji. Sygnał wartości zadanej białym szumem

Jeśli sygnał Y_{0n} jest białym szumem o zerowej średniej i wariancji $\sigma_{Y_0}^2$, to

$$E\varepsilon_n^2 = \frac{\sigma_{Y_0}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

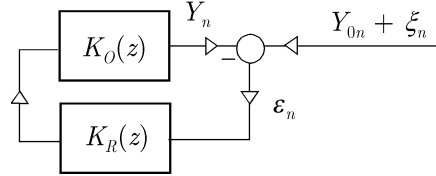
Wartość błędu można wyrazić także następująco:

$$E\varepsilon_n^2 = \sigma_{Y_0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_{En}^2,$$

gdzie $\mathcal{Z}\{k_{En}\} = K_E(z)$.

14.4.2. Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Zbadamy teraz zachowanie się układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy do systemu dociera sygnał zadany Y_{0n} zaszumiony stacjonarnym, losowym sygnałem ξ_n , co przedstawiono na rys. 14.3. Zakładamy, że $E\xi_n = 0$ i przez σ_ξ^2 oznaczamy wariancję zmiennej losowej ξ_n . Zwracamy uwagę, że teraz o jakości systemu świadczy nie uchyb ε_n , lecz błąd $e_n = Y_{0n} - Y_n$. Błąd ten powinien być, w odpowiednim sensie, mały.



Rys. 14.3. Układ automatycznej regulacji. Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Argumentując jak w podrozdziale 8.4, zauważamy

$$e_n = e_{dn} + e_{\xi n},$$

gdzie $\mathcal{Z}\{e_{dn}\} = K_E(z)Y_0(z)$ oraz

$$\mathcal{Z}\{e_{\xi n}\} = [K_E(z) - 1] \mathcal{Z}\{\xi_n\} = -\frac{L(z)}{L(z) + M(z)} \mathcal{Z}\{\xi_n\}$$

i dochodzimy do wniosku, że

$$Ee_\xi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{e_\xi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{L(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 S_\xi(\omega) d\omega.$$

Jeśli ξ_n jest białym szumem, to

$$Ee_\xi^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{L(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega.$$

Operując czasem, możemy napisać

$$Ee_\xi^2 = \sigma_\xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_{Zn}^2,$$

gdzie $\mathcal{Z}\{k_{Zn}\} = K_Z(z)$.

Dodatek A

Transformacja Laplace'a

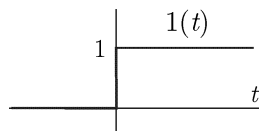
Transformacja Laplace'a jest skutecznym narzędziem, za pomocą którego można rozwiązywać równania różniczkowe. W poniższym dodatku podamy jej definicję i omówimy własności. Zaczniemy jednak od omówienia dwóch sygnałów, a mianowicie skoku jednostkowego i impulsu Diraca.

A.1. Skok jednostkowy i impuls Diraca

Dziedziną sygnałów, które będziemy poddawać transformacji Laplace'a, jest dla nas cała oś czasu $(-\infty, \infty)$. Omówimy teraz dwa podstawowe sygnały, a mianowicie skok jednostkowy i impuls Diraca oraz zbadamy relacje pomiędzy nimi.

Zaczniemy od skoku jednostkowego, patrz rys. A.1, czyli funkcji, którą definiuje się następująco:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0, \\ 1, & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$



Rys. A.1. Skok jednostkowy $1(t)$

Sygnał ten jest oczywiście klasycznie rozumianą funkcją. Zauważmy jednak przy tym, że

$$\frac{d}{dt}1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0, \\ \text{nie istnieje,} & \text{dla } t = 0, \\ 0, & \text{dla } t > 0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

co oznacza, że skok jednostkowy nie jest różniczkowalny na całej prostej, gdyż nie ma pochodnej w punkcie $t = 0$.

Impuls Diraca $\delta(t)$ jest natomiast tworem bardziej skomplikowanym. Nie jest on bowiem funkcją, lecz tzw. dystrybucją, patrz np. [14]. Jako jego definicję przyjmujemy w sposób formalny następujące dwa wzory:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0, \\ \infty, & \text{dla } t = 0, \\ 0, & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0). \quad (\text{A.2})$$

Ten drugi obowiązuje dla każdej funkcji $f(t)$ określonej na prostej $(-\infty, \infty)$, ciągłej w punkcie $\tau = 0$. W szczególności zatem, przyjmując $f(t) = 1$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,$$

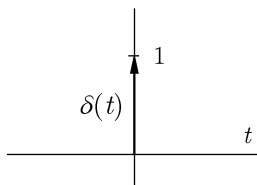
co oznacza, że pole powierzchni pomiędzy impulsem a osią t jest równe 1. Później, przy definicji transformacji Laplace'a, będziemy przyjmować

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

co jest pewną modyfikacją wzoru (A.2).

Jest więc oczywiste, że impuls Diraca $\delta(t)$ nie jest normalnie rozumianą funkcją (gdyby bowiem był, wtedy – z uwagi na pierwszy z powyższych wzorów – należałoby napisać $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 0$).

Graficznie impuls Diraca przedstawiamy jak na rys. A.2.



Rys. A.2. Impuls Diraca $\delta(t)$

Omówimy teraz relacje pomiędzy skokiem jednostkowym i impulsem Diraca. Pokażemy, że impuls Diraca jest specyficznym rozumianą pochodną skoku jednostkowego. Zauważmy bowiem, że z (A.2) wynika

$$\int_{-\infty}^t \delta(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0, \\ 1, & \text{dla } t \geq 0, \end{cases}$$

co sugeruje, że

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t), \quad (\text{A.3})$$

która to formuła wydaje się pozostawać w sprzeczności z (A.1). Istnieje jednak wyjaśnienie tego faktu. Otóż w (A.1) pochodna jest rozumiana klasycznie, czyli funkcyjnie. Pochodną może być w tym wzorze tylko funkcja. W (A.3) dopuszczamy, aby pochodną mógł być także impuls Diraca, czyli dystrybucja. Mówimy zatem, że we wzorze tym pochodna jest rozumiana w sensie dystrybucyjnym. W dalszej części tego dodatku różniczkować będziemy w tym właśnie sensie. Jest ponadto oczywiste, że – w odniesieniu do funkcji różniczkowalnych w klasyczny sposób – obydwa rodzaje pochodnych są identyczne.

Ćwiczenie A.1.1. Jeśli funkcja $f(t)$ ma w punkcie $t = 0$ skok o wysokości α i jest w nim prawostronnie ciągła, to można ją przedstawić w postaci $f(t) = \alpha 1(t) + \varphi(t)$, gdzie $\varphi(t)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $t = 0$. Jeśli zatem $\varphi(t)$ jest ponadto funkcją różniczkowalną, to

$$\frac{d}{dt}f(t) = \alpha\delta(t) + \varphi'(t),$$

gdzie d/dt rozumiemy w sensie dystrybucyjnym, natomiast $\varphi'(t)$ jest pochodną rozumianą funkcyjnie.

Uwaga A.1.1. Impuls Diraca $\delta(t)$ można uważać za swoiście, tzn. dystrybucyjnie, rozumianą granicę ciągu funkcji $\varphi_n(t)$ zdefiniowanych następująco:

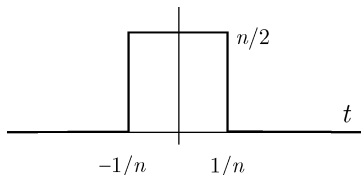
$$\varphi_n(t) = \begin{cases} n/2, & \text{dla } |t| \leq 1/n, \\ 0, & \text{dla } |t| > 1/n, \end{cases}$$

patrz rys. A.3. Funkcja $\varphi_n(t)$ ma kształt prostokąta o podstawie $[-1/n, 1/n]$, wysokości $n/2$ i polu powierzchni równym 1. Jest przy tym oczywiste, że dla każdej funkcji $f(t)$ ciągłej w punkcie $t = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)dt = f(0)$. Przyjmując więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \delta(t) \tag{A.4}$$

(przy czym granicę rozumiemy tutaj nie w sposób klasyczny, lecz dystrybucyjnie), definiujemy $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$ następująco: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)dt = f(0)$. Przyjęliśmy przy tym milcząco, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)dt$. Na koniec zauważmy, że ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(t)dt = \infty$, więc w świetle powyższego jest oczywiste, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t)dt = \infty. \tag{A.5}$$

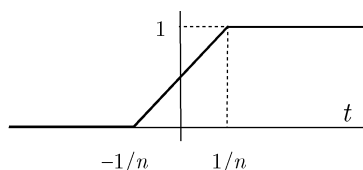


Rys. A.3. Wykres funkcji $\varphi_n(t)$, uwaga A.1.1

Uwaga A.1.2. Nawiązując do poprzedniej uwagi, zauważmy,

$$\int_{-\infty}^t \varphi_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < -1/n, \\ (nt + 1)/2, & \text{dla } -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1, & \text{dla } t > 1/n, \end{cases}$$

patrz także rys. A.4. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \varphi_n(\xi) d\xi = 1(t)$. Wzór ten wraz z (A.4) wyraźnie koresponduje z tym, że $\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = 1(t)$.



Rys. A.4. Wykres funkcji $\int_0^t \varphi_n(\xi) d\xi$, uwaga A.1.2

Uwaga A.1.3. Jako funkcje $\varphi_n(t)$ w ostatnich dwóch uwagach można równie dobrze przyjąć np. $(1/2)e^{-|t|}$ lub $(1/\sqrt{\pi})e^{-t^2}$.

A.2. Definicja i własności

Podamy teraz definicję transformacji Laplace'a i omówimy jej własności.

A.2.1. Definicja

Założmy, że funkcja $f(t)$, gdzie $t \in (-\infty, \infty)$, jest odcinkami ciągła oraz

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\rho t} dt < \infty \quad (\text{A.6})$$

dla pewnego $\rho > 0$. Transformację Laplace'a $F(s)$ definiujemy dla niej następująco, patrz np. [12]:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Przyporządkowuje ona funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej, funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej. Zauważmy, że warunek (A.6) jest spełniony np. przez funkcję $e^{\lambda t}$, λ dowolne, lecz nie jest przez e^{t^2} .

Odwrotna transformacja jest dana wzorem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds,$$

gdzie σ jest tak wielkie, że wszystkie punkty osobliwe funkcji $F(s)$ znajdują się na lewo od prostej $\text{Re } s = \sigma$.

Będziemy także pisać $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, jak również $f(t) \doteq F(s)$. Dla wygody, $f(t)$ będziemy nazywać funkcją oryginalną lub oryginałem funkcji $F(s)$. Zastosujemy konwencję, zgodnie z którą transformaty funkcji np. $f(t)$, $g_i(t)$ oznacza się odpowiednio jako $F(s)$, $G_i(s)$.

A.2.2. Podstawowe własności

Zarówno \mathcal{L} , jak i \mathcal{L}^{-1} są operacjami liniowymi, co oznacza, że

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Podane poniżej, nietrudne do sprawdzenia, reguły są pomocne przy znajdowaniu transformat różnych funkcji:

- zmiana skali, $\alpha \neq 0$,

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right),$$

- transformata całki

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{s} F(s),$$

- różniczkowanie względem s

$$t f(t) \doteq -\frac{d}{ds} F(s),$$

- przesunięcie względem s

$$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(s - \alpha),$$

- transformata splotu

$$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \doteq F(s) G(s),$$

- transformata opóźnienia, $\tau > 0$,

$$f(t - \tau) \doteq e^{-\tau s} F(s).$$

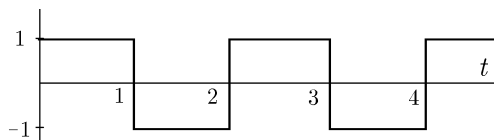
Ćwiczenie A.2.1. Z definicji wynika, że transformata Laplace'a splotu $\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$ jest $\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty f(t - \tau) e^{-s(t - \tau)} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau dt$, która to wielkość jest równa $\int_0^\infty f(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F(s) G(s)$.

Ćwiczenie A.2.2. Wykazać, że $\sum_{n=0}^\infty x(t - nT) \doteq X(s)/(1 - e^{-Ts})$.

Ćwiczenie A.2.3. Wykazać, że jeśli $x(t)$ jest funkcją okresową o okresie T , to jej transformata Laplace'a jest $X(s) = X_T(s)/(1 - e^{-sT})$, gdzie $X_T(s) = \int_0^T x(t) e^{-st} dt$.

Ćwiczenie A.2.4. Funkcja $x(t)$ jest periodyczna, a jej okresem jest T . Wykazać, że $\mathcal{L}\{e^{-at} x(t)\} = X_T(s + a)/(1 - e^{-(s+a)T})$, gdzie $X_T(s) = \int_0^T x(t) e^{-st} dt$.

Ćwiczenie A.2.5. Korzystając z rezultatu otrzymanego w ćwiczeniu A.2.3, wykazać, że transformatą Laplace'a fali prostokątnej o kształcie przedstawionym na rys. A.5 jest $(1 - e^{-s})^2 / s(1 - e^{-2s})$.



Rys. A.5. Fala prostokątna; patrz ćwiczenie A.2.5

A.2.3. Transformata pochodnej

Omówimy teraz transformatę pochodnej. Zaczniemy od funkcji $f(t)$ różniczkowalnej na całej osi czasu, czyli od funkcji, dla której pochodna funkcyjna i dystrybucyjna są identyczne. Całkując przez części, otrzymujemy

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st}|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Zakładając następnie, że, dla pewnego λ , $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\lambda t} = 0$, otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}f(t) \hat{=} sF(s) - f(0). \quad (\text{A.7})$$

Wzór ten nie stosuje się jednak do skoku jednostkowego, gdyż

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = \mathfrak{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

natomiast

$$s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0) = s\frac{1}{s} - 1 = 0,$$

co oznacza, że

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} \neq s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0).$$

Przyczyną tego stanu jest to, że wzór (A.7) dotyczy funkcji $f(t)$ mającej pochodną rozumianą klasycznie. Nie ma on zatem zastosowania do skoku jednostkowego, którego pochodną rozumiemy w sensie dystrybucyjnym.

Zauważmy jednak, że pewna modyfikacja wzoru (A.7), a mianowicie $f'(t) \hat{=} sF(s) - f(0-)$, gdzie $f(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)$, jest prawdziwa zarówno dla funkcji $f(t)$ różniczkowalnej w punkcie $t = 0$ (gdyż $f(0) = f(0-)$), jak i dla $f(t) = 1(t)$ (gdyż $1(0-) = 0$). Z uwagi na powyższe, patrz także ćwiczenie A.1.1, jest prawdziwa zatem następująca reguła, w której dopuszczamy różniczkowanie w sensie dystrybucyjnym:

- transformata pochodnej

$$f'(t) \hat{=} sF(s) - f(0-). \quad (\text{A.8})$$

Przykład A.2.1. Dwukrotne zastosowanie reguły (A.8) doprowadza do wzoru

$$f''(t) \hat{=} s^2 F(s) - sf(0-) - f'(0-).$$

Ogólnie

$$f^{(n)}(t) \hat{=} s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - \dots - sf^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-).$$

A.3. Transformaty wybranych funkcji

Zanim wyznaczymy transformaty pewnych funkcji zauważmy, że transformaty funkcji $f(t)$, określonej na całej prostej, i funkcji równej $1(t)f(t)$ są identyczne, bowiem o transformacie decydują własności funkcji na półosi $[0, \infty)$. Oznacza to, że

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)f(t)\}.$$

Dla wygody zatem zamiast $1(t)f(t) \hat{=} F(s)$ będziemy pisać po prostu $f(t) \hat{=} F(s)$.

Znajdziemy teraz transformaty kilku funkcji. Zaczniemy od impulsu Diraca $\delta(t)$. Ponieważ $\int_0^\infty \delta(t)e^{-st} dt = 1$, a zatem

$$\delta(t) \hat{=} 1.$$

Ponieważ $1(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau$, zatem korzystając z reguły o transformacie całki, otrzymujemy

$$1(t) \hat{=} \frac{1}{s}. \quad (\text{A.9})$$

Po zastosowaniu reguły o przesunięciu względem s , otrzymujemy

$$e^{at} \hat{=} \frac{1}{s-a}, \quad (\text{A.10})$$

natomiast korzystając $n-1$ razy z reguły o różniczkowaniu względem s , otrzymujemy

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \hat{=} \frac{1}{s^n}. \quad (\text{A.11})$$

Wykorzystanie reguły o przesunięciu względem s doprowadza do wzoru

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at} \hat{=} \frac{1}{(s-a)^n}. \quad (\text{A.12})$$

Powyższy wynik możemy również otrzymać, stosując wobec (A.10) $n-1$ razy regułę o różniczkowaniu względem s .

Ponieważ $2j \sin \omega t = e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}$ i $2 \cos \omega t = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}$, więc stosując (A.10), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin \omega t &\hat{=} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \\ \cos \omega t &\hat{=} \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Wykorzystanie reguły o przesunięciu względem s doprowadza do wzorów:

$$e^{\sigma t} \sin \omega t \hat{=} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2},$$

$$e^{\sigma t} \cos \omega t \hat{=} \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2},$$

natomiast odwołanie się do reguły o różniczkowaniu względem s daje

$$t \sin \omega t \hat{=} \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

oraz

$$t \cos \omega t \hat{=} \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Stosując teraz regułę o przesunięciu względem s , otrzymujemy:

$$te^{at} \sin \omega t \hat{=} \frac{2\omega(s - a)}{((s - a)^2 + \omega^2)^2},$$

$$te^{at} \cos \omega t \hat{=} \frac{(s - a)^2 - \omega^2}{((s - a)^2 + \omega^2)^2}.$$

Pamiętając, że $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t$ i $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t$, dochodzimy do wniosku, że

$$\sin(\omega t + \varphi) \hat{=} \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

oraz

$$\cos(\omega t + \varphi) \hat{=} \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2},$$

co możemy zapisać następująco:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) \hat{=} \frac{as + b\omega}{s^2 + \omega^2},$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \varphi) \hat{=} \frac{bs - a\omega}{s^2 + \omega^2},$$

gdzie $\varphi = \arcsin(a/\sqrt{a^2 + b^2}) = \arccos(b/\sqrt{a^2 + b^2})$.

Przykład A.3.1. Oznaczając $\alpha = e^{j\varphi}$ i zauważając, że $\alpha/(s - j\omega) + \bar{\alpha}/(s + j\omega) \hat{=} e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}$, stwierdzamy, że

$$\frac{\alpha}{s - j\omega} + \frac{\bar{\alpha}}{s + j\omega} \hat{=} 2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (\text{A.13})$$

Przykład A.3.2. Oznaczmy $\alpha = e^{j\varphi}$. Korzystając z wzoru (A.12), łatwo otrzymujemy $\alpha/(s - j\omega)^n + \bar{\alpha}/(s + j\omega)^n \hat{=} (1/(n - 1)!)t^{n-1} (e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)})$, skąd wynika

$$\frac{\alpha}{(s - j\omega)^n} + \frac{\bar{\alpha}}{(s + j\omega)^n} \hat{=} \frac{2}{(n - 1)!} t^{n-1} \cos(\omega t + \varphi). \quad (\text{A.14})$$

Przykład A.3.3. Niech $\eta = \sigma + j\omega$ oraz $\alpha = e^{j\varphi}$. Korzystając z ostatnich dwóch przykładów i stosując regułę o przesunięciu względem s , otrzymujemy:

$$\frac{\alpha}{s - \eta} + \frac{\bar{\alpha}}{s - \bar{\eta}} \hat{=} 2e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\alpha}{(s - \eta)^n} + \frac{\bar{\alpha}}{(s - \bar{\eta})^n} \hat{=} \frac{2}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (\text{A.16})$$

Ćwiczenie A.3.1. Niech $l_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $L_n(t) = (1/n!)e^t (d^n/dt^n)(t^n e^{-t})$ są tzw. wielomianami Laguerre'a¹. Funkcje $l_n(t)$ tworzą zupełny układ funkcji ortonormalnych na półprostej $[0, \infty)$, co oznacza, że $\int_0^\infty l_n(t)l_m(t)dt = 0$ dla $n \neq m$ oraz $\int_0^\infty l_n^2(t)dt = 1$. Sprawdzić, że $L_0(t) = 1$, $L_1(t) = t - 1$, $L_2(t) = t^2/2 - 2t + 1$, itd. Wykazać, że $L_n(t) \hat{=} (s-1)^n/s^{n+1}$ i, siłą rzeczy, $l_n(t) \hat{=} 2(2s-1)^n/(2s+1)^{n+1}$. Jeśli zatem $k(t) = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n l_n(t)$, to $K(s) = 2 \sum_{n=0}^\infty \alpha_n (2s-1)^n/(2s+1)^{n+1}$.

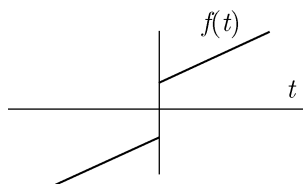
Ćwiczenie A.3.2. Wykazać, że $\log t \hat{=} -(\gamma + \log s)/s$ oraz $1/t \hat{=} -\log s - \gamma$, gdzie $\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \log x dx$ jest tzw. stałą Eulera.

Przykład A.3.4. Transformata Laplace'a może nie być funkcją wymierną, bowiem np. $\delta(t-T) \hat{=} e^{-sT}$, $1(t-T) \hat{=} e^{-sT}/s$, $1/\sqrt{t} \hat{=} \sqrt{\pi}/\sqrt{s}$. Patrz także ćwiczenia A.2.5 i A.3.2.

Przykład A.3.5. Niech

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & \text{dla } t < 0, \\ t+1, & \text{dla } t \geq 0, \end{cases}$$

patrz rys. A.6. Zatem $f(t) = t - 1 + 2 \times 1(t)$ i $f'(t) = 1 + 2\delta(t)$. Ponieważ $f(t) = t + 1$ dla $t \geq 0$, więc $\mathfrak{L}\{f(t)\} = 1/s^2 + 1/s$. Ponadto $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = 1/s + 2$ oraz $f(0-) = -1$. Reguła (A.8) potwierdza się.



Rys. A.6. Wykres funkcji $f(t)$, przykład A.3.5

Uwaga A.3.1. Na mocy definicji przyjmujemy $\delta^{(i)}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{s^i\}$, $i = 1, 2, \dots$, co nazywamy i -tą pochodną impulsu Diraca. Dzięki temu, transformacji Laplace'a można poddawać zarówno funkcje, jak i impuls Diraca wraz z jego pochodnymi, a także ich liniowe kombinacje.

¹G. Sansone, *Orthogonal functions*, Dover, New York 1991.

A.4. Rozkład na ułamki proste, funkcja oryginalna

Przez \bar{s} oznaczamy liczbę sprzężoną względem s , co oznacza, że $\bar{s} = \operatorname{Re} s - j \operatorname{Im} s$. Dla funkcji, powiedzmy $F(s)$, $F^*(s)$ oznacza funkcję sprzężoną względem $F(s)$. Zatem $F^*(s) = \operatorname{Re} F(s) - j \operatorname{Im} F(s)$.

A.4.1. Rozkład na ułamki proste

Funkcję

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

gdzie s jest zespolone, a wszystkie współczynniki a_0, a_1, \dots, a_m są rzeczywiste, przy czym $a_m \neq 0$, nazywa się wielomianem stopnia m . Łatwo sprawdzić, że

$$M(\bar{s}) = M^*(s), \quad (\text{A.17})$$

gdzie $M^*(s)$ oznacza funkcję sprzężoną względem $M(s)$, patrz ćwiczenie A.4.1.

Równanie $M(s) = 0$ ma dokładnie m pierwiastków, które nazywają się także pierwiastkami wielomianu $M(s)$. Oznaczając je przez s_1, s_2, \dots, s_m , można zatem napisać

$$M(s) = a_m (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_m). \quad (\text{A.18})$$

Pierwiastki te mogą być rzeczywiste lub zespolone. Zauważmy, że $M(s) = 0$ pociąga za sobą równość $M^*(s) = 0$. Wykorzystując (A.17), otrzymujemy $M(\bar{s}) = 0$. Jeśli zatem s jest zespolonym pierwiastkiem wielomianu $M(s)$, to \bar{s} także. Pierwiastki zespolone występują zatem parami, w których jeden jest sprzężony względem drugiego. Zarówno pierwiastki rzeczywiste, jak i pary zespolonych pierwiastków sprzężonych mogą być pojedyncze lub wielokrotne. Wykazaliśmy więc następujący lemat:

Lemat A.4.1. *Pierwiastki równania $M(s) = 0$ są rzeczywiste lub zespolone, parami sprzężone.*

Funkcję postaci $N(s)/M(s)$, gdzie

$$N(s) = b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0,$$

przy czym $b_n \neq 0$, nazywa się wymierną. W szczególności każdy wielomian jest funkcją wymierną. Inne to np.:

$$\frac{s-4}{s+1}, \quad \frac{s+5}{(s+2)(s-3)}.$$

Mówimy, że $s = -1$ jest biegunem pierwszej, a $s = -2$ i $s = 3$ biegunami drugiej z tych funkcji.

Lemat A.4.2. *Dla funkcji wymiernej $W(s)$ zachodzi równość $W(\bar{s}) = W^*(s)$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z (A.17). ■

Funkcje wymierne postaci

$$\frac{\alpha}{(s-a)^n} \quad \text{oraz} \quad \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + bs + c)^n},$$

$n = 1, 2, \dots$, gdzie a jest rzeczywiste i $b^2 - 4c < 0$, nazywamy ułamkami prostymi. Podamy teraz twierdzenia o rozkładzie funkcji wymiernej $N(s)/M(s)$ na ułamki proste, tzn. o tym, jak ją przedstawić jako liniową kombinację takich ułamków. Dla wygody dopuścimy, aby a mogło być także zespolone. Założymy przy tym, że:

- $n < m$,
- wielomiany $N(s)$ i $M(s)$ nie mają wspólnych pierwiastków.

Twierdzenie A.4.1 (bieguny dowolne). Niech $n < m$, a równanie $M(s) = 0$ ma rozwiązania:

- rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, różne o krotnościach k_1, k_2, \dots, k_p ,
- pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $i = 1, \dots, q$, różne o krotnościach $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_q$ (co oznacza, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2\sum_{i=1}^q \kappa_i = m$). Wówczas

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(s-\eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(s-\bar{\eta}_i)^j} \right], \quad (\text{A.19})$$

gdzie:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right],$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{ds^{\kappa_i-j}} \left[(s - \eta_i)^{\kappa_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right].$$

Ponadto $\alpha_{ik_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej wykażemy poprawność rozkładu, tzn. pokażemy, że istnieją współczynniki α_{ij} , β_{ij} i γ_{ij} takie, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(s-\eta_i)^j} + \frac{\gamma_{ij}}{(s-\bar{\eta}_i)^j} \right], \quad (\text{A.20})$$

a w drugiej je wyznaczymy.

Poprawność rozkładu. Ponieważ pierwiastek ξ_1 ma krotność k_1 , więc $M(s) = (s - \xi_1)^{k_1} R(s)$, gdzie $R(s)$ jest wielomianem stopnia $m - k_1$. Zatem

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N(s)}{(s - \xi_1)^{k_1} R(s)},$$

przy czym $R(\xi_1) \neq 0$. Wykażemy, że istnieją liczba α_{1k_1} i wielomian $N_1(s)$ stopnia nie wyższego niż $n - 1$ takie, że

$$\frac{N(s)}{(s - \xi_1)^{k_1} R(s)} = \frac{\alpha_{1k_1}}{(s - \xi_1)^{k_1}} + \frac{N_1(s)}{(s - \xi_1)^{k_1-1} R(s)},$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$\frac{N(s) - \alpha_{1k_1} R(s)}{(s - \xi_1)^{k_1} R(s)} = \frac{N_1(s)}{(s - \xi_1)^{k_1 - 1} R(s)}.$$

Ma to miejsce, gdy współczynnik α_{1k_1} jest taki, że $s - \xi_1$ jest dzielnikiem wielomianu $N(s) - \alpha_{1k_1} R(s)$, tzn. wtedy, gdy ξ_1 jest rozwiązaniem równania $N(s) - \alpha_{1k_1} R(s) = 0$. Wówczas bowiem

$$N_1(s) = \frac{N(s) - \alpha_{1k_1} R(s)}{s - \xi_1}$$

jest wielomianem. Ma to faktycznie miejsce dla

$$\alpha_{1k_1} = \frac{N(\xi_1)}{R(\xi_1)}.$$

Zatem

$$\frac{N(s)}{M(s)} - \frac{\alpha_{1k_1}}{(s - \xi_1)^{k_1}} = \frac{N_1(s)}{(s - \xi_1)^{k_1 - 1} R(s)}.$$

W następnym kroku postępujemy podobnie wobec prawej strony powyższej równości, tzn. wykazujemy, że istnieje α_{1k_1-1} oraz wielomian $N_2(s)$ stopnia nie wyższego niż $n - 2$ takie, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} - \frac{\alpha_{1k_1}}{(s - \xi_1)^{k_1}} - \frac{\alpha_{1,k_1-1}}{(s - \xi_1)^{k_1-1}} = \frac{N_2(s)}{(s - \xi_1)^{k_1-2} R(s)}.$$

Postępując w ten sposób dowodzimy, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} - \sum_{j=1}^{k_1} \frac{\alpha_{1j}}{(s - \xi_1)^j} = \frac{N_{k_1}(s)}{R(s)},$$

gdzie $N_{k_1}(s)$ i $R(s)$ są wielomianami stopni nie wyższych niż $n - k_1$ i $m - k_1$. Powtarzając tę argumentację wobec pozostałych biegunów funkcji $N(s)/M(s)$, dochodzimy do wniosku, że rozkład (A.20) jest poprawny.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia współczynników rozkładu. Zacznijmy od ξ_i . Z rozkładu (A.20) wynika, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + R_i(s) = \frac{\alpha_{ik_i}}{(s - \xi_i)^{k_i}} + \frac{\alpha_{i,k_i-1}}{(s - \xi_i)^{k_i-1}} + \dots + \frac{\alpha_{i1}}{s - \xi_i} + R_i(s),$$

gdzie $R_i(s)$ jest funkcją wymierną nie mającą bieguna w punkcie ξ_i . Zatem

$$(s - \xi_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} = \alpha_{ik_i} + \sum_{j=1}^{k_i-1} \alpha_{ij} (s - \xi_i)^{k_i-j} + (s - \xi_i)^{k_i} R_i(s),$$

skąd wnioskujemy o prawdziwości wzoru określającego α_{ik_i} . Różniczkując powyższe wyrażenie $k_i - j$ razy, znajdujemy

$$\frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right] = (k_i - j)! \alpha_{ij} + \psi_i(s),$$

gdzie $\psi_i(\xi_i) = 0$, co prowadzi do wniosku o poprawności wzoru określającego współczynniki α_{ij} , $j = 1, \dots, k_i - 1$. Z tej samej zasady wynika prawidłowość formuły podającej współczynniki β_{ij} . Jest ponadto oczywiste, że

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i - j}}{ds^{\kappa_i - j}} \left[(s - \bar{\eta}_i)^{\kappa_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right].$$

Należy zatem jeszcze pokazać, że ma miejsce równość $\gamma_{ij} = \bar{\beta}_{ij}$. Zauważmy więc w tym celu, że $\beta_{ij} = W(\eta_i)/V(\eta_i)$ oraz $\gamma_{ij} = W(\bar{\eta}_i)/V(\bar{\eta}_i)$, gdzie $W(s)$ i $V(s)$ są pewnymi wielomianami. Korzystając teraz z lematu A.4.2, wnioskujemy, że $\beta_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}$ oraz stwierdzamy, że wszystkie współczynniki rozkładu są poprawnie wyznaczone.

Pozostało jeszcze wykazanie, że współczynniki przy ułamkach

$$\frac{1}{(s - \xi_1)^{k_1}}, \dots, \frac{1}{(s - \xi_p)^{k_p}}$$

oraz

$$\frac{1}{(s - \eta_1)^{\kappa_1}}, \frac{1}{(s - \bar{\eta}_1)^{\kappa_1}}, \dots, \frac{1}{(s - \eta_q)^{\kappa_q}}, \frac{1}{(s - \bar{\eta}_q)^{\kappa_q}}$$

nie są zerowe. Jest to oczywiste. Jeśli bowiem przynajmniej jeden z nich równałby się zero, to mianownik funkcji wymiernej po prawej stronie w (A.19) miałby stopień niższy od m , co prowadziłoby do sprzeczności. Dowód został więc zakończony. ■

W sytuacji, gdy bieguny są jednokrotne, prawdziwe jest następujące twierdzenie, będące w istocie wnioskiem z poprzedniego:

Twierdzenie A.4.2 (bieguny jednokrotne). *Załóżmy, że $n < m$. Niech wielomian $M(s)$ ma wszystkie pierwiastki jednokrotne, a dokładniej:*

- rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ oraz
- pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $i = 1, \dots, q$ (co oznacza, że $p + q = m$). Wówczas

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{s - \xi_i} + \sum_{i=1}^q \left[\frac{\beta_i}{s - \eta_i} + \frac{\bar{\beta}_i}{s - \bar{\eta}_i} \right], \quad (\text{A.21})$$

gdzie:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N(\xi_i)}{M'(\xi_i)},$$

$$\beta_i = \lim_{s \rightarrow \eta_i} (s - \eta_i) \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N(\eta_i)}{M'(\eta_i)}.$$

Ponadto $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, p$ oraz $\beta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Pierwsze części wzorów określających współczynniki α_i oraz β_i są poprawne, co wynika z poprzedniego twierdzenia. Aby wykazać prawdziwość drugich, zauważamy, że

$$\lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) \frac{N(s)}{M(s)} = N(\xi_i) \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{s - \xi_i}{M(s)} = N(\xi_i) \frac{1}{M'(\xi_i)},$$

co jest rezultatem zastosowania reguły de'Hospitala.

Należy jeszcze wykazać, że wszystkie współczynniki rozkładu są różne od zera. Zauważmy, że jeśli któryś równa się zero, to prawa strona w (A.21) jest funkcją wymierną, której wielomian znajdujący się w mianowniku jest stopnia niższego niż m , co jest niemożliwe. Dowód został więc zakończony. ■

Ćwiczenie A.4.1. Aby wykazać prawdziwość (A.17), oznaczmy $s = \rho e^{j\omega}$ i zauważmy, że $\bar{s}^n = \rho^n e^{-jn\omega}$ oraz $\overline{s^n} = \rho^n e^{-j\omega n}$. Wynika stąd, że $\bar{s}^n = \overline{s^n}$. W rezultacie zatem $M(\bar{s}) = \sum_{n=0}^m a_n \bar{s}^n = \sum_{n=0}^m a_n \overline{s^n} = \sum_{n=0}^m \overline{a_n s^n} = M^*(s)$, czyli $M(\bar{s}) = M^*(s)$.

Przykład A.4.1. Jest oczywiste, że

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+3},$$

dla wszystkich rzeczywistych $s \in (-\infty, \infty)$ z wyjątkiem dwóch, a mianowicie $s = -1$ i $s = -3$. Stąd $1 = a(s+3) + b(s+1)$. Zatem $1 = (a+b)s + 3a+b$, skąd wynika, że $a+b=0$ oraz $3a+b=1$. Zatem $a=1/2$ i $b=-1/2$.

A.4.2. Twierdzenia o funkcji oryginalnej

Pokażemy teraz, w jaki sposób wyznaczyć oryginał funkcji wymiernej.

Twierdzenie A.4.3 (bieguny dowolne). Załóżmy, że $n < m$. Niech pierwiastki wielomianu $M(s)$, a także współczynniki α_{ij} oraz β_{ij} będą jak w twierdzeniu A.4.1. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{N(s)}{M(s)} &\hat{=} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

gdzie $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$. Ponadto $\alpha_{ik_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Dowód jest prosty. Wystarczy bowiem skorzystać z twierdzenia A.4.1 oraz (A.12) i (A.16). ■

Twierdzenie A.4.4 (bieguny jednokrotne). Załóżmy, że $n < m$. Niech pierwiastki wielomianu $M(s)$, α_i oraz β_i będą jak w twierdzeniu A.4.2. Wówczas

$$\frac{N(s)}{M(s)} \hat{=} \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q |\beta_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

gdzie $\varphi_i = \arg \beta_i$. Ponadto $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z twierdzenia A.4.2, (A.10) i (A.15). ■

Przykład A.4.2. Jest oczywiste, że

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}.$$

Stąd $1 = a(s+2) + b(s+1)$. Podstawiając kolejno $s = -1$ oraz $s = -2$, otrzymujemy $a = 1$ i $b = -1$. Oryginałem jest więc $e^{-t} - e^{-2t}$.

Przykład A.4.3. Wychodząc z rozkładu

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1},$$

dostajemy $1 = A(s+1) + Bs$. Podstawienia $s = 0$ oraz $s = -1$ dają $A = 1$ oraz $B = -1$. Funkcja oryginalna jest zatem równa $1 - e^{-t}$.

Przykład A.4.4. Ponieważ

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\beta}{s+2}, \quad (\text{A.23})$$

więc $1 = \alpha_2(s+2) + \alpha_1(s+1)(s+2) + \beta(s+1)^2$. Podstawienia $s = -1$ oraz $s = -2$ dają $\alpha_2 = 1$ oraz $\beta = 1$. Zaczynając jeszcze raz od (A.23), otrzymujemy

$$\frac{1}{s+2} = \alpha_2 + \alpha_1(s+1) + \beta \frac{(s+1)^2}{s+2},$$

a następnie różniczkując obie strony

$$\frac{-1}{(s+2)^2} = \alpha_1 + \beta \frac{d}{ds} \frac{(s+1)^2}{s+2}.$$

Ponieważ

$$\left. \frac{d}{ds} \frac{(s+1)^2}{s+2} \right|_{s=-1} = 0,$$

zatem podstawienie $s = -1$ daje $\alpha_1 = -1$. Ostatecznie

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2},$$

skąd wynika że oryginałem jest $te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$.

Przykład A.4.5. Ponieważ

$$\frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-2},$$

a zatem

$$s+3 = a(s-2) + b(s+1).$$

Wyznamy teraz współczynniki rozkładu trzema metodami:

Sposób 1. Grupując wyrazy, otrzymujemy

$$s + 3 = (a + b)s + (-2a + b).$$

Porównanie współczynników wielomianów po obu stronach prowadzi do układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, a mianowicie: $a + b = 1$ oraz $-2a + b = 3$, skąd wynika, że $a = -2/3$ i $b = 5/3$.

Sposób 2. Ponieważ funkcje po obu stronach są sobie równe dla wszystkich s , więc podstawiając np. $s = 0$ i $s = 1$, otrzymujemy także dwa równania z dwiema niewiadomymi: $3 = -2a + b$ oraz $4 = -a + 2b$.

Sposób 3. Z uwagi na to, że funkcje po obu stronach są sobie równe dla wszystkich s , to są sobie równe w szczególności dla $s = -1$ i $s = 2$. Wynika stąd bezpośrednio, że $2 = -3a$ i $5 = 3b$.

Wykazaliśmy więc, że

$$\frac{s + 3}{(s + 1)(s - 2)} = -\frac{2}{3} \frac{1}{s + 1} + \frac{5}{3} \frac{1}{s - 2},$$

skąd wynika, że oryginałem jest $(-2/3)e^{-t} + (5/3)e^{-2t}$.

Przykład A.4.6. Rozkład

$$\frac{s + 1}{(s + 1)^2(s + 2)} = \frac{\alpha_2}{(s + 1)^2} + \frac{\alpha_1}{s + 1} + \frac{\beta}{s + 2}$$

jest oczywisty. Zauważmy, że $s = -1$ jest miejscem zerowym wielomianów w liczniku i mianowniku. Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia, zaczynamy od

$$s + 1 = \alpha_2(s + 2) + \alpha_1(s + 1)(s + 2) + \beta(s + 1)^2,$$

skąd po podstawieniu $s = -1$ i $s = -2$ otrzymujemy $\alpha_2 = 0$ i $\beta = -1$. Postępując dalej zgodnie z metodą, otrzymujemy

$$\frac{s + 1}{s + 2} = \alpha_2 + \alpha_1(s + 1) + \beta \frac{(s + 1)^2}{s + 2},$$

co po zróżniczkowaniu daje

$$\frac{1}{(s + 2)^2} = \alpha_1 + \beta \frac{d}{ds} \frac{(s + 1)^2}{s + 2}.$$

Podstawiając $s = -1$, dostajemy $\alpha_1 = 1$. Ostatecznie

$$\frac{s + 1}{(s + 1)^2(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2},$$

skąd wynika, że oryginałem jest $e^{-t} - e^{-2t}$. Warto teraz sprawdzić, że rozwinięcie funkcji, którą otrzymuje się po usunięciu bieguna w punkcie -1 , jest takie same, tzn.

$$\frac{1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}.$$

Przykład A.4.7. Dla $a \neq b$ prawdziwa jest tożsamość

$$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}.$$

Zatem

$$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)} \hat{=} e^{at} - e^{bt}.$$

Przykład A.4.8. Niech $W(s) = s^2 + ps + q$ i niech $\Delta = p^2 - 4q$, $\sigma = -p/2$ oraz $\omega = (1/2)\sqrt{|\Delta|}$. Ponieważ $s_{1,2} = (1/2)(-p \pm \sqrt{\Delta})$ są pierwiastkami wielomianu $W(s)$, możemy zatem napisać $W(s) = (s-s_1)(s-s_2)$. Niech $\Delta > 0$. Pierwiastki są różne, rzeczywiste i dlatego, korzystając z ostatniego przykładu, otrzymujemy

$$\frac{1}{s^2 + ps + q} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-(p/2)t} \left(e^{(\sqrt{\Delta}/2)t} - e^{-(\sqrt{\Delta}/2)t} \right) = \frac{1}{2\omega} e^{\sigma t} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

Dla $\Delta < 0$ pierwiastki $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ są zespolone. Zatem

$$\frac{1}{s^2 + ps + q} \hat{=} \frac{1}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t.$$

Dla $\Delta = 0$ pierwiastki $s_{1,2} = -p/2$ są rzeczywiste. Wynika stąd, że

$$\frac{1}{s^2 + ps + q} \hat{=} t e^{-(p/2)t} = t e^{\sigma t}.$$

Przykład A.4.9. Jak nietrudno sprawdzić $1/s^n(s-1) = 1/(s-1) - \sum_{k=0}^{n-1} 1/s^{k+1}$, skąd wynika, że $a^n/s^n(s-a) = 1/(s-a) - \sum_{k=0}^{n-1} a^k/s^{k+1}$ oraz ponadto $a^n/s(s+a)^n = 1/s - \sum_{k=0}^{n-1} a^k/(s+a)^{k+1}$. Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{s^n(s-a)} &\hat{=} e^{at} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} t^k, \\ \frac{a^n}{s(s+a)^n} &\hat{=} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} t^k e^{-at}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Przykład A.4.10. Przez rozkład na ułamki proste można sprawdzić, że

$$\frac{(n-1)!}{(s+1)^n(s-1)^n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} D(n; k) \frac{1}{2^{2n-k-1}} \left[\frac{1}{(s+1)^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(s-1)^{k+1}} \right],$$

gdzie $D(n; k) = (2n-k-2)!/(n-k-1)!$. Zamieniając następnie s na $s/j\omega$, otrzymujemy

$$\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(2\omega)^{2n}}{(s^2 + \omega^2)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} j^{k+1} D(n; k) (2\omega)^{k+1} \left[\frac{1}{(s+j\omega)^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(s-j\omega)^{k+1}} \right].$$

Zauważając, że

$$\frac{1}{(s+j\omega)^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(s-j\omega)^{k+1}} \hat{=} \frac{1}{k!} t^k [e^{j\omega t} + (-1)^{k+1} e^{-j\omega t}]$$

oraz

$$e^{j\omega t} + (-1)^{k+1} e^{-j\omega t} = \begin{cases} 2j \sin \omega t, & \text{dla } k = 0, 2, 4, \dots, \\ 2 \cos \omega t, & \text{dla } k = 1, 3, 5, \dots, \end{cases}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} (n-1)! (2\omega)^{2n} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^n} &\hat{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ parzyste}}}^{n-1} j^{k+2} 2D(n; k) (2\omega)^{k+1} \frac{1}{k!} t^k \sin \omega t \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ nieparzyste}}}^{n-1} j^{k+1} 2D(n; k) (2\omega)^{k+1} \frac{1}{k!} t^k \cos \omega t. \end{aligned}$$

Ćwiczenie A.4.2. Korzystając z przykładu A.4.10 i reguły o różniczkowaniu względem s , znaleźć oryginał funkcji $s/(s^2 + \omega^2)^n$.

Ćwiczenie A.4.3. Sprawdzić, że $1/(Ts + 1) \hat{=} 1 - e^{-t/T}$.

Ćwiczenie A.4.4. Sprawdzić, że $ab/s(s+a)(s+b) \hat{=} 1 + b/(a-b)e^{-at} - a/(a-b)e^{-bt}$.

Ćwiczenie A.4.5. Sprawdzić, że $(b-a)/(s+a)(s+b) \hat{=} e^{-at} + e^{-bt}$.

Ćwiczenie A.4.6. Sprawdzić, że $\omega^2/s(s^2 + \omega^2) \hat{=} 1 - \cos \omega t$.

A.5. Własności graniczne

W poniższych dwóch twierdzeniach nazywanych granicznymi s jest zmienną rzeczywistą, natomiast $f(t)$ funkcją określoną na półprostej $t \in [0, \infty)$.

Twierdzenie A.5.1 (Abel). Niech funkcja $f(t)$ spełnia warunek (A.6). Jeśli granica $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ istnieje, to

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Dowód. Niech $s > 0$. Ponieważ $s \int_0^\infty e^{-st} dt = 1$, więc, dla $\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, możemy napisać $sF(s) - \alpha = s \int_0^\infty (f(t) - \alpha) e^{-st} dt = V_T(s) + W_T(s)$, w której to równości $V_T(s) = s \int_0^T (f(t) - \alpha) e^{-st} dt$, $W_T(s) = s \int_T^\infty (f(t) - \alpha) e^{-st} dt$. Jest przy tym oczywiste, że $|V_T(s)| \leq s \int_0^T e^{-st} dt \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - \alpha| = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - \alpha|$. Uwzględniając (A.6) i oznaczając $\int_0^\infty |f(t) - \alpha| e^{-\rho t} dt = c$, otrzymujemy następująco, dla $s > \rho$, $|W_T(s)| \leq s \int_T^\infty |f(t) - \alpha| e^{-\rho t} e^{-(s-\rho)t} dt \leq s e^{-(s-\rho)T} \int_T^\infty |f(t) - \alpha| e^{-\rho t} dt \leq c s e^{-(s-\rho)T} = c e^{\rho T} s e^{-sT}$.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} |f(t) - \alpha| = 0$, zatem istnieje T , zależne od ε , takie, że $|V_T(s)| < \varepsilon/2$. Dla takiego T istnieje s tak duże, że $|W_T(s)| < \varepsilon/2$. Wykazaliśmy zatem, że dla każdego ε istnieje s tak duże, że $|sF(s) - \alpha| < \varepsilon$. Ponieważ ε może być dowolnie małe, a więc wynika stąd teza. ■

Twierdzenie A.5.2 (Abel). *Niech funkcja $f(t)$ spełnia warunek (A.6). Jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ istnieje, to*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

Dowód. Załóżmy, że $s > 0$. Ponieważ $s \int_0^\infty e^{-st} dt = 1$, zatem, dla $\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, łatwo otrzymujemy $sF(s) - \gamma = s \int_0^\infty (f(t) - \gamma) e^{-st} dt = P_T(s) + R_T(s)$, przy czym $P_T(s) = s \int_0^T (f(t) - \gamma) e^{-st} dt$ oraz $R_T(s) = s \int_T^\infty (f(t) - \gamma) e^{-st} dt$. Jest oczywiste, że $|P_T(s)| \leq s \int_0^T |f(t) - \gamma| dt$ i $|R_T(s)| \leq s \int_T^\infty e^{-st} dt \sup_{T \leq t < \infty} |f(t) - \gamma| \leq \sup_{T \leq t < \infty} |f(t) - \gamma|$.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) - \gamma| = 0$, więc istnieje T takie, że zachodzi $|R_T(s)| < \varepsilon/2$. Z (A.6) wynika, że $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$. Zatem, dla takiego T istnieje z kolei tak małe s , że $|P_T(s)| < \varepsilon/2$. Ostatecznie, dla każdego ε istnieje s tak małe, że $|sF(s) - \gamma| < \varepsilon$, co kończy dowód. ■

Założenia o tym, że granice $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ oraz $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ istnieją, są istotne w obydwu twierdzeniach. Zauważmy bowiem, że $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = s/(s^2 + \omega^2)$, skąd wynika zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} s\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = 0$. Nie upoważnia to jednak do wyciągnięcia wniosku, że granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \omega t$ istnieje i wynosi zero.

Niech teraz

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)},$$

gdzie $N(s)$ oraz $M(s)$ są wielomianami jak w podrozdziale A.4. Jest oczywiste, że zgodnie z obowiązującą konwencją $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Z twierdzenia A.4.3 wynika następująca własność i lemat:

Własność A.5.1. *Niech $n < m$. Funkcja $g(t)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na domkniętej półprostej $[0, \infty)$.*

Lemat A.5.1. *Jeśli*

$$\operatorname{Re} s_1 < 0, \dots, \operatorname{Re} s_m < 0, \quad (\text{A.25})$$

to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że z (A.25) wynika, że pierwiastki wielomianu $M(s)$ oznaczone jak w twierdzeniu A.4.1 spełniają następujące nierówności: $\xi_1 < 0, \dots, \xi_p < 0$, $\sigma_1 < 0, \dots, \sigma_q < 0$. Wynika stąd, że wszystkie składniki sumy po prawej stronie w (A.22) zbiegają się do zera, gdy $t \rightarrow \infty$, co kończy dowód. ■

Wykorzystując twierdzenie A.5.1, możemy zbadać własności $k(t)$ w punkcie $t = 0$.

Lemat A.5.2. *Niech $n < m$ i niech $p = m - n$. Funkcja $g(t)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $t = 0$. Ponadto, dla $p = 1$,*

$$g(0) = \frac{b_n}{a_m} \neq 0$$

oraz, dla $p \geq 2$,

$$g(0) = g^{(1)}(0) = \dots = g^{(p-2)}(0) = 0$$

i dopiero

$$g^{(p-1)}(0) = \frac{b_n}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że różniczkowalność w punkcie $t = 0$ jest zapewniona przez własność A.5.1. Wynika z niej, że $\lim_{t \rightarrow 0} g^{(i)}(t) = g^{(i)}(0)$, dla $i = 0, 1, \dots$

Dla $p = 1$, z twierdzenia granicznego A.5.1 wynika, że

$$g(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \frac{b_n}{a_m}.$$

Dla $p > 1$ dowód jest nieco dłuższy. Zaczniemy od oczywistego faktu, że

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{p-1}K(s) = 0. \quad (\text{A.26})$$

Odwołując się do wspomnianego twierdzenia granicznego, możemy zatem napisać, że $g(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)$. Korzystając następnie z (A.26), otrzymujemy $g(0) = 0$.

Z powyższego wynika, że $\mathfrak{L}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0) = sG(s)$. Z twierdzenia A.5.1 wnioskujemy następnie, że $g'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathfrak{L}\{g'(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2G(s)$, co, w świetle (A.26), daje $g'(0) = 0$.

Powtarzając powyższe rozumowanie odpowiednią ilość razy, dochodzimy do wniosku, że ma miejsce równość $g^{(p-2)}(0) = 0$. W ostatnim kroku otrzymujemy wreszcie $g^{(p-1)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^pG(s) = b^n/a^m$, co kończy dowód. ■

Niech teraz

$$h(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{sM(s)} \right\} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s}G(s) \right\}.$$

Z lematu A.5.2 wynika kolejny:

Lemat A.5.3. Niech $n \leq m$, a $p = m - n$. Funkcja $h(t)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $t = 0$. Ponadto, dla $p = 0$,

$$h(0) = \frac{b_m}{a_m} \neq 0$$

oraz, dla $p \geq 1$,

$$h(0) = h^{(1)}(0) = \dots = h^{(p-1)}(0) = 0$$

i dopiero

$$h^{(p)}(0) = \frac{b_n}{a_m} \neq 0.$$

A.6. Równanie różniczkowe

Za pomocą równania różniczkowego opisujemy zachowanie się systemu dynamicznego w sytuacji, gdy zarówno jego wejście, jak i wyjście są sygnałami określonymi na całej prostej $t \in (-\infty, \infty)$. W związku z powyższym, wyznaczając transformatę Laplace'a pochodnej, stosujemy regułę (A.8).

Równanie różniczkowe rzędu m ma postać:

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_l u^{(l)}(t) + b_{l-1} u^{(l-1)}(t) + \dots + b_0 u(t),$$

$t \in (-\infty, \infty)$, przy czym

$$\lim_{t \rightarrow 0-} y(t), \lim_{t \rightarrow 0-} y^{(1)}(t), \dots, \lim_{t \rightarrow 0-} y^{(m-1)}(0)$$

jest warunkiem początkowym, który, dla prostoty, zapiszemy jak poniżej

$$y(0-), y^{(1)}(0-), \dots, y^{(m-1)}(0-).$$

Znana funkcja $u(t)$ ma tę własność, że $u(0-) = u^{(1)}(0-) = \dots = u^{(l-1)}(0-) = 0$.

W celu rozwiązania równania dokonamy transformacji Laplace'a obydwu jego stron. Zgodnie z (A.8) stwierdzamy, że:

$$\mathfrak{L}\{y^{(1)}(t)\} = sY(s) - y(0-),$$

$$\mathfrak{L}\{y^{(2)}(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0-) - y^{(1)}(0-),$$

itd. Ponieważ $u(0-) = u^{(1)}(0-) = \dots = u^{(l-1)}(0-) = 0$, zatem $\mathfrak{L}\{u^{(1)}(t)\} = sU(s)$, $\mathfrak{L}\{u^{(2)}(t)\} = s^2 U(s)$, ..., $\mathfrak{L}\{u^{(l)}(t)\} = s^l U(s)$. Obustronna transformacja daje więc

$$(a_m s^m + \dots + a_0)Y(s) - W(s) = (b_l s^l + \dots + b_0)U(s),$$

skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0} U(s) + \frac{W(s)}{a_m s^m + \dots + a_0},$$

gdzie $W(s)$ jest wielomianem stopnia $m-1$ zależnym od warunku początkowego i współczynników a_0, \dots, a_{m-1} . Ostateczne rozwiązanie równania wymaga znalezienia oryginału funkcji $Y(s)$.

Przykład A.6.1. Niech

$$y'(t) + 2y(t) = u(t),$$

przy czym $u(t) = 1(t)$ oraz $y(0-) = 3$. Po dokonaniu obustronnej transformacji Laplace'a, otrzymujemy $sY(s) - y(0-) + 2Y(s) = U(s)$, co daje

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} U(s) + y(0-) \frac{1}{s+2}.$$

Ponieważ $U(s) = 1/s$, więc

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)} + \frac{3}{s+2} = \frac{1}{2s} + \frac{5}{2} \frac{1}{s+2},$$

skąd wynika, że $y(t) = 1/2 + (5/2)e^{-2t}$ dla $t \geq 0$.

A.7. Transformacja Fouriera

Niech $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, będzie funkcją taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (\text{A.27})$$

Jej transformatą, lub całką, Fouriera $\tilde{X}(\omega)$ nazywa się

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{A.28})$$

a operację, która przeprowadza $x(t)$ w $\tilde{X}(\omega)$ – transformacją Fouriera. Odwrotna transformacja stwierdza, że

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{A.29})$$

Twierdzenie A.7.1 (wzór Parsewala). *Jeśli funkcja $x(t)$ spełnia warunek (A.27) i ponadto $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$, to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Dowód. Korzystając z (A.29), otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt,$$

co po zmianie kolejności całkowania daje

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) \tilde{X}^*(\omega) d\omega$$

i kończy dowód. ■

Nietrudno sprawdzić, że jeśli

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

to

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \tilde{G}(\omega).$$

W rozważaniach poniżej zakładamy dodatkowo, że

$$x(t) = 0 \text{ dla } t < 0, \quad (\text{A.30})$$

co pozwala zapisać (A.27) jako

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (\text{A.31})$$

Własność A.7.1. Niech $x(t)$ spełnia (A.30) i (A.31). Dla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[\tilde{X}(\omega)] \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $h(t)$ równa się $x(-t)$ i $x(t)$ odpowiednio dla $t < 0$ i $t \geq 0$, co oznacza, że $h(t)$ jest funkcją parzystą na prostej $(-\infty, \infty)$. Na mocy definicji

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= \int_{-\infty}^0 h(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \tilde{X}^*(\omega) + \tilde{X}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \tilde{X}(\omega), \end{aligned}$$

co, ze względu na (A.29), doprowadza do wniosku, że

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)]e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

W celu uzyskania ostatniej równości uwzględniliśmy to, że $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ oraz parzystość funkcji $\operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)]$. Ponieważ $h(t) = x(t)$ dla $t \geq 0$, zatem otrzymaliśmy pierwszą część tezy.

Niech teraz $f(t)$ równa się $x(t)$ i $x(-t)$ odpowiednio dla $t < 0$ oraz $t \geq 0$. Ponieważ $f(t)$ jest funkcją nieparzystą, więc argumentując jak powyżej, zauważamy bez trudu, że $\tilde{F}(\omega) = -\tilde{X}(-\omega) + \tilde{X}(\omega) = 2j \operatorname{Im} \tilde{X}(\omega)$. Dowodzimy w ten sposób prawdziwości drugiej części tezy. ■

Jak łatwo zauważyć, funkcja $x(t)$ spełniająca (A.30) i (A.31) ma zarówno transformatę Fouriera $\tilde{X}(\omega)$, jak i Laplace'a $X(s)$, przy czym

$$\tilde{X}(\omega) = X(j\omega). \quad (\text{A.32})$$

Dla funkcji takiej wzór Parsewala przyjmuje postać:

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{A.33})$$

Jako wniosek z (A.32) i własności A.7.1 otrzymujemy następną własność:

Własność A.7.2. Niech $x(t)$ spełnia (A.30) i (A.31). Dla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[X(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[X(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Przykład A.7.1. Niech $\mathcal{L}\{x(t)\} = 1/(Ts + 1)$. Ponieważ

$$\int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 T^2 + 1} d\omega = \frac{\pi}{2T},$$

zatem $\int_0^{\infty} x^2(t) dt = 1/2T$.

Ćwiczenie A.7.1. Wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)\tilde{Y}^*(\omega) d\omega,$$

co jest uogólnieniem wzoru Parsewala.

Ćwiczenie A.7.2. Wykazać, że transformatą Fouriera impulsu Diraca $\delta(t)$ jest $e^{-j\omega}$, a funkcji $e^{-x^2/2}$ jest $\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$.

Ćwiczenie A.7.3. Oznaczmy $h_n(t) = (1/\sqrt{2^n(n!)\sqrt{\pi}})e^{-t^2/2}H_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $H_n(t) = (-1)^n e^{x^2} (d^n/dt^n) e^{-x^2}$ jest n -tym wielomianem Hermite'a². Funkcje $h_n(t)$ tworzą zupełny układ ortonormalny Hermite'a na prostej $(-\infty, \infty)$, co oznacza między innymi, że $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)h_m(t) dt = 0$ dla $n \neq m$ oraz $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)^2 dt = 1$. Sprawdzić, że $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$, $H_2(t) = 4t^2 - 2$ itd. Korzystając następnie z tego, że $\tilde{h}_n(\omega) = (-j)^n \sqrt{2\pi} \tilde{h}_n(\omega)$, gdzie $\tilde{h}_n(\omega)$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $h_n(t)$, wykazać, że jeśli $k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(t)$, to $\tilde{K}(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \alpha_n \tilde{h}_n(\omega)$.

²G.G. Walter, *Wavelets and other orthogonal systems with applications*, CRC Press, Boca Raton 1994.

Dodatek B

Transformacja \mathcal{Z}

Omówimy teraz transformację \mathcal{Z} – narzędzie przedatne w analizie tzw. sygnałów dyskretnych w czasie, czyli ciągów liczbowych. Narzędzie to pozwala także rozwiązać równania różnicowe i, dzięki temu, umożliwia analizę własności systemów dyskretnych.

B.1. Definicja i własności

B.1.1. Definicja

Niech $\{x_n; n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ będzie ciągiem liczbowym takim, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} < \infty \quad (\text{B.1})$$

dla pewnego $\rho > 0$. Transformacja \mathcal{Z} przyporządkowuje mu funkcję $X(z)$ zmiennej zespolonej z zdefiniowaną następująco, patrz np. [8]:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots \quad (\text{B.2})$$

Zauważmy, że dla $|z| \geq \rho$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} \left(\frac{\rho}{|z|} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} < \infty,$$

skąd wynika, że szereg w (B.2) jest zbieżny w pierścieniu $|z| \geq \rho$. W pierścieniu tym zatem transformata $X(z)$ istnieje. Istnieją rzecz jasna ciągi, które nie spełniają warunku (B.1), np. $x_n = \lambda^{n^2}$, $\lambda \neq 0$. Jest ponadto oczywiste, że $X(z)$ zależy tylko od x_0, x_1, x_2, \dots , a nie od $\dots, -3, -2, -1$.

Odwrotna transformacja wyraża się natomiast wzorem

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j} X(z) z^{n-1} dz,$$

$n = 0, 1, \dots$, gdzie σ jest tak duże, że wszystkie bieguny funkcji $X(z)z^{n-1}$ leżą na lewo od prostej $\operatorname{Re} z = \sigma$.

Dla wygody, będziemy także pisać $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ oraz $\{x_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$. Następna konwencja, to oznaczanie przez np. $X(z)$, $G(z)$ transformat ciągów $\{x_n\}$ i $\{g_n\}$. Będziemy także niekiedy pisać $Y(z) \hat{=} \{y_n\}$ lub po prostu $Y(z) \hat{=} y_n$.

Wprowadzimy teraz operator opóźnienia, czyli przesunięcia w prawo. Dla oznaczenia ciągu $\{x_{n-1}\}$ będziemy pisać niekiedy $\mathcal{D}\{x_n\}$. Innymi słowy, \mathcal{D} jest operatorem przesunięcia w prawo o 1, czyli opóźnienia. Na tej samej zasadzie \mathcal{D}^k opóźnia o k , co oznacza, że

$$\mathcal{D}^k\{x_n\} = \{x_{n-k}\}. \quad (\text{B.3})$$

Zarówno transformacja \mathcal{Z} , jak i \mathcal{Z}^{-1} są operacjami liniowymi, tzn.

$$\alpha x_n + \beta y_n \hat{=} \alpha X(z) + \beta Y(z).$$

Podstawowe własności transformacji \mathcal{Z} to:

- przesunięcie w lewo o 1, czyli przyspieszenie

$$x_{n+1} \hat{=} zX(z) - zx_0,$$

- przesunięcie w prawo o 1, czyli opóźnienie

$$x_{n-1} \hat{=} z^{-1}X(z) + x_{-1}, \quad (\text{B.4})$$

- różniczkowanie względem z

$$nx_n \hat{=} -z \frac{d}{dz} X(z),$$

- zmiana skali zmiennej z

$$\lambda^{-n} x_n \hat{=} X(\lambda z),$$

- transformata ciągu będącego sumą

$$\sum_{i=0}^n x_i \hat{=} \frac{z}{z-1} X(z),$$

- transformata splotu

$$\sum_{i=0}^n x_{n-i} y_i \hat{=} X(z) Y(z).$$

Ćwiczenie B.1.1. Prawdziwość reguły o różniczkowaniu względem z wynika z równości $-z dX(z)/dz = -\sum_{n=0}^{\infty} x_n dz^{-n}/dz = \sum_{n=0}^{\infty} nx_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx_n\}$.

Ćwiczenie B.1.2. Aby sprawdzić regułę o transformacie ciągu przesuniętego w lewo, zauważmy, że $\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = x_1 + x_2 z^{-1} + x_3 z^{-2} + \dots = z(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots) - zx_0 = zX(z) - zx_0$.

Ćwiczenie B.1.3. W celu zweryfikowania relacji (B.4) wystarczy zauważyć, że $\mathcal{Z}\{x_{n-1}\} = x_{-1} + x_0z^{-1} + x_1z^{-2} + \dots = x_{-1} + z^{-1}(x_0 + x_1z^{-1} + \dots)$. Wynika stąd z kolei, że $x_{n-2} \hat{=} z^{-2}X(z) + z^{-1}x_{-1} + x_{-2}$. Zauważmy, że $\mathcal{Z}\{x_n\}$ zależy tylko od x_0, x_1, x_2, \dots , natomiast $\mathcal{Z}\{x_{n-1}\}$ ponadto od x_{-1} .

Ćwiczenie B.1.4. W celu sprawdzenia reguły o splocie zauważamy, że $\mathcal{Z}\{\sum_{i=0}^n x_{n-i}y_i\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n x_{n-i}y_i z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x_{n-i}z^{-(n-i)}y_i z^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i} = X(z)Y(z)$.

Ćwiczenie B.1.5. Aby zweryfikować regułę o transformacji ciągu będącego sumą, zauważamy, że $\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i 1_{n-i}$, gdzie 1_n jest ciągiem o wszystkich wyrazach równych 1, i stosujemy następnie regułę o transformacji spłotu, otrzymując $\mathcal{Z}\{\sum_{i=0}^n x_i\} = \mathcal{Z}\{\sum_{i=0}^n x_i 1_{n-i}\} = X(z)\mathcal{Z}\{1_n\} = X(z)\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = (z/(z-1))X(z)$.

Ćwiczenie B.1.6. Wykazać, że jeśli $x_n = x_{n+N}$ dla każdego n , tzn. jeśli ciąg x_n jest periodyczny o okresie N , to $X(z) = z^N X_N(z)/(z^N - 1)$, gdzie $X_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n}$.

Ćwiczenie B.1.7. Sprawdzić, że jeśli $x_n = 0$ dla wszystkich $n > N$, to $X(z) = P(z)/z^N$, gdzie $P(z)$ jest wielomianem o stopniu nie wyższym niż N .

B.1.2. Transformaty wybranych ciągów

Skokiem jednostkowym 1_n nazywa się ciąg

$$1_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots, \\ 1, & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

natomiast

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots, \\ 1, & \text{dla } n = 0, \\ 0, & \text{dla } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

jest dyskretnym impulsem Diraca. Z definicji transformacji wynika, że

$$\delta_n \hat{=} 1$$

oraz

$$1_n \hat{=} \frac{z}{z-1}.$$

Do ostatniego wyniku można dojść, spostrzegając, że $1_n = \sum_{i=0}^n \delta_n$ i stosując regułę o transformacji ciągu będącego sumą.

Bezpośrednio z definicji transformaty wnioskujemy, że

$$\lambda^n \hat{=} \frac{z}{z-\lambda}. \quad (\text{B.5})$$

Korzystając teraz z reguły o różniczkowaniu względem z , otrzymujemy

$$n\lambda^n \hat{=} \frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}.$$

Stosując tę regułę wobec ostatniego wyniku, dochodzimy do wniosku, że

$$n^2 \lambda^n \hat{=} \frac{\lambda z(z + \lambda)}{(z - \lambda)^3}.$$

W szczególności zatem

$$n \hat{=} \frac{z}{(z - 1)^2} \quad \text{oraz} \quad n^2 \hat{=} \frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}.$$

Z (B.5) wynika, że $e^{j\omega n} \hat{=} z/(z - e^{j\omega n})$ i $e^{-j\omega n} \hat{=} z/(z - e^{-j\omega n})$. Wiedząc zatem, że $2j \sin \omega n = e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}$ i $2 \cos \omega n = e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}$, otrzymujemy

$$\sin \omega n \hat{=} \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1},$$

czyli

$$\sin \omega n \hat{=} \frac{z \sin \omega}{(z - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}$$

oraz

$$\cos \omega n \hat{=} \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1},$$

tzn.

$$\cos \omega n \hat{=} \frac{z^2 - z \cos \omega}{(z - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}.$$

Przykład B.1.1. Wychodząc z transformaty ciągu $\sin \omega n$ i stosując regułę o różniczkowaniu względem z , możemy napisać

$$n \sin \omega n \hat{=} \frac{z(z^2 - 1) \sin \omega}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}.$$

Podobnie postępując wobec ciągu $\cos \omega n$, znajdujemy

$$n \cos \omega n \hat{=} \frac{z(z^2 \cos \omega - 2z + \cos \omega)}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}.$$

Przykład B.1.2. Korzystamy teraz z rezultatu poprzedniego przykładu i zamieniamy z na z/λ . Stosujemy następnie odpowiednią regułę i otrzymujemy

$$\lambda^n n \sin \omega n \hat{=} \frac{\lambda^2 z(z^2 - \lambda^2) \sin \omega}{(z^2 - 2z \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}$$

oraz

$$\lambda^n n \cos \omega n \hat{=} \frac{\lambda^2 z(z^2 \cos \omega - 2z \lambda + \lambda^2 \cos \omega)}{(z^2 - 2z \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}.$$

Przykład B.1.3. Różniczkując obydwie strony równości $z^k/(z-\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^{k-n-1}$ $k-1$ razy względem λ , otrzymujemy $z^k/(z-\lambda)^k = (1/(k-1)!) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(k) \lambda^n z^{-n}$, gdzie

$$\theta_n(k) = \frac{(n+k-1)!}{n!}. \quad (\text{B.6})$$

Zatem

$$\frac{z^k}{(z-\lambda)^k} \hat{=} \frac{1}{(k-1)!} \theta_n(k) \lambda^n. \quad (\text{B.7})$$

Przykład B.1.4. Stosując teraz, wobec ciągu w (B.7), obustronnie $k-1$ razy regułę o przesunięciu w prawo, dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{z}{(z-\lambda)^k} \hat{=} \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{ \lambda^n \theta_n(k) \}, \quad (\text{B.8})$$

skąd wynika, że np. $1/(z-1) \hat{=} \mathcal{D}^1 \{ \lambda^n \}$ oraz $1/(z-\lambda)^2 \hat{=} \mathcal{D}^2 \{ (n+1) \lambda^n \}$.

Przykład B.1.5. Niech teraz $\lambda = |\lambda| e^{j\omega}$ i $\rho = e^{j\varphi}$. Korzystając z (B.5), po nietrudnych przekształceniach dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{\rho z}{z-\lambda} + \frac{\bar{\rho} z}{z-\bar{\lambda}} \hat{=} 2|\lambda|^n \cos(\omega n + \varphi). \quad (\text{B.9})$$

Podobnie

$$\frac{\rho z^k}{(z-\lambda)^k} + \frac{\bar{\rho} z^k}{(z-\bar{\lambda})^k} \hat{=} \frac{2}{(k-1)!} |\lambda|^n \theta_n(k) \cos(\omega n + \varphi), \quad (\text{B.10})$$

gdzie $\theta_n(k)$ jest jak w (B.6). Stąd

$$\frac{\rho z}{(z-\lambda)^k} + \frac{\bar{\rho} z}{(z-\bar{\lambda})^k} \hat{=} 2 \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{ |\lambda|^n \theta_n(k) \cos(\omega n + \varphi) \}. \quad (\text{B.11})$$

Przykład B.1.6. Transformata może być funkcją niewymierną, np. $1/n! \hat{=} e^{-z}$.

B.2. Oryginały funkcji wymiernych

Znajdziemy teraz oryginał funkcji wymiernej $R(z)/M(z)$, gdzie $R(z)$ i $M(z)$ są wielomianami o stopniach r i m , tzn.

$$R(z) = b_r z^r + b_{r-1} z^{r-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

gdzie $b_r \neq 0$, oraz

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

przy czym $a_0 \neq 0$ i $a_m \neq 0$. Z definicji transformacji wynika, że jeśli $R(z)/M(z)$ jest transformatą, to $r \leq m$. W dalszych rozważaniach przyjmujemy zatem

- $r \leq m$,
- wielomiany $R(z)$ i $M(z)$ nie mają wspólnych pierwiastków.

Twierdzenie B.2.1 (bieguny dowolne). Niech wielomian $M(z)$ ma pierwiastki:

- rzeczywiste ξ_1, \dots, ξ_p , różne o krotnościach k_1, \dots, k_p , wszystkie różne od zera,
- pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = |\eta_i|e^{j\omega_i}$, $i = 1, \dots, q$, różne o krotnościach $\kappa_1, \dots, \kappa_q$,
(co oznacza, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2\sum_{i=1}^q \kappa_i = m$). Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{R(z)}{M(z)} &\doteq \alpha_0 \delta_n + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \frac{1}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\xi_i^n \theta_n(j)\} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{|\eta_i|^n \theta_n(j) \cos(\omega_i n + \varphi_{ij})\}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

gdzie $\theta_n(k)$ jest jak w (B.6), natomiast:

$$\alpha_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R(z)}{M(z)}, \quad (\text{B.13})$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{z \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i - j}}{dz^{k_i - j}} \left[(z - \xi_i)^{k_i} \frac{R(z)}{zM(z)} \right]$$

oraz

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{z \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i - j}}{dz^{\kappa_i - j}} \left[(z - \eta_i)^{\kappa_i} \frac{R(z)}{zM(z)} \right],$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że argumentacja podobna do tej z dowodu twierdzenia A.4.1 prowadzi do wniosku, że

$$\frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(z - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(z - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

a następnie pomnożyć obie strony przez z i skorzystać z (B.8) i (B.11). ■

Warto zwrócić teraz uwagę na to, że na ułamki proste, tzn. ułamki postaci $1/(z - a)$, rozłożyliśmy w dowodzie funkcję $R(z)/zM(z)$. W rezultacie $R(z)/M(z)$ jest liniową kombinacją ułamków typu $z/(z - a)$, których oryginały nietrudno znaleźć. W postępowaniu tym jest więc pewna różnica w stosunku do opisanego w części dotyczącej rozkładu na ułamki proste, związanego z transformacją Laplace'a.

Następne twierdzenie jest w zasadzie wnioskiem z poprzedniego.

Twierdzenie B.2.2 (bieguny jednokrotne). Jeśli pierwiastki wielomianu $M(z)$ są jednokrotne, a dokładniej:

- rzeczywiste ξ_1, \dots, ξ_p , różne, wszystkie różne od zera,
- parami zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = |\eta_i|e^{j\omega_i}$, $i = 1, \dots, q$, różne
(co oznacza, że $p + q = m$), to

$$\frac{R(z)}{M(z)} \doteq \frac{R(0)}{M(0)} \delta_n + \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i^n + 2 \sum_{i=1}^q 2|\beta_i| |\eta_i|^n \cos(\omega_i n + \varphi_i),$$

gdzie:

$$\alpha_i = \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) \frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{R(\xi_i)}{\xi_i M'(\xi_i)},$$

$$\beta_i = \lim_{z \rightarrow \eta_i} (z - \eta_i) \frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{R(\eta_i)}{\eta_i M'(\eta_i)},$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\varphi_i = \arg \beta_i$.

Dowód. Ponieważ $M(z)$ nie ma pierwiastka w punkcie $z = 0$, więc

$$\frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{z - \xi_i} + \sum_{i=1}^q \left[\frac{\beta_i}{z - \eta_i} + \frac{\bar{\beta}_i}{z - \bar{\eta}_i} \right].$$

Korzystając z (B.5) i (B.9), łatwo znajdujemy oryginał funkcji $R(z)/M(z)$. ■

Przykład B.2.1. Aby znaleźć oryginał funkcji

$$\frac{1}{(z+1)(3z-1)},$$

zaczynamy od rozłożenia na ułamki proste funkcji

$$\frac{1}{z(z+1)(3z-1)},$$

co doprowadza do równości

$$\frac{1}{z(z+1)(3z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{9}{4} \frac{1}{3z-1}.$$

Stąd

$$\frac{1}{(z+1)(3z-1)} = -1 + \frac{1}{4} \frac{z}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{z}{z-1/3}.$$

Zatem oryginałem jest $-\delta_n + (1/4)(-1)^n + (3/4)(1/3)^n$.

Przykład B.2.2. Ponieważ, dla $a \neq b$, $(a-b)z/(z-a)(z-b) = z/(z-a) - z/(z-b)$, zatem

$$\frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)} \hat{=} a^n - b^n.$$

Przykład B.2.3. Niech wielomian $z^2 + pz + q$ ma parę pierwiastków zespolonych z_1 i z_2 . Z poprzedniego przykładu wynika, że $(z_1 - z_2)z/(z - z_1)(z - z_2) \hat{=} z_1^n - z_2^n$. Oznaczając $z_1 = \rho e^{j\omega}$, gdzie $\rho = |z_1|$ oraz $\omega = \arg z_1$, i wiedząc, że $z_2 = \rho e^{-j\omega}$, możemy napisać $z_1 - z_2 = \rho(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = 2j\rho \sin \omega$. Ponadto, ponieważ $z_1^n = \rho^n e^{j\omega n}$ oraz $z_2^n = \rho^n e^{-j\omega n}$, więc $z_1^n - z_2^n = \rho^n(e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}) = 2j\rho^n \sin \omega n$. Ostatecznie $z/(z^2 + pz + q) \hat{=} 1(1/\sin \omega)\rho^{n-1} \sin \omega n$.

B.3. Własności graniczne

Twierdzenia graniczne

W poniższych dwóch twierdzeniach nazywanych granicznymi zmienna z jest rzeczywista.

Twierdzenie B.3.1. *Dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunek (B.1) istnienia transformaty \mathcal{Z} prawdziwy jest wzór:*

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Dowód. Jest oczywiste, że $X(z) - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n+1}$. Wynika stąd, że, dla $z \geq \rho$, $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n+1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| z^{-n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho^{-n+1} (\rho/z)^{n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho^{-n+1} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} \leq \rho c$, gdzie, zgodnie z (B.1), $c = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} < \infty$. W rezultacie, dla $z \geq \rho$, otrzymujemy $|X(z) - x_0| \leq \rho c/z$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie B.3.2. *Niech ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek (B.1). Jeśli granica $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ istnieje, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z).$$

Dowód. Załóżmy, że $z \geq 1$. Oznaczając $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ i korzystając z równości $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z/(z-1)$, piszemy $(z-1)z^{-1}X(z) - x = (z-1)z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x)z^{-n} = V_N(z) + W_N(z)$, przy czym $V_N(z) = (z-1)z^{-1} \sum_{n=0}^N (x_n - x)z^{-n}$ oraz $W_N(z) = ((z-1)/z) \sum_{n=N+1}^{\infty} (x_n - x)z^{-n}$. Jest oczywiste, że $|V_N(z)| \leq \delta(N+1)(z-1)/z$, przy czym $\delta = \sup_n |x_n - x|$, oraz $|W_N(z)| \leq (z-1)z^{-1} (\sup_{n>N} |x_n - x|) \sum_{k=N+1}^{\infty} z^{-k} \leq (z-1)z^{-1} (\sup_{n>N} |x_n - x|) \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sup_{n>N} |x_n - x|$.

Niech teraz $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$, więc istnieje N , zależne od ε , dla którego $|W_N(z)| < \varepsilon/2$. Dla takiego właśnie N istnieje z tak bliskie 1, że $|V_N(z)| < \varepsilon/2$. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$, $|((z-1)/z)X(z) - x| < \varepsilon$, jeśli tylko z jest wystarczająco bliskie 1, co kończy dowód. ■

Własności graniczne pewnych ciągów

Zacznijmy od wykazania prawdziwości przydatnego lematu.

Lemat B.3.1. *Dla ciągu $\theta_n(k)$ określonego wzorem (B.6) są prawdziwe nierówności*

$$n^k \leq \theta_n(k) \leq 2^k n^k.$$

Dowód. Ponieważ $\theta_n(k) = (n+1) \cdots (n+k-1)$, więc lewa nierówność jest oczywista. Prawa wynika z nierówności $\theta_n(k) \leq (n+k)^k = n^k (1+k/n)^k \leq 2^k n^k$, co kończy dowód. ■

Oznaczmy teraz

$$g_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{R(z)}{M(z)} \right\},$$

gdzie $R(z)$ oraz $M(z)$ są wielomianami jak w podrozdziale B.2.

Własność B.3.1. *Jeśli $|z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_m| < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$.*

Dowód. Korzystając z lematu B.3.1, dla $|\lambda| < 1$, otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(k)\lambda^n = 0$. Zatem każdy ze składników sumy w (B.12) zbiega się do zera, gdy $n \rightarrow \infty$ (operacja opóźnienia o $k - 1$ nie ma tutaj znaczenia). ■

Własność B.3.2. *Niech $p = m - r$. Prawdziwe są następujące związki:*

$$g_0 = \dots = g_{p-1} = 0 \text{ i dopiero } g_p = \frac{b_p}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $R(z)/M(z) = \gamma_p z^{-p} + \gamma_{p+1} z^{-(p+1)} + \dots$, przy czym $\gamma_p = b_p/a_m$, i odwołać się następnie do definicji transformacji \mathcal{Z} . ■

B.4. Dyskretna transformacja Fouriera

Dla ciągu $\{x_n; n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ takiego, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty, \quad (\text{B.14})$$

dyskretna transformata Fouriera i jej odwrotność są dane wzorami:

$$\bar{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega}, \quad (\text{B.15})$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}(\omega) e^{jn\omega} d\omega.$$

Twierdzenie B.4.1 (wzór Parsewala). *Jeśli ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek (B.14) i ponadto $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 < \infty$, to prawdziwa jest równość*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Dowód. Ze wzoru na odwrotne przekształcenie Fouriera wynika, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_0^{2\pi} \bar{X}(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega} \right] \bar{X}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}^*(\omega) \bar{X}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

W dalszej części zakładamy dodatkowo, że

$$x_n = 0 \text{ dla } n < 0, \quad (\text{B.16})$$

co pozwala zapisać warunek (B.14) jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty. \quad (\text{B.17})$$

Własność B.4.1. Niech x_n spełnia (B.16) i (B.17). Dla $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}[\bar{X}(\omega)] \cos(\omega n) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Im}[\bar{X}(\omega)] \sin(\omega n) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ własność ta jest dyskretnym odpowiednikiem własności A.7.1, zatem dowód jest podobny. ■

Ciąg $\{x_n\}$ spełniający (B.16) i (B.17) ma zarówno transformatę Fouriera $\bar{X}(\omega)$, jak i \mathcal{Z} , oznaczaną jako $X(z)$, przy czym

$$\bar{X}(\omega) = X(e^{j\omega}). \quad (\text{B.18})$$

Wzór Parsewala przyjmuje zatem postać:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (\text{B.19})$$

Jako wniosek z (B.18) i własności B.4.1 otrzymujemy następną własność:

Własność B.4.2. Jeśli ciąg $\{x_n\}$ spełnia (B.16) i (B.17), to, dla $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] \cos(\omega n) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] \sin(\omega n) d\omega. \end{aligned}$$

B.5. Równanie różnicowe

Równanie

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = b_m u_n + b_{m-1} u_{n-1} + \dots + b_0 u_{n-m},$$

$a_m \neq 0, a_0 \neq 0$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, nazywamy liniowym równaniem różnicowym rzędu m . Opisuje ono reakcję systemu na pobudzenie

$$\dots, u_{-3} = 0, u_{-2} = 0, u_{-1} = 0, u_0, u_1, u_2, \dots$$

w sytuacji, gdy warunkiem początkowym jest

$$y_{-m}, \dots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1},$$

tzn. zestaw m liczb. Ciągi $\{y_n\}$ oraz $\{u_n\}$ są określone dla $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Dla $n = 0$ otrzymujemy

$$a_m y_0 + a_{m-1} y_{-1} + \dots + a_0 y_{-m} = b_m u_0 + b_{m-1} u_{-1} + \dots + b_0 u_{-m}.$$

Ponieważ jest znany warunek początkowy i pobudzenie, z równania tego wynika y_0 . Dla $n = 1$ piszemy

$$a_m y_1 + a_{m-1} y_0 + \dots + a_0 y_{1-m} = b_m u_1 + b_{m-1} u_0 + \dots + b_0 u_{1-m},$$

skąd wynika y_1 , ponieważ y_0 zostało przed chwilą wyznaczone. Dla $n = 2$ równanie to ustala y_2 , dla $n = 3$ wyznacza ono y_3 itd. W ten sposób znajdujemy ciąg y_0, y_1, y_2, \dots , czyli rozwiązujemy równanie.

Rozwiązać równanie można także, stosując transformację \mathcal{Z} . Przy znajdowaniu transformacji ciągów opóźnionych, tzn. y_{n-k} , stosuje się regułę (B.4). Zatem:

$$\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = z^{-1}Y(z) + y_{-1},$$

$$\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} = z^{-2}Y(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2},$$

oraz, ogólnie,

$$\mathcal{Z}\{y_{n-k}\} = z^{-k}Y(z) + z^{-k+1}y_{-1} + \dots + z^{-1}y_{-k+1} + y_{-k}.$$

Ponadto, ponieważ $0 = u_{-1} = u_{-2} = \dots$, zatem

$$\mathcal{Z}\{u_{n-k}\} = z^{-k}U(z).$$

Wykonanie obustronnego przekształcenia \mathcal{Z} wobec równania różnicowego daje więc

$$(a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m})Y(z) - V(z^{-1}) = (b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m})U(z),$$

gdzie

$$V(z^{-1}) = w_{m-1} + w_{m-2}z^{-1} + \dots + w_0z^{-m+1},$$

przy czym współczynniki w_0, w_1, \dots, w_{m-1} zależą od y_{-1}, \dots, y_{-m} oraz a_0, \dots, a_m . Zatem

$$Y(z) = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}}U(z) + \frac{V(z^{-1})}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}},$$

skąd wynika, że

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}U(z) + \frac{zW(z)}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0},$$

gdzie

$$W(z) = z^{m-1}V(z^{-1}) = w_{m-1}z^{m-1} + \dots + w_1z + w_0z.$$

Jeśli $Y(z)$ jest funkcją wymierną, to jej oryginał $\{y_n\}$ można znaleźć metodą rozkładu na ułamki proste.

Zauważmy, że rozwiązanie równania zależy od $y_{-m}, y_{m-1}, \dots, y_{-1}$, lecz jest niezależne od wcześniejszych wyjść, tzn. od $\dots, y_{-m-2}, y_{-m-1}$. Reasumując, pokazaliśmy jak za pomocą transformacji \mathcal{Z} rozwiązać równanie różnicowe.

Przykład B.5.1. Niech równaniem różnicowym będzie

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = 2u_n + 3u_{n-1},$$

a $y_{-2} = 2, y_{-1} = 4$ warunkiem początkowym. Pobudzeniem jest $u_n = \delta_n$. Ponieważ

$$\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = z^{-1}Y(z) + y_{-1} = z^{-1}Y(z) + 4$$

oraz

$$\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} = z^{-2}Y(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2} = z^{-2}Y(z) + 4z^{-1} + 2,$$

więc transformacja obu stron równania daje

$$(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})Y(z) + 24z^{-1} - 8 = (2 + 3z^{-1})U(z).$$

Zatem

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2 + 3z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}U(z) + \frac{8 - 24z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} \\ &= \frac{2z^2 + 3z}{z^2 - 5z + 6}U(z) + \frac{8z^2 - 24z}{z^2 - 5z + 6}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu tego, że $U(z) = 1$, otrzymujemy ostatecznie

$$Y(z) = \frac{10z^2 - 21z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{10z^2 - 21z}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z-2} + \frac{9z}{z-3},$$

skąd wynika, że $y_n = 2^n + 9 \times 3^n = 2^n + 3^{n+2}$.

Przykład B.5.2. Niech

$$y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2} = 3u_{n-2} + 4u_{n-3}$$

oraz $u_n = \delta_n, y_{-1} = 2, y_{-2} = 3$. Ponieważ

$$(1 + z^{-1} - 2z^{-2})Y(z) + (2z^{-1}y_{-1} + 2y_{-2} + y_{-1}) = (3z^{-2} + 4z^{-3})U(z),$$

więc

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{3z + 4}{z(z^2 + z - 2)}U(z) - \frac{2z^2y_{-2} + z^2y_{-1} + 2zy_{-1}}{z^2 + z - 2} \\ &= \frac{3z + 4}{z(z-1)(z+2)}U(z) - \frac{2z^2y_{-2} + z^2y_{-1} + 2zy_{-1}}{(z-1)(z+2)}. \end{aligned}$$

Dla zadanego warunku początkowego i pobudzenia otrzymujemy zatem

$$Y(z) = \frac{3z + 4}{z(z-1)(z+2)} - \frac{8z^2 + 4z}{(z-1)(z+2)}.$$

Uwzględniając to, że

$$\begin{aligned} \frac{3z + 4}{z(z-1)(z+2)} &= -2\frac{1}{z} - \frac{5}{2} + \frac{7}{3}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{6}\frac{z}{z+2} \\ &\hat{=} -2\delta_{n-1} - \frac{5}{2}\delta_n + \frac{7}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{8z^2 + 4z}{(z-1)(z+2)} = \frac{4z}{z-1} + \frac{4z}{z+2} \hat{=} 4 + 4(-2)^n,$$

otrzymujemy

$$y_n = -2\delta_{n-1} - \frac{5}{2}\delta_n + \frac{19}{3} + \frac{25}{6}(-2)^n.$$

B.6. Transformacja \mathcal{Z} a transformacja Laplace'a

Ciąg liczbowy $\{x_n; n = 0, 1, \dots\}$ o transformacie $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ w sposób jednoznaczny jest skojarzony z ciągiem impulsów Diraca

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - nT),$$

gdzie T jest dowolną liczbą dodatnią. Poddanie $x^*(t)$ transformacji Laplace'a daje $X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-nsT}$. Możemy więc napisać

$$X^* \left(\frac{1}{T} \ln z \right) = X(z), \text{ tzn. } X^*(s) = X(e^{nsT}).$$

W celu przeprowadzenia analizy częstotliwościowej sygnału $x^*(t)$, czyli sygnału o czasie ciągłym, posługujemy się funkcją $X^*(j\omega)$. Dlatego też podobna analiza ciągu liczbowego $\{x_n; n = 0, 1, \dots\}$, czyli sygnału dyskretnego, jest związana z badaniem funkcji $X^*(e^{j\omega nT}) = X(z)|_{z=e^{j\omega T}}$.

Dodatek C

Wektory, macierze, funkcje macierzowe

C.1. Wektory, macierze

Przypomnijmy teraz podstawowe fakty dotyczące wektorów i macierzy; szczegóły można znaleźć w [11]. O wektorze kolumnowym

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$$

mówimy, że ma wymiar k , natomiast a_1, \dots, a_k nazywamy jego składowymi. O wektorze wierszowym

$$\mathbf{a}^T = [a_1, \dots, a_k]$$

mówimy, że jest transponowany względem \mathbf{a} . O zestawie wektorów $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ mówimy, że jest liniowo niezależny, jeśli równość $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Macierz prostokątna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix}$$

ma k wierszy i m kolumn, a a_{ij} nazywamy jej elementami. W szczególności,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą zerową. Jeśli $k = m$, tzn. jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

to mówimy, że jest ona kwadratowa i k nazywamy jej stopniem. Elementy a_{11}, \dots, a_{kk} leżą na głównej przekątnej. Macierz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{kk} \end{bmatrix}$$

nazywamy diagonalną, a

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

jednostkową. Dla większej czytelności nie zaznaczamy zer w sytuacjach oczywistych.

Macierz może sama składać się z macierzy, np.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}$$

(gdzie \mathbf{A}_{ij} , $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$, są macierzami) jest także macierzą. Wymiary macierzy \mathbf{A}_{ij} są przy tym, rzecz jasna, wzajemnie odpowiednie. Nazywamy je podmacierzami macierzy \mathbf{A} . Przykładem takiej macierzy jest np.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 3 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{21} = [2 \ 0], \mathbf{A}_{22} = [1].$$

Macierze odpowiednich rozmiarów, tzn. mające odpowiednią liczbę wierszy i kolumn, można dodawać i mnożyć. Pamiętajmy, że

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

co oznacza, że dodawanie jest przemienne. Na ogół jednak $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, nawet jeśli obydwa iloczyny istnieją, co oznacza, że mnożenie nie jest przemienne. Jeśli jednak $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to mówimy, że macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są przemienne.

Macierz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix}$$

nazywamy transponowaną względem \mathbf{A} i oznaczamy \mathbf{A}^T . Łatwo sprawdzić, że

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

Zakładamy, że pojęcie wyznacznika macierzy jest znane. Będziemy go oznaczać jako $\det \mathbf{A}$. Jeśli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to mówimy, że macierz jest nieosobliwa, w przeciwnym wypadku jest ona osobliwa. Pamiętajmy także, że dla dwóch macierzy kwadratowych \mathbf{A} i \mathbf{B} ,

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Ponadto

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^k \det \mathbf{A},$$

gdzie k jest stopniem macierzy. Zatem $\det(-\mathbf{A}) = (-1)^k \det \mathbf{A}$. Jest oczywiste, że

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$

Wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$, istnieje macierz \mathbf{A}^{-1} , nazywana jej odwrotnością, tzn. taka, że

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Dla macierzy nieosobliwej

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}, \quad (\text{C.2})$$

gdzie $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ jest macierzą dołączoną, czyli macierzą dopełnień algebraicznych. Zatem

$$(\det \mathbf{A}) \mathbf{I} = \mathbf{A} (\operatorname{adj} \mathbf{A}) = (\operatorname{adj} \mathbf{A}) \mathbf{A},$$

skąd wynika, że

$$\det(\operatorname{adj} \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^{k-1}. \quad (\text{C.3})$$

Ponieważ $1 = \det \mathbf{I} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1}$, a zatem

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{A}^{-1}}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Ponadto

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{C.4})$$

Macierz jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej kolumny (lub wiersze, co na jedno wychodzi) są liniowo niezależne. Różne zestawy wektorów będących kolumnami dowolnej macierzy, czyli zestawy o różnej liczności, mogą być liniowo niezależne lub zależne. Liczba kolumn (lub wierszy, co na jedno wychodzi) w najliczniejszym liniowo niezależnym zestawie nazywa się rzędem macierzy. Rząd macierzy \mathbf{A} będziemy oznaczać jako $\operatorname{rank} \mathbf{A}$.

Rząd nieosobliwej macierzy \mathbf{A} (czyli siłą rzeczy kwadratowej) jest równy jej stopniowi. Wiadomo, że $\operatorname{rank} \mathbf{AB} \leq \min(\operatorname{rank} \mathbf{A}, \operatorname{rank} \mathbf{B})$. Dla nieosobliwej macierzy \mathbf{B} zachodzi $\operatorname{rank} \mathbf{AB} = \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

Śladem macierzy kwadratowej nazywamy

$$\text{trace } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^k a_{ii},$$

czyli sumę elementów na głównej przekątnej. Bez trudu sprawdzamy, że

$$\text{trace } \mathbf{AB} = \text{trace } \mathbf{BA}.$$

Ćwiczenie C.1.1. Wykażemy, że, dla każdej macierzy \mathbf{A} ,

$$\text{rank } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{AA}^T = \text{rank } \mathbf{A}.$$

Oznaczmy przez $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ kolejne kolumny macierzy \mathbf{A} . Niech $R(\mathbf{A})$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, tzn. zbiorem wszystkich wektorów postaci $\gamma_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \gamma_n \mathbf{a}_n$, gdzie $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ są dowolnymi liczbami. Jest oczywiste, że wymiar tej przestrzeni jest równy rzędowi macierzy \mathbf{A} . Załóżmy, że wektor \mathbf{x} jest ortogonalny względem $R(\mathbf{A})$. Zatem $\mathbf{x}^T \mathbf{a}_i = 0$, dla każdego i , skąd wynika, że $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Zatem $\mathbf{x}^T \mathbf{AA}^T = \mathbf{0}$. Wektor \mathbf{x} jest więc ortogonalny względem $R(\mathbf{AA}^T)$. Jeśli natomiast wektor \mathbf{x} jest ortogonalny względem $R(\mathbf{AA}^T)$, to $\mathbf{x}^T \mathbf{AA}^T = \mathbf{0}$, skąd wynika, że $\mathbf{x}^T \mathbf{AA}^T \mathbf{x} = 0$, czyli $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Wektor \mathbf{x} jest zatem ortogonalny względem $R(\mathbf{A})$. Wykazaliśmy zatem, że wektor jest ortogonalny względem $R(\mathbf{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ortogonalny względem $R(\mathbf{AA}^T)$, co jest równoznaczne temu, że wymiary przestrzeni $R(\mathbf{A})$ i $R(\mathbf{AA}^T)$ są identyczne. Zatem $\text{rank } \mathbf{AA}^T = \text{rank } \mathbf{A}$. Drugą równość weryfikujemy podobnie.

Ćwiczenie C.1.2. Sprawdzić, że

$$\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}.$$

Przykład C.1.1. Jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & \cdots & a_{1k} \\ & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & \end{bmatrix},$$

to $\det \mathbf{A} = (-1)^{k(k-1)/2} a_{1k} a_{2,k-1} \cdots a_{k1}$.

Przykład C.1.2. Można sprawdzić, że jeśli \mathbf{A} oraz \mathbf{D} są macierzami kwadratowymi, to

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D}.$$

Przykład C.1.3. Dla kwadratowych macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ stopnia k ,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = (-1)^k \det \mathbf{B} \det \mathbf{C}.$$

Ćwiczenie C.1.3. Aby sprawdzić, że

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}) \det \mathbf{A},$$

zauważmy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{H},$$

gdzie

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \det \mathbf{H} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}) \det \mathbf{A}, \end{aligned}$$

co kończy sprawdzenie.

C.2. Wektor własny, wartość własna

Wielomianem charakterystycznym kwadratowej macierzy \mathbf{A} stopnia k nazywamy

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

a $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, czyli

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (\text{C.5})$$

jej równaniem charakterystycznym. Jego rozwiązania nazywamy wartościami własnymi macierzy. Macierz ta ma zatem k wartości własnych. Mogą one być rzeczywiste lub zespolone, pojedyncze lub wielokrotne. Oznaczając je jako $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, możemy napisać

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_k),$$

a po podstawieniu $\lambda = 0$ otrzymujemy

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^k \lambda_i. \quad (\text{C.6})$$

Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy zero jest jej wartością własną. Ważna jest także kolejna własność:

$$\text{trace } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (\text{C.7})$$

Niezerowy wektor \mathbf{x}_i spełniający równość

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$$

nazywamy wektorem własnym macierzy stowarzyszonym z wartością własną λ_i . Jest przy tym oczywiste, że $\alpha\mathbf{x}_i$, $\alpha \neq 0$, jest także wektorem własnym. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne. Macierz \mathbf{A} ma zatem k wektorów własnych $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ oraz k odpowiadających im wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Twierdzenie C.2.1. *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

Dowód. Oznaczmy przez $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ wartości własne, wszystkie różne, oraz przez $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ odpowiadające im wektory własne. Załóżmy, że istnieją liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ takie, że

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Pamiętając, że $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, po pomnożeniu obydwu stron tej równości przez $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$, otrzymujemy $\sum_{i=2}^p \alpha_i (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Ponieważ $\mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, możemy więc napisać

$$\sum_{i=2}^p \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Mnożąc obie strony przez $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})$, dochodzimy do wniosku, że

$$\sum_{i=3}^p \alpha_i (\lambda_i - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

W końcu otrzymujemy

$$\alpha_p (\lambda_p - \lambda_{p-1}) \cdots (\lambda_p - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

skąd wynika, że $\alpha_p = 0$. W podobny sposób dowodzimy, że $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{p-1} = 0$. Wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ są więc liniowo niezależne, co kończy dowód. ■

Ćwiczenie C.2.1. Sprawdzić, że macierz \mathbf{A}^{-1} ma wektory własne: $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ i wartości własne: $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}$.

C.3. Macierze podobne, diagonalizacja

Macierze \mathbf{A} oraz \mathbf{TAT}^{-1} , gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, nazywamy podobnymi. Ponieważ $\det \mathbf{TAT}^{-1} = \det \mathbf{T} \det \mathbf{A} \det \mathbf{T}^{-1}$, a więc

$$\det \mathbf{TAT}^{-1} = \det \mathbf{A}.$$

Wyznaczniki macierzy podobnych są więc jednakowe.

Ponieważ $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}) = \det(\lambda \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{TAT}^{-1}) = \det \mathbf{T} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T}^{-1}$, a zatem

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Wielomiany charakterystyczne macierzy podobnych, a więc i ich wartości własne, są takie same.

Transformacja podobieństwa nie zmienia także śladu macierzy, tzn.

$$\text{trace } \mathbf{A} = \text{trace } \mathbf{TAT}^{-1},$$

ponieważ wartości własne macierzy podobnych są wspólne, patrz ćwiczenie C.3.1.

Założmy teraz, że macierz \mathbf{A} ma wszystkie wartości własne różne. Z twierdzenia C.2.1 wynika zatem, że

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k], \quad (\text{C.8})$$

gdzie $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ są jej wektorami własnymi, jest macierzą nieosobliwą. Zauważmy teraz, że

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = [\mathbf{A}\mathbf{p}_1, \mathbf{A}\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{p}_k] = [\lambda_1\mathbf{p}_1, \lambda_2\mathbf{p}_2, \dots, \lambda_k\mathbf{p}_k],$$

bowiem $\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$, oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} &= [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1\mathbf{p}_1, \lambda_2\mathbf{p}_2, \dots, \lambda_k\mathbf{p}_k]. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Macierz o różnych wartościach własnych jest zatem podobna do macierzy diagonalnej. W związku z powyższym mówi się, że \mathbf{P} diagonalizuje macierz \mathbf{A} .

Podsumowując, możemy stwierdzić, że macierze podobne mają takie same:

- wielomiany charakterystyczne,
- wartości własne,
- wektory własne,
- wyznaczniki,
- ślady.

Ćwiczenie C.3.1. Z równości $[\det \mathbf{T}] \det \mathbf{T}^{-1} = 1$ wynika, że

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}) = \det[\mathbf{T}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{T}].$$

Zatem

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}).$$

Ćwiczenie C.3.2. Wykażemy teraz, że

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{T}^{-1}[\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})]\mathbf{T}.$$

Biorąc pod uwagę ćwiczenie C.3.1 oraz następujące dwie równości: $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})$, $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, dochodzimy do wniosku, że wystarczy sprawdzić, że $\mathbf{T}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Kończymy zauważając, że lewa strona jest równa $\mathbf{T}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}(\mathbf{T}^{-1})^{-1}$ i korzystając z (C.4).

C.4. Wielomiany macierzowe

Ponieważ

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{x}_i = \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda_i^2 \mathbf{x}_i,$$

zatem $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A}^2 , a $\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$ jej wartościami własnymi. Podobnie, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A}^n , natomiast $\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n$ jej wartościami własnymi.

Niech teraz $w(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ będzie wielomianem skalarnego argumentu x . Przez analogię wyrażenie

$$w(\mathbf{A}) = \alpha_n \mathbf{A}^n + \dots + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}$$

będziemy nazywać wielomianem macierzowym argumentu \mathbf{A} o skalarnych współczynnikach $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} w(\mathbf{A}) \mathbf{x}_i &= \alpha_n \mathbf{A}^n \mathbf{x}_i + \dots + \alpha_1 \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \alpha_0 \mathbf{x}_i \\ &= \alpha_n \lambda_i^n \mathbf{x}_i + \dots + \alpha_1 \lambda_i \mathbf{x}_i + \alpha_0 \mathbf{x}_i = w(\lambda_i) \mathbf{x}_i, \end{aligned}$$

co oznacza, że $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ są wektorami własnymi wielomianu $w(\mathbf{A})$, natomiast $w(\lambda_1), \dots, w(\lambda_n)$ jego wartościami własnymi. Spostrzeżenie to podamy w formie twierdzenia.

Twierdzenie C.4.1 (Frobenius). *Wartościami własnymi wielomianu $w(\mathbf{A})$ są:*

$$w(\lambda_1), \dots, w(\lambda_n),$$

a ponadto

$$\det w(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^k w(\lambda_i).$$

Zanim przejdziemy do kolejnego twierdzenia zauważmy, że dla wielomianu skalarnego zachodzi oczywista równość

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = \lambda^n a_n + \dots + \lambda a_1 + a_0.$$

Dla wielomianów macierzowych sprawa jest bardziej skomplikowana. Niech teraz $W(\lambda) = \mathbf{A}_n \lambda^n + \dots + \mathbf{A}_1 \lambda + \mathbf{A}_0$ będzie takim wielomianem o współczynnikach macierzowych. Na ogół, dla dowolnej macierzy kwadratowej $\mathbf{\Lambda}$,

$$\mathbf{A}_n \mathbf{\Lambda}^n + \dots + \mathbf{A}_1 \mathbf{\Lambda} + \mathbf{A}_0 \neq \mathbf{\Lambda}^n \mathbf{A}_n + \dots + \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0,$$

ponieważ iloczyn macierzy nie jest przemienne. Wynika stąd, że wielkość $W(\mathbf{\Lambda})$ nie jest jednoznacznie określona. Jeśli jednak $\mathbf{A}_i \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_i$ dla każdego i , to lewa strona jest równa prawej i wielomian

$$W(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{A}_n \mathbf{\Lambda}^n + \dots + \mathbf{A}_1 \mathbf{\Lambda} + \mathbf{A}_0$$

jest rozumiany jednoznacznie.

Twierdzenie C.4.2 (Cayley–Hamilton). *Macierz \mathbf{A} spełnia swoje równanie charakterystyczne (C.5), tzn.*

$$\mathbf{A}^k + a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Dowód. Z równości $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ wynika, że

$$M(\lambda)\mathbf{I} = V(\lambda)W(\lambda), \quad (\text{C.10})$$

gdzie $M(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ jest wielomianem skalarnym, a $V(\lambda) = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ oraz $W(\lambda) = \text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ są wielomianami macierzowymi. Argumentem wszystkich jest skalar λ . W jego miejsce zechcemy wstawić macierz \mathbf{A} . Jest przy tym oczywiste, że wielomiany $M(\mathbf{A})$ i $V(\mathbf{A})$ są jednoznacznie określone. Wyjaśnimy teraz, co będziemy rozumieć przez $W(\mathbf{A}) = \text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})|_{\lambda=\mathbf{A}}$.

Ponieważ elementy macierzy $\text{rank}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ są wielomianami argumentu λ stopnia nie wyższego niż $k-1$, zatem $W(\lambda) = \lambda^{k-1}\mathbf{B}_{k-1} + \cdots + \lambda\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_0$, gdzie $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_{k-1}$ są pewnymi macierzami. Wykażemy teraz, że

$$\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}_{k-1} + \cdots + \mathbf{A}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \cdots + \mathbf{B}_1\mathbf{A} + \mathbf{B}_0, \quad (\text{C.11})$$

co oznacza, że wielkość $W(\mathbf{A})$ jest jednoznacznie określona. Zauważmy w tym celu, że z (C.10) wynika, że

$$\lambda^k\mathbf{I} + a_{k-1}\lambda^{k-1}\mathbf{I} + \cdots + a_1\lambda\mathbf{I} + a_0\mathbf{I} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})(\lambda^{k-1}\mathbf{B}_{k-1} + \cdots + \lambda\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_0).$$

Mnożąc i porównując współczynniki przy kolejnych potęgach λ , zauważamy, że

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}_{k-1}, \quad a_{k-1}\mathbf{I} = \mathbf{B}_{k-2} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{k-1},$$

$$a_{k-2}\mathbf{I} = \mathbf{B}_{k-3} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{k-2}, \dots, \quad a_1\mathbf{I} = \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1, \quad a_0\mathbf{I} = \mathbf{B}_0.$$

Wynika stąd

$$\mathbf{B}_{k-1} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_{k-2} = a_{k-1}\mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_{k-3} = a_{k-2}\mathbf{I} + a_{k-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^2, \dots,$$

co oznacza, że macierze $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_{k-1}$ są wielomianami macierzy \mathbf{A} . Dla każdego i zachodzi zatem równość $\mathbf{A}\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i\mathbf{A}$. Wykazaliśmy, że równość (C.11) zachodzi. Wielkość $W(\mathbf{A})$ jest więc jednoznacznie określona.

W rezultacie, w równości $M(\mathbf{A}) = V(\mathbf{A})W(\mathbf{A})$ wszystkie trzy wielomiany argumentu \mathbf{A} są jednoznacznie określone. Ponieważ $V(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, zatem wnioskujemy, że $M(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, co kończy dowód. ■

C.5. Macierz fazowa

Macierze

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix},$$

gdzie, rzecz jasna, $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{k-1}]^T$, nazywają się fazowe, a to ze względu na to, że występują one w równaniach fazowych, patrz podrozdział 2.7. Łatwo sprawdzić, że

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \quad (\text{C.13})$$

jest wielomianem charakterystycznym obydwu. Z tego też powodu macierze te są nazywane także stowarzyszonymi z powyższym wielomianem. Przez $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ oznaczmy wartości własne tych macierzy.

Podamy teraz kilka ich własności. Ponieważ wyznacznik każdej z tych macierzy jest równy $(-1)^k a_0$, zatem każda z nich jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \neq 0$. W sytuacji takiej

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & \cdots & -\frac{a_{k-2}}{a_0} & -\frac{1}{a_0} \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{k-2}}{a_0} & \cdots & & 1 \\ -\frac{1}{a_0} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ich równaniem charakterystycznym jest

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-2}\lambda + 1 = 0,$$

skąd wynika, że $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_k$ są ich wartościami własnymi.

Macierzą Vandermonde'a nazywamy, patrz [10],

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Dla macierzy tej $\det \mathbf{V} = \prod_{1 \leq i, j \leq k} (\lambda_i - \lambda_j)$. Jeśli zatem wszystkie wartości własne są różne, to $\det \mathbf{V} \neq 0$ oraz

$$\mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} & \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix},$$

co oznacza, że macierz Vandermonde'a diagonalizuje macierz fazową.

Wykażemy teraz ciekawy lemat.

Lemat C.5.1. *Dla macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix}$$

i dowolnego wektora $\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{k-1}]^T$, jest prawdziwa następująca równość:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] = b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \dots + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}.$$

Dowód. Niech $w(s) = b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_1s + b_0$ oraz $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$, gdzie 1 znajduje się na pozycji i . Zatem $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k-1$, oraz $\mathbf{A}\mathbf{e}_k = -\mathbf{a}$. Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} w(\mathbf{A})\mathbf{e}_1 &= b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{e}_1 + \dots + b_1\mathbf{A}\mathbf{e}_1 + b_0\mathbf{e}_1 \\ &= b_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} + \dots + b_1\mathbf{e}_2 + b_0\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$, więc wynika stąd, że $w(\mathbf{A})\mathbf{e}_2 = w(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}w(\mathbf{A})\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}$. Postępując w ten sposób dochodzimy do wniosku, że $w(\mathbf{A})\mathbf{e}_k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}$. Ostatecznie

$$\begin{aligned} b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \dots + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I} &= w(\mathbf{A}) = w(\mathbf{A})\mathbf{I} = w(\mathbf{A})[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k] \\ &= [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}], \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Uwaga C.5.1. Zauważmy, że równanie charakterystyczne

$$\lambda_k + a_{k-1}\lambda^k + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

macierzy (C.12) ma pierwiastki $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, natomiast równanie jej odwrotności (C.14) ma równanie

$$a_0\lambda_k + a_1\lambda^k + \dots + a_k\lambda + 1 = 0$$

o pierwiastkach $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_k$.

Podamy teraz rezultat uzyskany przez Gerszgorina¹, patrz [10], który wypowiada się na temat położenia wartości własnych macierzy. Wyciągniemy z niego następnie wnioski o położeniu wartości własnych macierzy fazowej.

¹S. Geršgorin, *Izv. Akad. Nauk, ZSRR*, Ser. Fiz-Mat, 1931, 6, 749–754.

Twierdzenie C.5.1 (Gerszgorin). Niech \mathbf{A} będzie macierzą stopnia k . Każda wartość własna macierzy \mathbf{A} leży na płaszczyźnie liczb zespolonych w przynajmniej jednym z kół

$$\{z; |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}, i = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie $\rho_i = \sum_{j=1, j \neq i}^k |a_{ij}|$. Ponadto, jeśli zbiór n takich kół nie ma żadnego punktu wspólnego z pozostałymi, to zawiera on dokładnie n wartości własnych.

Dowód. Wykażemy prawdziwość pierwszej części twierdzenia. Dowód drugiej jest znacznie trudniejszy i dlatego go pomijamy. Niech λ będzie wartością własną związaną z wektorem własnym \mathbf{x} . Zatem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, czyli $\sum_{j=1}^k a_{ij}x_j = \lambda x_i$, $i = 1, \dots, k$, gdzie $[x_1, \dots, x_k] = \mathbf{x}^T$. Niech teraz $|x_p| = \max_i |x_i|$. Zatem, z p -tego równania wynika, że $|\lambda - a_{pp}||x_p| = |\sum_{j=1, j \neq p}^k a_{ij}x_j| \leq |x_p| \sum_{j=1, j \neq p}^k |a_{ij}| = |x_p|\rho_p$, co kończy dowód. ■

Wniosek C.5.1. Wartości własne macierzy fazowej (C.12), czyli pierwiastki wielomianu (C.13), leżą na płaszczyźnie liczb zespolonych z w zbiorze

$$\{z; |z| \leq 1\} \cup \{z; |z + a_{k-1}| \leq \sum_{i=0}^{k-2} |a_i|\}$$

będącym sumą dwóch kół.

Ćwiczenie C.5.1. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix}$$

i wektora $\mathbf{c} = [0, \dots, 0, 1]^T$ zachodzi równość

$$\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = [1, s, s^2, \dots, s^{k-1}],$$

z której wynika, że dla dowolnego wektora $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{k-1}]^T$,

$$\mathbf{c}^T [\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{b} = b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_1s + b_0.$$

Aby to sprawdzić, wystarczy wykazać, że $[\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = [1, s, \dots, s^{k-1}]$ lub, co na jedno wychodzi, $[\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{c}^T = [1, s, s^2, \dots, s^{k-1}](s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, co weryfikujemy bez trudu.

Ćwiczenie C.5.2. Sprawdzić, że dla $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jak w ćwiczeniu C.5.1,

$$\mathbf{c}^T \text{adj}(\mathbf{I} - \lambda^{-1}\mathbf{A}) = [\lambda^{-k+1}, \lambda^{-k+2}, \dots, \lambda^{-1}, 1]$$

oraz

$$\mathbf{c}^T \text{adj}(\mathbf{I} - \lambda^{-1}\mathbf{A})\mathbf{b} = b_0\lambda^{-k+1} + \dots + b_{k-2}\lambda^{-1} + b_{k-1}.$$

Ćwiczenie C.5.3. Sprawdzić, że dla każdej macierzy fazowej \mathbf{A}

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_1s + a_0$$

oraz

$$\det(\mathbf{I} - \lambda^{-1}\mathbf{A}) = 1 + a_{k-1}\lambda^{-1} + \dots + a_1\lambda^{-k+1} + a_0\lambda^{-k},$$

z uwagi na to, że $\det(\mathbf{I} - \lambda^{-1}\mathbf{A}) = \det[(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\lambda^{-1}\mathbf{I}] = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\det[\lambda^{-1}\mathbf{I}]$.

Ćwiczenie C.5.4. Z twierdzenia Gerszgorina wynika, że własności własne λ_i dowolnej macierzy \mathbf{A} spełniają nierówności

$$|\lambda_i| \leq \min(\alpha, \beta), i = 1, \dots, k,$$

gdzie $\alpha = \max_j \sum_{i=1}^k |a_{ij}|$, $\beta = \max_i \sum_{j=1}^k |a_{ij}|$. W szczególności zatem, dla macierzy fazowej (C.12),

$$|\lambda_i| \leq \min\left(1, \sum_{i=0}^{k-1} |a_i|\right) \text{ oraz } |\lambda_i| \leq \min(|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{k-1}|),$$

dla $i = 1, \dots, k$. Dla dowolnej wartości własnej λ_i , zachodzi bowiem ciąg następujących relacji: $|\lambda_i| - |a_{jj}| \leq |\lambda_i - a_{jj}| = \sum_{i=1}^k |a_{ij}| \leq \alpha$. Dowód drugiej części tezy przebiega analogicznie.

C.6. Funkcja $e^{\mathbf{A}t}$

C.6.1. Definicja

Dla dowolnej macierzy kwadratowej \mathbf{A} przyjmujemy na mocy definicji

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\}.$$

W szczególności, dla $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, zachodzą równości

$$e^{\mathbf{I}t} = \begin{bmatrix} e^t & & \\ & \ddots & \\ & & e^t \end{bmatrix} \text{ oraz } e^{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} e & & \\ & \ddots & \\ & & e \end{bmatrix}.$$

Zauważmy także, że

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

jest macierzą, której wszystkie elementy są funkcjami wymiernymi. W każdej z nich stopień wielomianu w mianowniku, czyli wielomianu $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, jest równy stopniowi macierzy \mathbf{A} (tzn. liczbie jej wierszy). Stopień wielomianu w liczniku, czyli odpowiedni element macierzy dołączonej $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, nie jest natomiast wyższy od tego w mianowniku. Oryginał każdego elementu jest zatem funkcją ciągłą, nieskończenie wiele razy

różniczkowalną, patrz własność A.5.1. W rezultacie dochodzimy do wniosku, że $e^{\mathbf{A}t}$ jest funkcją ciągłą, nieskończenie wiele razy różniczkowalną.

Dzięki wprowadzeniu funkcji $e^{\mathbf{A}t}$ można łatwo zapisać rozwiązanie liniowego wektorowego równania różniczkowego o postaci:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (\text{C.15})$$

gdzie \mathbf{x} jest kolumnowym wektorem k -wymiarowym, natomiast \mathbf{A} macierzą stopnia k , tzn. macierzą kwadratową o k wierszach i kolumnach. Po dokonaniu transformacji Laplace'a wobec obydwu stron równania otrzymujemy $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$, skąd wynika, że $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$. Ostatecznie zatem $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$, co oznacza, że

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \quad (\text{C.16})$$

C.6.2. Własności

Pokażemy teraz podstawowe własności funkcji $e^{\mathbf{A}t}$. Przede wszystkim zauważmy, że jest ona macierzą kwadratową o stopniu takim samym jak stopień \mathbf{A} . Podstawiając $t = 0$, otrzymujemy $\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{0}}\mathbf{x}(0)$ dla każdego $\mathbf{x}(0)$. Stąd

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}.$$

Zwracamy uwagę, że $\mathbf{0}$ jest macierzą kwadratową, której wszystkie elementy są zerami. Ponieważ $e^{\mathbf{A}t}$ jest funkcją ciągłą, wynika stąd, że $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$.

Zauważmy, że $\mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mathbf{A}(t+\tau)}\mathbf{x}(0)$. Z drugiej strony $\mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(\tau)$ oraz $\mathbf{x}(\tau) = e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0)$, skąd wynika, że $\mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0)$. Dla każdego $\mathbf{x}(0)$ zatem $e^{\mathbf{A}(t+\tau)}\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0)$. Ostatecznie

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}(t+\tau)}.$$

W szczególności więc

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{A}} = e^{2\mathbf{A}}.$$

Warto przy okazji zaznaczyć, że, dla macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} tego samego stopnia, na ogół $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.

Podstawiając $t = 1$, $\tau = -1$, a następnie $t = -1$, $\tau = 1$, dostajemy odpowiednio $e^{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ i $e^{-\mathbf{A}}e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$. Wynika stąd, że $\det e^{\mathbf{A}} \neq 0$ dla każdej macierzy \mathbf{A} oraz

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}.$$

Korzystając z reguły o transformacji pochodnej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\right\} &= s\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} - e^{\mathbf{0}} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I} \\ &= [s\mathbf{I} - (s\mathbf{I} - \mathbf{A})](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}.$$

Drugą z powyższych równości można zweryfikować podobnie jak pierwszą.

Oznaczając $\mathbf{S}_k = \sum_{n=0}^k (s^{-1}\mathbf{A})^n$, bez trudu zauważamy, że $\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k + (s^{-1}\mathbf{A})^{k+1}$ oraz $\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{I} + s^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_k$. Wynika zatem stąd, iż $\mathbf{S}_k = (\mathbf{I} - s^{-1}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - (s^{-1}\mathbf{A})^{k+1})$. Ponieważ, dla wystarczająco dużego s zachodzi zbieżność $\lim_{k \rightarrow \infty} (s^{-1}\mathbf{A})^k = \mathbf{0}$, więc $\sum_{n=0}^{\infty} s^{-n}\mathbf{A}^n = (\mathbf{I} - s^{-1}\mathbf{A})^{-1}$, skąd wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty} s^{-(n+1)}\mathbf{A}^n = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a i uwzględniając (A.11), otrzymujemy

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n. \quad (\text{C.17})$$

Wróćmy teraz do równania (C.15), którego rozwiązaniem jest (C.16). Przyjmując $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, otrzymujemy $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}$, przy czym $\mathbf{v}(0-) = \mathbf{T}\mathbf{x}(0-)$. Zatem $\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}t}\mathbf{v}(0-)$, czyli $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}t}\mathbf{T}\mathbf{x}(0-)$. Porównując ten wynik z (C.16) dochodzimy do wniosku, że

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}t}\mathbf{T}.$$

Załóżmy teraz, że macierz \mathbf{A} ma wszystkie wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ różne. Przyjmując $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$, gdzie \mathbf{P} jest macierzą jak w (C.8), i korzystając z (C.9), otrzymujemy

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix},$$

czyli

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}. \quad (\text{C.18})$$

Wynika stąd, że jeśli wartości własne macierzy \mathbf{A} są różne i rzeczywiste, to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.19})$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_k < 0$. Nietrudno zauważyć też, że jeśli wartości te są różne i, być może, zespolone, to zbieżność ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Re } \lambda_1 < 0, \dots, \text{Re } \lambda_k < 0$. Warunek ten jest prawdziwy również dla dowolnych wartości własnych, także wielokrotnych.

Przykład C.6.1. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

wyliczamy

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Stąd

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem równania (C.15) jest więc

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix},$$

gdzie $[x_1(0), x_2(0)]^T = \mathbf{x}(0)$.

Ćwiczenie C.6.1. Korzystając z rozwinięcia (C.17), sprawdzić, że

$$e^{\mathbf{A}^T} = (e^{\mathbf{A}})^T. \quad (\text{C.20})$$

Ćwiczenie C.6.2. Wykazać, że jeśli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) = (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{C.21})$$

Ćwiczenie C.6.3. Sprawdzić, że dla macierzy \mathbf{A} o wszystkich wartościach własnych w lewej półpłaszczyźnie jest prawdziwy wzór $\int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} dt = \mathbf{A}^{-1}$.

Ćwiczenie C.6.4. Korzystając z (C.18), sprawdzić, że jeśli macierz \mathbf{A} ma wszystkie wartości własne różne i rzeczywiste, to zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste są ujemne.

Ćwiczenie C.6.5. Sprawdzić, że jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix},$$

to:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t - t & t \\ t & e^t - t \end{bmatrix}, e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} 1 & e^t - 1 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}, e^{\mathbf{C}t} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie C.6.6. Nawiązując do powszechnie znanych wzorów, możemy zdefiniować $\sin \mathbf{A} = (1/2j)(e^{j\mathbf{A}} - e^{-j\mathbf{A}})$ oraz $\cos \mathbf{A} = (1/2)(e^{j\mathbf{A}} + e^{-j\mathbf{A}})$. Sprawdzić, że jest prawdziwa równość $\sin^2 \mathbf{A} + \cos^2 \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Przykład C.6.2. Dla macierzy \mathbf{A} takiej jak w przykładzie C.6.1 znajdujemy wielomian charakterystyczny $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s+1)(s+2)$, skąd wynika, że $s_1 = -1$ oraz $s_2 = -2$. Rozwiązując następnie równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = s_1\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{A}\mathbf{x} = s_2\mathbf{x}$, czyli

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ oraz } \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

zatem ostatecznie

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C.7. Ciąg \mathbf{A}^n

Rozwiązaniem równania $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$, przy dowolnym warunku początkowym \mathbf{x}_0 , jest oczywiście

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0. \quad (\text{C.22})$$

Przyjmując teraz $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, otrzymujemy $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_n$, z warunkiem początkowym $\mathbf{v}_0 = \mathbf{T}\mathbf{x}_0$. Zatem $\mathbf{v}_n = (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^n \mathbf{v}_0$, czyli $\mathbf{x}_n = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^n \mathbf{T}\mathbf{x}_0$. Porównując wynik z (C.22) dochodzimy do wniosku, że

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^n \mathbf{T}.$$

Założmy teraz, że macierz \mathbf{A} ma wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, wszystkie różne. Przyjmując $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$, gdzie \mathbf{P} jest macierzą jak w (C.8), i korzystając z (C.9), otrzymujemy

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix},$$

czyli

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}. \quad (\text{C.23})$$

Wynika stąd, że jeśli wartości własne macierzy \mathbf{A} są różne i rzeczywiste, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \quad (\text{C.24})$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_k| < 1$. Warunek ten obowiązuje również dla dowolnych wartości własnych, także zespolonych i wielokrotnych.

Ćwiczenie C.7.1. Korzystając z (C.23), zauważyc, że jeśli \mathbf{A} ma wszystkie wartości własne różne i rzeczywiste, to zbieżność $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy co do wartości bezwzględnej są one mniejsze od 1.

Ćwiczenie C.7.2. Oznaczając $\mathbf{S}_n = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}^i$, stwierdzamy, że $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \mathbf{A}^{n+1}$ oraz $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{S}_n$, skąd wnioskujemy, że $\mathbf{S}_n + \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{S}_n$. Wynika stąd, że $\mathbf{S}_n(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}$. Jeśli więc wartości własne macierzy \mathbf{A} są różne od 1, to $\mathbf{S}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Ćwiczenie C.7.3. Wykazać, że jeśli 1 nie jest wartością własną macierzy \mathbf{A} , to prawdziwa jest równość $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Dodatek D

Sterowalność, obserwowalność

D.1. Systemy ciągłe

Przedmiotem rozważań jest teraz system ciągły o równaniu stanu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

przy czym k jest wymiarem wektora stanu. Podstawienie $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, doprowadza do nowego równania

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{Tb}u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

w którym stanem jest \mathbf{v} . Opisy (D.1) i (D.2) nazywamy równoważnymi.

D.1.1. Sterowalność

Definicja D.1.1. System nazywa się sterowalny, jeśli istnieje t^* takie, że dla każdej pary stanów $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$ istnieje sterowanie $u(t)$ takie, że jeśli $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, to $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$.

Jak wiemy,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau.$$

System jest więc sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje t^* takie, że równanie

$$\mathbf{x}^* - e^{\mathbf{A}t^*}\mathbf{x}^0 = \int_0^{t^*} e^{\mathbf{A}(t^*-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

o niewiadomej $u(t)$, $t \in [0, t^*)$, ma rozwiązanie dla każdej pary $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$. Innymi słowy jest on sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$\mathbf{x}^* - e^{\mathbf{A}t^*}\mathbf{x}^0 = \int_0^{t^*} e^{\mathbf{A}(t^*-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau \quad (\text{D.3})$$

ma rozwiązanie dla każdej pary $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$.

Zanim podamy podstawowe kryterium sterowalności przedstawimy użyteczny lemat.

Lemat D.1.1. *Niech $\mathbf{P}_n = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$. Jeśli*

$$\text{rank } \mathbf{P}_n = \text{rank } \mathbf{P}_{n+1},$$

to

$$\text{rank } \mathbf{P}_n = \text{rank } \mathbf{P}_{n+1} = \text{rank } \mathbf{P}_{n+2} = \dots$$

Ponadto $\text{rank } \mathbf{P}_k = \text{rank } \mathbf{P}_{k+1} = \text{rank } \mathbf{P}_{k+2} = \dots$

Dowód. Z równości $\text{rank } \mathbf{P}_n = \text{rank } \mathbf{P}_{n+1}$ wynika, że $\mathbf{A}^n\mathbf{b}$, czyli ostatnia kolumna macierzy \mathbf{P}_{n+1} , jest liniową kombinacją kolumn $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$. Oznacza to, że istnieją współczynniki $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ takie, że $\mathbf{A}^n\mathbf{b} = \alpha_0\mathbf{b} + \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$. Zatem $\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{b} = \alpha_0\mathbf{A}\mathbf{b} + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^n\mathbf{b}$, co oznacza, że ostatnia kolumna macierzy \mathbf{P}_{n+2} , czyli $\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{b}$, jest liniową kombinacją jej kolumn $\mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^n\mathbf{b}$. Wykazaliśmy zatem, że $\text{rank } \mathbf{P}_n = \text{rank } \mathbf{P}_{n+1} = \text{rank } \mathbf{P}_{n+2}$. Teza jest więc prawdziwa. ■

Twierdzenie poniższe stanowi kryterium sterowalności.

Twierdzenie D.1.1. *System jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank } [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] = k.$$

Dowód. Oznaczmy $\mathbf{P} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}]$ i założmy, że $\text{rank } \mathbf{P} = k$. Wykażemy, że system jest sterowalny na dowolnym odcinku $[0, t^*)$, gdzie $t^* > 0$. Jako sterowanie, czyli rozwiązanie równania (D.3), przyjmujemy

$$u(t) = \mathbf{b}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{R}^{-1}(t^*) (e^{-\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0),$$

gdzie $\mathbf{R}(t^*) = \int_0^{t^*} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}\mathbf{b}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau$. Rzeczywiście, dla sterowania tego

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} e^{\mathbf{A}(t^*-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau &= e^{\mathbf{A}t^*} \int_0^{t^*} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}\mathbf{b}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau \mathbf{R}^{-1}(t^*) (e^{-\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \\ &= e^{\mathbf{A}t^*} \mathbf{R}(t^*) \mathbf{R}^{-1}(t^*) (e^{-\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \\ &= \mathbf{x}^* - e^{\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}^0. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz wykazać, że $\mathbf{R}(t^*)$ jest macierzą nieosobliwą. Dowiedzimy tego nie wprost. Przypuśćmy bowiem, że macierz $\mathbf{R}(t^*)$ jest osobliwa. Skoro tak, to istnieje niezerowy wektor $\boldsymbol{\xi}$ taki, że $\mathbf{R}(t^*)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, skąd wynika, że $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{R}(t^*)\boldsymbol{\xi} = 0$. Oznacza to, że

$$0 = \boldsymbol{\xi}^T \int_0^{t^*} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} (e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b})^T d\tau \boldsymbol{\xi} = \int_0^{t^*} (\boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b})^2 d\tau.$$

Zatem $\boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} = 0$ dla wszystkich $t \in [0, t^*)$. Zatem także $(\boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b})' = 0$, czyli $\boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}\mathbf{b} = 0$, dla wszystkich $t \in [0, t^*)$. Różniczkując jeszcze $k-2$ razy, zauważamy, że $\boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = 0, \dots, \boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} = 0$ dla każdego $t \in [0, t^*)$. Dlatego $\boldsymbol{\xi}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P} = \mathbf{0}$ dla

każdego $t \in [0, t^*)$. Ponieważ $e^{\mathbf{A}t}$ jest macierzą nieosobliwą dla każdego t , więc wynika stąd, że \mathbf{P} jest macierzą osobliwą, czyli $\text{rz } \mathbf{P} < k$, co przeczy założeniu poczynionemu na samym początku. Wynika stąd, że $\mathbf{R}(t^*)$ jest macierzą nieosobliwą.

W drugiej części dowodu wyjdziemy od założenia, że system jest sterowalny. Ponieważ $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \mathbf{A}^n t^n$, patrz C.17, zatem

$$\mathbf{x} = \int_0^{t^*} e^{\mathbf{A}(t^*-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{A}^n \mathbf{b},$$

gdzie $\alpha_n = (n!)^{-1} \int_0^{t^*} \tau^n u(\tau) d\tau$. Dowolny wektor \mathbf{x} jest więc liniową kombinacją wektorów $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots$. Znajduje się wśród nich zatem układ k wektorów liniowo niezależnych. Z lematu D.1.1 wynika, że jest to układ pierwszych k wektorów. Wniosujemy ostatecznie, że $\text{rz } \mathbf{P} = k$, co kończy dowód. ■

Dla opisu równoważnego (D.2) macierzą sterowalności jest

$$[\mathbf{T}\mathbf{b}, (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{T}\mathbf{b}, (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^2\mathbf{T}\mathbf{b}, \dots, (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{k-1}\mathbf{T}\mathbf{b}]. \quad (\text{D.4})$$

Ponieważ $(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^i \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{A}^i \mathbf{b}$, zatem macierz (D.4) jest równa \mathbf{TP} . Rzędy macierzy \mathbf{TP} oraz \mathbf{P} są zatem takie same dlatego, że \mathbf{T} jest macierzą nieosobliwą. Wynika stąd równość rzędów macierzy \mathbf{P} i (D.4). Sterowalność, lub jej brak, jest zatem cechą wspólną wszystkich opisów równoważnych. Jest to więc własność systemu.

D.1.2. Obserwowalność

Wartość wyjścia systemu w chwili t , czyli $y(t)$, zależy od stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$ i sterowania $u(\tau)$, $\tau \in [0, t)$. Zależność tę podkreślimy, pisząc $y(t; \mathbf{x}(0); u(\tau), \tau \in [0, t))$ w miejsce $y(t)$. Z równania stanu wynika, że

$$y(t; \mathbf{x}(0); u(\tau), \tau \in [0, t)) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau. \quad (\text{D.5})$$

Znając wyjście oraz pobudzenie na pewnym odcinku, powiedzmy $[0, t)$, czyli znając $y(t)$ oraz $u(\tau)$, $\tau \in [0, t)$, chcemy wyznaczyć stan początkowy $\mathbf{x}(0)$. Jest oczywiste, że jeśli istnieją dwa wektory, powiedzmy \mathbf{x}_1 oraz \mathbf{x}_2 , takie że

$$y(t; \mathbf{x}_1; u(\tau), \tau \in [0, t)) = y(t; \mathbf{x}_2; u(\tau), \tau \in [0, t)),$$

nie jest to możliwe. Przy dwóch różnych początkowych wektorach stanu i tym samym sygnale sterującym, wyjścia systemu w chwili t są bowiem identyczne. Podamy definicję obserwowalności.

Definicja D.1.2. System nazywa się obserwowalny, jeśli istnieje $t^* \geq 0$ takie, że z równości

$$y(t; \mathbf{x}_1; u(\tau), \tau \in [0, t)) = y(t; \mathbf{x}_2; u(\tau), \tau \in [0, t))$$

zachodzącej dla wszystkich $t \in [0, t^*)$ wynika, że $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Można więc powiedzieć krótko, że system nazywany obserwowalnym, jeśli istnieje $t^* \geq 0$ takie, że z nierówności $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ wynika, że

$$y(t^*; \mathbf{x}_1; u(\tau), \tau \in [0, t^*)) \neq y(t^*; \mathbf{x}_2; u(\tau), \tau \in [0, t^*)).$$

Różne stany początkowe powodują wtedy różne wartości wyjścia w chwili t^* .

Twierdzenie D.1.2. *System jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} = k.$$

Dowód. Oznaczając $\xi(t) = y(t) - \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau$ (wracamy do krótkiego oznaczenia $y(t)$), możemy na podstawie (D.5) napisać $\xi(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$.

Założmy teraz, że $\text{rank } \mathbf{Q} = k$, gdzie

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

Zatem $\xi(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0)$, $\xi^{(1)}(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(0)$, \dots , $\xi^{(k-1)}(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}(0)$. Wynika stąd, że $\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{Q} \mathbf{x}(0)$, gdzie $\boldsymbol{\eta}(0) = [\xi(0), \xi^{(1)}(0), \dots, \xi^{(k-1)}(0)]$. W rezultacie otrzymujemy $\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\eta}(0)$, co oznacza, że system jest obserwowalny.

Założmy teraz, że system jest obserwowalny. Z definicji wynika, że istnieje t^* takie, że z równości $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}_2$ wynika, że $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Przypuśćmy teraz, że $\text{rank } \mathbf{Q} < k$. W sytuacji takiej istnieje niezerowy wektor $\boldsymbol{\xi}$ taki, że $\mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, tzn. taki, dla którego $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\xi} = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \dots = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Z lematu D.1.1 wynika, że także $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ dla $i = k, k+1, \dots$. Zatem

$$\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0},$$

dla każdego t . Wynika stąd, że

$$\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t^*} (\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\xi}),$$

co przeczy założeniu o obserwowalności. Zatem $\text{rank } \mathbf{Q} = k$, co kończy dowód. ■

Łatwo sprawdzić, że macierz obserwowalności równań (D.2) ma postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1})^{k-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

Ponieważ $\mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1})^i = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \mathbf{T}^{-1}$, a więc macierz (D.7) jest równa $\mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}$ i jest tego samego rzędu co \mathbf{Q} . Rząd macierzy obserwowalności jest zatem cechą systemu.

D.2. Systemy dyskretne

System dyskretny jest opisywany równaniami stanu:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}u_n, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

przy czym k jest wymiarem wektora stanu. Podstawienie $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{T} jest dowolną macierzą nieosobliwą, do (D.8) doprowadza do nowego równania

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_n + \mathbf{T}\mathbf{b}u_n, \\ y_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_n, \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

w którym stanem jest \mathbf{v} . Opisy (D.8) i (D.9) nazywamy równoważnymi.

D.2.1. Sterowalność

Definicja D.2.1. System nazywa się sterowalny, jeśli istnieje N takie, że dla każdej pary stanów $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$ istnieje sterowanie u_0, u_1, \dots, u_{n-1} takie, że jeśli $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0$, to $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}^*$.

Jest oczywiste, że $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-i} \mathbf{b}u_i$, co można zapisać w postaci

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}_n \mathbf{u}_n,$$

gdzie $\mathbf{P}_n = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$ oraz $\mathbf{u}_n = [u_{n-1}, \dots, u_1, u_0]$. System jest więc sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje N takie, że równanie

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^n \mathbf{x}^0 + \mathbf{P}_n \mathbf{u}_n,$$

w którym niewiadomą jest \mathbf{u}_n , ma rozwiązanie dla każdej pary $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$. Innymi słowy jest on sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_n \mathbf{u}_n$$

ma rozwiązanie dla każdego wektora \mathbf{x} .

Twierdzenie D.2.1. System jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rank} [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] = k.$$

Dowód. Załóżmy, że $\text{rank} \mathbf{P}_k = k$. Równanie $\mathbf{x} = \mathbf{P}_k \mathbf{u}_k$ ma zatem rozwiązanie, a jest nim $\mathbf{u}_k = \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{x}$. System jest więc sterowalny.

Przypuśćmy teraz, że system jest sterowalny, tzn., że istnieje N takie, że równanie $\mathbf{x} = \mathbf{P}_N \mathbf{u}_N$ ma rozwiązanie dla każdego \mathbf{x} . Wśród kolumn macierzy \mathbf{P}_N jest zatem k liniowo niezależnych. Z lematu D.1.1 wynika, że jest to jej k pierwszych kolumn. Zatem $\text{rank} \mathbf{P}_k = k$, co kończy dowód. ■

D.2.2. Obserwowalność

Dla systemu dyskretnego $y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T \mathbf{P}_n \mathbf{u}_n$, skąd wynika, że $\xi_n = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$, gdzie $\xi_n = y_n - \mathbf{c}^T \mathbf{P}_n \mathbf{u}_n$. Zatem

$$\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{x}_0, \quad (\text{D.10})$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}_n = [y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$ oraz

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Celem naszym jest teraz wyznaczenie stanu początkowego \mathbf{x}_0 na podstawie obserwacji wyjścia i wejścia, tzn. y_0, y_1, \dots, y_{n-1} oraz u_0, u_1, \dots, u_{n-1} .

Definicja D.2.2. System nazywamy obserwowalnym, jeśli istnieje N takie, że równanie

$$\boldsymbol{\eta}_N = \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_0$$

(o niewiadomej \mathbf{x}_0) ma rozwiązanie.

Twierdzenie D.2.2. System jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} = k.$$

Dowód. Jeśli $\text{rank} \mathbf{Q} = k$, to równanie $\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_0$ ma rozwiązanie $\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}_k^{-1} \boldsymbol{\eta}_k$. System jest więc obserwowalny.

Przypuśćmy, że system jest obserwowalny i $\text{rank} \mathbf{Q} < k$. Z lematu D.1.1 wynika, że $\text{rank} \mathbf{Q}_n < k$, dla każdego n . Dla każdego n istnieje więc niezerowy wektor $\boldsymbol{\xi}_n$ taki, że $\mathbf{Q}_n \boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{0}$. Zatem

$$\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{x}_0$$

oraz

$$\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{Q}_n (\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_n),$$

skąd wynika, że pierwsze z tych równań nie ma jednoznacznego rozwiązania dla żadnego n . Zatem system nie jest obserwowalny, co oznacza sprzeczność. Zatem $\text{rank} \mathbf{Q} = k$, co kończy dowód. ■

Dodatek E

Procesy stochastyczne drugiego rzędu

Omówimy teraz podstawowe własności sygnałów o wartościach losowych, czyli procesów stochastycznych. Czas zmienia się przy tym w sposób ciągły lub dyskretny. W rozważaniach naszych E oznacza wartość oczekiwaną. Dla stacjonarnego procesu stochastycznego $X(t)$, $m_X = EX(t)$, natomiast σ_X^2 oraz $\text{var}[X]$ oznaczają wariancję, czyli $E(X(t) - m_X)^2$.

E.1. Procesy z czasem ciągłym

Definicja E.1.1. Rodzina $X(t)$, gdzie $t \in (-\infty, \infty)$, zmiennych losowych takich, że $EX^2(t) < \infty$ dla każdego t , nazywa się procesem stochastycznym drugiego rzędu.

E.1.1. Funkcja korelacji, gęstość widmowa

Dla procesu drugiego rzędu definiuje się następującą funkcję korelacji:

$$R_X(\tau, t) = E\{X(\tau)X(t)\}.$$

Definicja E.1.2. Jeśli $EX(t) = \text{const}$ oraz $R_X(\tau, t) = R_X(\tau - t, 0)$, to mówimy, że proces jest stacjonarny (a dokładniej, stacjonarny w szerszym sensie).

Dla prostoty, zamiast $R_X(\tau, 0)$ będziemy pisać krótko $R_X(\tau)$ (tzn. będziemy pomijać drugi argument). Dla procesów stacjonarnych zatem

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\}$$

dla każdego t .

Własność E.1.1. Funkcja korelacji procesu stacjonarnego ma następujące własności:

- a) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$,
- b) $R_X(0) = EX^2(t) = E^2X(t) + \text{var}[X(t)]$,
- c) $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$.

Dowód. Własności a) i b) są oczywiste, natomiast c) wynika z następującej nierówności: $E^2\{X(t)X(t+\tau)\} \leq EX^2(t)EX^2(t+\tau) = E^2X^2(t)$. Z b) i tego, że $EX(t) = \text{const}$ wynika, że także $\text{var}[X(t)] = \text{const}$. ■

Załóżmy teraz, że $EX(t) = 0$, tzn. że wartość średnia procesu wynosi zero. Jeśli $\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)|d\tau < \infty$, to dla procesu takiego definiujemy funkcję gęstości widmowej

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

która jest, rzecz jasna, transformatą Fouriera funkcji korelacji. Zatem

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \quad (\text{E.1})$$

Ponieważ $R_X(\tau)$ jest funkcją parzystą, więc gęstość widmowa wyraża się wzorem $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cos(\omega\tau)d\tau$, skąd wynika, że $S_X(\omega)$ przyjmuje wartości rzeczywiste. Ponadto $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$. Z (E.1) wynika, że $R_X(0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega$, co, po uwzględnieniu c), daje

$$EX^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega. \quad (\text{E.2})$$

Interpretując $EX^2(t)$ jako moc sygnału, zauważamy więc, że jest ona proporcjonalna do całki z gęstości widmowej.

Przykład E.1.1. Dla $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$, mamy $S(\omega) = 2\alpha/(\omega^2 + \alpha^2)$.

Niech $X(t)$ i $Y(t)$ będą dwoma stacjonarnymi procesami drugiego rzędu. Funkcją korelacji wzajemnej nazywamy

$$R_{XY}(\tau) = E\{X(t+\tau)Y(t)\},$$

gdzie t jest dowolne. Jeśli $\int_{-\infty}^{\infty} |R_{XY}(\tau)|d\tau < \infty$, to jej całka Fouriera

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

istnieje i nazywa się funkcją wzajemnej gęstości widmowej. Zauważamy następnie, że $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ i, siłą rzeczy, $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega)$.

Niech teraz $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Jak łatwo sprawdzić:

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega),$$

gdzie $R_X(\tau)$ i $R_Y(\tau)$ są funkcjami korelacji procesów $X(t)$ i $Y(t)$, natomiast $S_X(\omega)$ i $S_Y(\omega)$ ich gęstościami widmowymi. Jeśli natomiast procesy te nie są skorelowane, tzn. jeśli $E\{X(t)Y(\tau)\} = EX(t)EY(\tau)$, to

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + 2EX(t)EY(t).$$

Jeśli ponadto $EX(t) = EY(t) = 0$, to:

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega).$$

E.1.2. Biały szum

Jeśli $EX(t) = 0$ i $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \delta(\tau)$, $\sigma_X^2 > 0$, to mówimy, że proces jest stacjonarnym białym szumem o zerowej średniej. Ponieważ $\delta(t) = 0$ dla $\tau \neq 0$, więc $|R_X(\tau)| = 0$ dla $\tau \neq 0$. Zatem, dla $\tau \neq 0$, $E\{X(\tau)X(\tau+t)\} = 0$, co oznacza, że zmienne losowe $X(\tau)$ i $X(\tau+t)$ nie są skorelowane. Dla procesu takiego $S_X(\omega) = \sigma_X^2$, skąd wynika, że $EX^2(t) = \infty$. Moc białego szumu jest zatem nieskończona. Nie jest to więc proces fizyczny, lecz jedynie pewna, wygodna abstrakcja. Z tego samego też powodu nie jest to proces drugiego rzędu (w takim procesie bowiem $EX^2(t) < \infty$).

Jeśli $Y(t) = X(t) + m_X$, $m_X \neq 0$, to $R_Y(\tau) = m_X^2 + \sigma_X^2 \delta(\tau)$. $Y(t)$ jest stacjonarnym białym szumem o średniej m_X . Ponieważ $\int_0^\infty |R_Y(\tau)| d\tau = \infty$, zatem proces taki nie ma gęstości widmowej.

Przykład E.1.2. Niech $Z(t) = X(t) + Y(t)$, gdzie $X(t)$ jest białym szumem o funkcji korelacji $R_X(\tau) = \delta(\tau)$, natomiast $Y(t)$ nieskorelowanym z nim procesem o funkcji korelacji $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$. Zatem $R_Z(\tau) = \delta(\tau) + e^{-|\tau|}$ oraz $S_Z(\omega) = 1 + 1/(\omega^2 + 1)$, patrz przykład E.1.1.

E.1.3. Całka i pochodna procesu

Całka i pochodna średniokwadratowa

W wielu zastosowaniach istnieje potrzeba operowania całką $\int_0^T f(t)X(t)dt$, gdzie $f(t)$ jest pewną ustaloną funkcją, a $X(t)$ stacjonarnym procesem drugiego rzędu. Problemem jest to, że własności funkcji czasu $X(t)$, czyli realizacji procesu stochastycznego, nie gwarantują istnienia tej całki (dla przykładu, całka Riemanna $\int_0^T X(t)dt$ istniałaby, gdyby realizacja $X(t)$ procesu była wystarczająco gładka). Z tego powodu należy dostosować definicję całki do zaistniałej sytuacji, co czynimy poniżej.

Dla stacjonarnego procesu $X(t)$ drugiego rzędu określimy całkę średniokwadratową na odcinku $[a, b]$, gdzie $a < b$. Niech teraz $\{t_0, \dots, t_n\}$ będzie zbiorem punktów takich, że $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$, tzn. punktów dzielących odcinek $[a, b]$ na poszczególne przedziały. Przez Δ_n oznaczmy długość najdłuższego z nich, co oznacza, że $\Delta_n = \max_i(t_i - t_{i-1})$. Dla takiego podziału definiujemy $I_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)X(t_i)(t_i - t_{i-1})$. Jest oczywiste, że I_n jest zmienną losową. Weźmy teraz pod uwagę ciąg podziałów taki, że $\Delta_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Jeśli istnieje liczba I taka, że $\lim_{n \rightarrow \infty} E(I_n - I)^2 = 0$ niezależnie od sposobu podziału odcinka, to mówimy, że całka średniokwadratowa $\int_a^b f(t)X(t)dt$ istnieje i jest równa I . Zwróćmy przy tym uwagę na to, że wartość tej całki, tzn. I , jest zmienną losową. W sposób naturalny pojęcie całki średniokwadratowej na odcinku rozszerza się do całki na całej prostej $(-\infty, \infty)$.

Warunek, przy którym całka średniokwadratowa istnieje, podaje poniższe twierdzenie, patrz [13].

Twierdzenie E.1.1. *Całka średniokwadratowa $\int_a^b f(t)X(t)dt$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna $\int_a^b \int_a^b f(\xi)f(\eta)R_X(\xi - \eta)d\xi d\eta$ (może być przy tym tak, że $a = -\infty$ lub $b = \infty$).*

Z podanego twierdzenia wynika prosty wniosek:

Wniosek E.1.1. *Całka średniokwadratowa $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)X(\tau)d\tau$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\xi)f(t-\eta)R_X(\xi-\eta)d\xi d\eta$.*

Uwaga E.1.1. Dla $X(t)$ będącego białym szumem całkę $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)X(\tau)d\tau$ będziemy traktować w sposób formalny, patrz [13].

Omówimy teraz pojęcie pochodnej procesu drugiego rzędu. Podamy najpierw definicję ciągłości procesu.

Definicja E.1.3. *Proces $X(t)$ drugiego rzędu nazywa się ciągłym średniokwadratowo, jeżeli $E(X(t+h) - X(t))^2 \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$.*

Powyższą zbieżność zapisuje się także w następującej postaci:

$$X(t+h) \rightarrow X(t), \text{ gdy } h \rightarrow 0 \text{ według średniej drugiego rzędu.}$$

Ciągłość wiąże się bezpośrednio z własnościami funkcji korelacji, ponieważ stacjonarny proces $X(t)$ drugiego rzędu jest ciągły średniokwadratowo wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_X(\tau) = R_X(0)$. Jest bowiem oczywiste, że prawdziwa jest następująca równość: $E(X(t+h) - X(t))^2 = 2EX^2(t) - 2R_X(h)$.

Definicja E.1.4. *Pochodną $\dot{X}(t)$ średniokwadratową w punkcie t stacjonarnego procesu $X(t)$ drugiego rzędu nazywamy*

$$\dot{X}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \text{ według średniej drugiego rzędu.}$$

Ciągłość, jak się nietrudno domyśleć, nie wystarcza do różniczkowalności procesu. Pochodna średniokwadratowa procesu $X(t)$ istnieje bowiem dla każdego $t \in (-\infty, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pochodna $R'_X(0)$, patrz [13].

E.2. Procesy z czasem dyskretnym

Niech teraz $\{\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niech ponadto $EX_n^2 < \infty$. Ciąg ten nazywa się dyskretnym procesem stochastycznym. Funkcją korelacji tego procesu jest

$$R_X(n) = E\{X_{n+m}X_m\}, \quad (\text{E.3})$$

gdzie m jest dowolne. Funkcja ta ma następujące własności:

- a) $R_X(-n) = R_X(n)$,
- b) $|R_X(n)| \leq R_X(0)$,
- c) $R_X(0) = EX_n^2$.

Własności a) oraz c) są oczywiste, natomiast b) wynika stąd, że jest prawdziwa nierówność $E^2|X_0X_n| \leq EX_0^2EX_n^2$.

Założmy teraz, że średnia tego procesu równa się zero, tzn. że $EX_n = 0$. Jeśli $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_X(n)| < \infty$, to istnieje gęstość widmowa $S_X(\omega)$ zdefiniowana następująco:

$$S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n)e^{-j\omega n}, \quad (\text{E.4})$$

która jest transformatą Fouriera funkcji korelacji. Zatem

$$R_X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_X(\omega)e^{j\omega n} d\omega. \quad (\text{E.5})$$

Ponieważ $R_X(n)$ jest funkcją parzystą, więc $S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n) \cos \omega n$, skąd wynika, że $S_X(\omega)$ przyjmuje wartości rzeczywiste oraz $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$. Z (E.5) wynika, że $R_X(0) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} S_X(\omega) d\omega$, co, z uwagi na c), daje

$$EX_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_X(\omega)e^{j\omega n} d\omega.$$

Jeśli $R_X(n) = \sigma_X^2 \delta_n$, gdzie δ_n jest dyskretnym impulsem Diraca, to mówimy, że proces jest białym szumem. Dla białego szumu zatem $E\{X_n X_m\} = 0$ dla $n \neq m$, co oznacza, że X_n i X_m są nieskorelowane dla $n \neq m$.

Dla dwóch stacjonarnych procesów X_n i Y_n ,

$$R_{XY}(n) = E\{X_{n+m} Y_m\}$$

nazywa się funkcją korelacji wzajemnej, a jej całkę Fouriera

$$S_{XY}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{XY}(n)e^{-j\omega n}$$

funkcją wzajemnej gęstości widmowej. Oznaczając $Z_n = X_n + Y_n$, możemy napisać:

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n) + R_{XY}(n) + R_{YX}(n),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega).$$

Jeśli procesy X_n i Y_n nie są skorelowane, tzn. jeśli $E\{X_n Y_m\} = EX_n EY_m$, to

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n) + 2EX_n EY_n.$$

Jeśli ponadto $EX_n = EY_n = 0$, to

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n)$$

oraz

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega).$$

Dodatek F

Tablice transformacji

F.1. Transformacja Laplace'a

$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{1}{6}t^3$	$\frac{1}{s^4}$
$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^3}$
$\frac{1}{n!}t^ne^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$

$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t e^{\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(s - \sigma)}{((s - \sigma)^2 + \omega^2)^2}$
$t e^{\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{(s - \sigma)^2 - \omega^2}{((s - \sigma)^2 + \omega^2)^2}$

F.2. Transformacja \mathcal{Z}

δ_n	1
1_n	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
λ^n	$\frac{z}{z-\lambda}$
$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\lambda^n$	$\frac{z^2}{(z-\lambda)^2}$
$\mathcal{D}\{(n+1)\lambda^n\}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^2}$
$\frac{(n+k)!}{k!n!}\lambda^n$	$\frac{z^{k+1}}{(z-\lambda)^{k+1}}$
$\frac{1}{k!}\mathcal{D}^k\left\{\frac{(n+k)!}{n!}\lambda^n\right\}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\cos \omega n$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\sin(\omega n + \varphi)$	$\frac{z^2 \sin \varphi + z \sin(\omega - \varphi)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\cos(\omega n + \varphi)$	$\frac{z^2 \cos \varphi - z \cos(\omega - \varphi)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\lambda^n \sin \omega n$	$\frac{\lambda z \sin \omega}{z^2 - 2z\lambda \cos \omega + \lambda^2}$
$\lambda^n \cos \omega n$	$\frac{z^2 - z\lambda \cos \omega}{z^2 - 2z\lambda \cos \omega + \lambda^2}$

Uwaga: \mathcal{D} jest operatorem opóźnienia o 1.

$n \sin \omega n$	$\frac{z(z^2 - 1) \sin \omega}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}$
$n \cos \omega n$	$\frac{z(z^2 \cos \omega - 2z + \cos \omega)}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}$
$n \lambda^n \sin \omega n$	$\frac{\lambda^2 (z^2 - \lambda^2) \sin \omega}{(z^2 - 2z \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}$
$n \lambda^n \cos \omega n$	$\frac{\lambda^2 z (z^2 \cos \omega - 2z \lambda + \lambda^2 \cos \omega)}{(z^2 - 2z \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}$

Bibliografia

Literatura podstawowa

- [1] Kaczorek T., *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa 1974.
- [2] Kaczorek T., *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa 1996.
- [3] Nowacki P., Szklarski L., Górecki H., *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*, PWN, Warszawa 1970.
- [4] Ogata K., *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974.
- [5] Pełczewski P., *Teoria sterowania*, WNT, Warszawa 1980.
- [6] Szparkowski Z., *Zarys teorii regulacji układów liniowych*, WNT, Warszawa 1960.
- [7] Węgrzyn S., *Podstawy automatyki*, WNT, Warszawa 1976.

Literatura uzupełniająca

- [8] Jury E.I., *Przekształcenie Z i jego zastosowania*, WNT, Warszawa 1970.
- [9] Kailath T., *Linear systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1980.
- [10] Lancaster P., Tismenetsky M., *Theory of Matrices*, Academic Press, San Diego 1985.
- [11] Mostowski A., Stark M., *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1977.
- [12] Osiowski J., *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1981.
- [13] Wong E., *Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1976.
- [14] Zemanian A.H., *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

Indeks

- całka średniokwadratowa, 283
- charakterystyka częstotliwościowa
 - amplitudowo-fazowa, 28, 142
 - logarytmiczna, 28
 - przybliżona, 42
- człon
 - całkujący, 39
 - całkujący z inercją, 39
 - inercyjny, 34–36
 - oscylacyjny, 37
 - proporcjonalny, 33
 - różniczkujący, 41
 - różniczkujący z inercją, 41
- ekstrapolator, 150
- funkcja
 - $e^{\mathbf{A}t}$, 269
 - korelacji, 281, 282, 284
 - wymierna, 228
- gęstość widmowa, 282, 285
- impuls Diraca, 220
 - dyskretny, 245
- impulsator, 149
- kryterium stabilności
 - Hurwitza, 66, 178
 - Jury'ego, 171
 - Liénarda–Chiparta, 66
 - Michajłowa, 69, 174, 179
 - Nyquista, 74, 78–80, 181–185
 - Routha–Hurwitza, 63, 178
 - Schura–Cohna, 167
 - znak współczynników, 62
- macierz
 - dołączona, 259
 - fazowa, 29, 148, 265
 - obserwowalności, 88, 189
 - podobna, 262
 - sterowalności, 85, 188
 - Vandermonde'a, 266
- obserwowalność
 - systemu ciągłego, 277
 - systemu dyskretnego, 280
- odpowiedź
 - impulsowa, 20, 52, 56, 143
 - na sinusoidę, 54, 160
 - skokowa, 22, 56, 146
- proces stochastyczny, 281
 - dyskretny, 284
- równanie
 - charakterystyczne, 12, 137
 - macierzy, 261
 - fazowe, 29, 56
 - różnicowe, 135, 194, 252
 - różniczkowe, 11, 97, 238
 - stanu
 - systemu ciągłego, 83
 - systemu dyskretnego, 187
- regulacja
 - astatyczna, 118, 207
 - I, 118, 207
 - P, 116, 207
 - PI, 120, 208
 - PID, 121
 - statyczna, 114, 207

- skok jednostkowy, 219
 - dyskretny, 245
- splot, 29, 148
- stabilność, 48, 108, 155, 156, 201
- sterowalność
 - systemu ciągłego, 275
 - systemu dyskretnego, 279
- system
 - automatycznej regulacji, 111, 205, 209
 - ciągły, sterowany dyskretnie, 203
 - obserwowalny, 189
 - równoległy, 19, 141
 - sterowalny, 188
 - struktura, 91, 93, 96, 190–192
 - szeregowy, 19, 141
 - ze sprzężeniem zwrotnym, 19, 72, 142
- trajektoria fazowa, 30, 57, 148
- transformacja
 - \mathcal{Z} , 243
 - Fouriera, 240
 - dyskretna, 251
 - Laplace'a, 222
- transmitancja, 18, 105, 140, 199
 - uchybowa, 112, 206
 - widmowa, 27, 142
- twierdzenie
 - Abela, 236, 237
 - Cayleya–Hamiltona, 265
 - Frobeniusa, 264
 - Gerszgorina, 268
 - graniczne, 236, 237, 250
 - o ciągu oryginalnym, 248
 - o funkcji oryginalnej, 232
 - o rozkładzie na ułamki proste, 229, 231
 - o stabilności, 48, 156
- ułamek prosty, 229
- uchyb, 111, 205

- wartość własna macierzy, 261
- warunek początkowy, 135, 239, 253
- wektor własny macierzy, 261
- wielomian charakterystyczny, 12, 137
 - macierzy, 261
 - systemu zamkniętego, 73, 206
- wykres Michajłowa, 174
- wzór
 - Orlando, 64
 - Parsewala, 240, 241, 251, 252
- wzmocnienie w stanie ustalonym, 53, 159